Λύσεις του διαγωνίσματος Νο 1 (Συναρτήσεις)
Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

Θέμα Α

Α1. Θεωρία-Ορισμός σελ. 151σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία-Ορισμός σελ. 149 σχολικού βιβλίου.

Α3. 1. Λάθος

2. Σωστό

3. Σωστό

4. Λάθος

5. Σωστό

Θέμα Β

Β1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε έχουμε $\ln x_1 < \ln x_2$ (1) και αφού η g είναι γν. φθίνουσα $g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow -g(x_1) > -g(x_1)$ (2). Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη θα έχουμε $\ln x_1 - g(x_1) < \ln x_2 - g(x_2)$ και συνεπώς $f(x_1) < f(x_2)$, άρα η f είναι γν. άυξουσα συνάρτηση.

Β2. Για κάθε $x > 0$ (έχουμε και ότι $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$)

Η δοθείσα ανισότητα γράφεται διαδοχικά:

$$2\ln x < 2 + g(x^2) \Leftrightarrow \ln x^2 < 2 + g(x^2) \Leftrightarrow \ln x^2 - g(x^2) < 2 \quad (3)$$

και αφού η f διέρχεται από το σημείο Α(1, 2) θα έχουμε $f(1) = 2$ και έτσι η (3) γίνεται $f(x^2) < f(1)$ και αφού η f είναι γν. αύξουσα θα είναι $x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ ή $x \in (-1, 1)$. Όμως $x > 0$ και επομένως $x \in (0, 1)$

Θέμα Γ

Γ1. $f(x-y)=f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ για $x=y=0$ θα έχουμε:

$$f(0)=[f(0)]^2 \Leftrightarrow [f(0)]^2-f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)(f(0)-1)=0$$

Επομένως $f(0)=0$ ή $f(0)=1$.

Γ2. Αφού η f διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα έχουμε $f(0)=0$. Αν θέσουμε όπου $y=0$ τότε έχουμε:

$$f(x-0)=f(x)f(0) \Leftrightarrow f(x)=0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Γ3.

Γ3.1 Αφού $f(0)\neq 0$ θα είναι $f(0)=1$ και αν θέσουμε $y=x$ τότε έχουμε:

$$f(x-x)=f(x)f(x) \Leftrightarrow f(0)=[f(x)]^2 \Leftrightarrow [f(x)]^2=1 \quad \text{και άρα } f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Γ3.2 Θέτουμε όπου x το $\frac{x}{2}$ και έχουμε:

$$f\left(x-\frac{x}{2}\right)=f(x)f\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)f\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right)[1-f(x)]=0$$

και επειδή $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θα είναι $f(x)-1=0$ ή $f(x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θέμα Δ

Δ1. Θέτοντας όπου x το $-x$ στην δοθείσα σχέση θα έχουμε (αφού η f είναι περιττή):

$|-x|\,f(x)\geq(-x)^{2\nu+1} \Leftrightarrow -f(x)|x|\geq -x^{2\nu+1} \Leftrightarrow f(x)|x|\leq x^{2\nu+1}$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και από τη δοθείσα σχέση έχουμε $f(x)|x|\geq x^{2\nu+1}$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα από τις (1) και (2) θά έχουμε $f(x)|x|=x^{2\nu+1}$ και άρα:

Για $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε $f(x) = \dfrac{x^{2\nu+1}}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}^*$ ενώ για $x = 0$ και επειδή η f είναι περιττή θα είναι

$f(0) = 0$.

Επομένως η ζητούμενη συνάρτηση είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{2\nu+1}}{|x|}, & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$$

Δ2. Θέτοντας όπου x το $-x$ στην δοθείσα σχέση θα έχουμε:

$$g(x) - xg(-x) = -x \text{ (I)}$$

και από την δοθείσα σχέση έχουμε:

$$g(-x) - xg(x) = x \text{ (II).}$$

Λύνοντας το σύστημα των (I) και (II) θα έχουμε $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Το πεδίο ορισμού της gof είναι το σύνολο $\{x \in D_f \ / \ f(x) \in D_g\} = \mathbb{R}^*$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ θα έχουμε:

Αν $x > 0 \Rightarrow f(x) = x^{2\nu}$, τότε $(gof)(x) = \dfrac{x^{4\nu} - x^{2\nu}}{x^{4\nu} + 1}$ ενώ,

Αν $x < 0 \Rightarrow f(x) = -x^{2\nu}$, τότε $(gof)(x) = \dfrac{x^{4\nu} + x^{2\nu}}{x^{4\nu} + 1}$

Επομένως :

$$(gof)(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{4\nu} - x^{2\nu}}{x^{4\nu} + 1}, & \alpha\nu\ x > 0 \\ \dfrac{x^{4\nu} + x^{2\nu}}{x^{4\nu} + 1}, & \alpha\nu x < 0 \end{cases}$$

Πανελλήνιες Εξετάσεις 2014-2015

Μαθηματικός Περιηγητής