

## Διαγώνισμα

Θεματική ενότητα: Όρια συναρτήσεων

Τάξη Γ΄ Λυκείου

Κατεύθυνση: Θετική και Τεχνολογική

Αριθμός θεμάτων: 4

Βαθμολογία: 100

Διάρκεια εξέτασης: 2 διδακτικές ώρες

### ΘΕΜΑΤΑ

#### Θέμα Α

**A1.** Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής για τις συναρτήσεις  $f, g, h$  αν ισχύει  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ .

(Μονάδες 9)

**A2.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό, αν είναι σωστές και με Λάθος αν είναι λανθασμένες:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha^x = 0$  αν  $0 < \alpha < 1$

3. Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $X_0$  και ισχύει  $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow X_0} g(x)$ , τότε  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $X_0$

4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = 1$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty, \nu \in \mathbb{N}$

(Μονάδες 10)

**A3.** Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες

1. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \dots$
2. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \dots$
3. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \dots$

(Μονάδες 6)

### Θέμα Β

Έστω η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο διάστημα  $[0, \pi]$  και ισχύει ότι:

$$1 + 2\sqrt{\eta\mu x} \leq f(x) \leq 2 + \eta\mu x, x \in [0, \pi]$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$  και ότι  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 3$

(Μονάδες 5)

**B2.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{f(x) - 3}$

(Μονάδες 10)

**B3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|f(x) - 3| - xf(x) - 3}{f(x) - 3}$

(Μονάδες 10)

### Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln \frac{x^2 + \kappa^2}{x}, \kappa > 0$

**Γ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

**Γ2.** Να βρείτε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(Μονάδες 6)

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \ln x)$

(Μονάδες 7)

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2 \ln x)$

(Μονάδες 7)

**Θέμα Δ**

Δ.1. Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  
 $f^3(x) - f^2(x) + 3f(x) = x^3$  για κάθε  $x \in (0, \infty)$  και  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Δ.1.1. Να αποδείξετε ότι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, \infty)$

(Μονάδες 8)

Δ.1.2. Να υπολογίσετε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ , αν γνωρίζουμε ότι αυτά υπάρχουν στο  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

(Μονάδες 9)

Δ2. Αν  $g(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} - ax + \beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) να βρεθούν οι τιμές των  $\alpha, \beta$  ώστε:

Δ.2.1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$

Δ.2.2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$

(Μονάδες 8)

*Πανελλήνιες Εξετάσεις 2014*

*Μαθηματικός Περιηγητής*