ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΓΙΑ ΤΕΚΝΑ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ

09/09/2014

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Απόδειξη θεωρήματος στη σελίδα 253 στο σχολικό βιβλίο.

Α2. Ορισμός στη σελίδα 141 στο σχολικό βιβλίο.

Α3. α) Σωστό , β) Σωστό , γ) Λάθος, δ) Λάθος, ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε δοαδοχικά και ισοδύναμα:

$$|z+4| = 2|z+1| \Leftrightarrow |z+4|^2 = 4|z+1|^2 \Leftrightarrow (z+4)(\overline{z}+4) = 4(z+1)(\overline{z}+1)$$
$$\Leftrightarrow z\overline{z} + 4z + 4\overline{z} + 16 = 4z\overline{z} + 4z + 4\overline{z} + 4 \Leftrightarrow z\overline{z} = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$$

Άρα , ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z οι οποίοι ικανοποιούν τη δοθείσα σχέση είναι κύκλος με κέντρο το $0(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

Β2. Αν $z_1 = x > 0$ $(x \in \mathbb{R})$ και $z_2 = yi$ $(y \in \mathbb{R})$ με $y < 0$, επειδή οιεικόνες τους είναι σημεία του κύκλου του ερωτήματος Β1 δηλαδή ικανοποιούν τη σχέση $x^2 + y^2 = 4$, θα είναι:
$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$ $(\alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota)$ και $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2$ $(\alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota)$ ή $y = -2$.
Συνεπώς $z_1 = 2$ και $z_2 = -2i$.

Β3. Έχουμε: $A = (z_1 - z_2)^{20} - (z_1 + z_2)^{20} = (2+2i)^{20} - (2-2i)^{20} = 2^{20}[(1+i)^{20} - (1-i)^{20}]$ (1)

Τώρα:

$$(1+i)^{20} = [(1+i)^2]^{10} = (1-2i-1)^{10} = (-2i)^{10} = 2^{10}i^{10} = -2^{10}$$
$$(1-i)^{20} = [(1-i)^2]^{10} = (1+2i-1)^{10} = (2i)^{10} = 2^{10}i^{10} = -2^{10}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε:

$$A = 2^{20}[-2^{10} + 2^{10}] = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $f(x) = \dfrac{\ln x}{x},\ x > 0$ έχουμε:

Κατακόρυφη ασύμπτωτη : $x = 0$ $(\acute{\alpha}\xi o\nu\alpha\varsigma\, y'y)$ αφού:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Πλάγιες και οριζόντιες: $y = \lambda x + \beta$, με

$\lambda = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$ και

$\beta = \lim_{x\to\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Άρα θα έχει οριζόντια ασύμπτωτη , την $y = 0$ $(\acute{\alpha}\xi o\nu\alpha\varsigma x'x)$.

Έτσι η $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$ έχει ασύμπτωτες τους άξονες $x'x$ και $y'y$

Γ2. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$ είναι παραγωγίσιμη $(0,\infty)$ (ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $x > 0$.Έχουμε:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ και άρα:

- $0 < x < e \Rightarrow \ln x < \ln e \Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow 1 - \ln x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, e]$ και
- $x > e \Rightarrow \ln x > \ln e \Rightarrow \ln x > 1 \Rightarrow 1 - \ln x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e,\infty)$.

Η f έχει μέγιστο (ολικό) στο σημείο $x_1 = e$ το $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ και άρα για κάθε $x > 0$, θα είναι: $f(x) \le f(e) \Leftrightarrow f(x) \le \frac{1}{e} \Leftrightarrow ef(x) \le 1,\ x > 0$

Γ3. Το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$E = \int_{\frac{1}{e}}^{1} |f(x)| dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\ln x}{x} dx = -I$

$I = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\ln x}{x} dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x (\ln x)' dx = [\ln^2 x]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\ln x}{x} dx \Leftrightarrow I = -1 - I \Leftrightarrow 2I = -1 \Leftrightarrow I = -\frac{1}{2}$

$E = \frac{1}{2}\ \tau.\mu$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $f'(x) = 2^x \ln 2 + 2x - 2,\ x \in \mathbb{R}$ και $f''(x) == 2^x \ln^2 2 + 2 > 0,\ x \in \mathbb{R}$ και άρα η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω (είναι κυρτή).

Η f έχει προφανώς ρίζες τις $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$, αφού $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$.

Αν υποθέσουμε ότι έχει και άλλη ρίζα , έστω ξ $(0<\xi<1)$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας, αφού τα ίδια ισχύουν και όταν $\xi>1$ ή $\xi<0$). Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle στα διαστήματα $[0,\xi]$ και $[\xi,1]$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη σε αυτά θα έχουμε ότι υπάρχει $\xi_1\in(0,\xi): f'(\xi_1)=0$ και αντίστοιχα υπάρχει $\xi_2\in(\xi,1): f'(\xi_2)=0$. Εφαρμόζοντας ξανά το θεώρημα του Rolle για την f' (αφού είναι δύο φορές παραγωγίσιμη) στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$ θα έχουμε $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2): f''(\xi_3)=0$, δηλαδή $2^{\xi_3}\ln^2\xi_3+2=0$, που είναι άτοπο.Άρα η f έχει μοναδικές ρίζες τις 0 και 1.

Δ2. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(x_0)=0$ με $x_0\in(0,1)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle για την f στο διάστημα $[0,1]$ έχουμε: $f(0)=f(1)=0$, άρα υπάρχει $x_0\in(0,1)$, τέτοιος ώστε $f'(x_0)=0$. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1) , αφού η f είναι κυρτή, και άρα δεν μπορεί να έχει άλλη ρίζα. Άρα το $x_0\in(0,1)$ με $f'(x_0)=0$ είναι μοναδικό.

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και δεν έχει άλλη ρίζα, εκτός από τις $x_1=0$ και $x_2=1$. Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(0,1)$. Επειδή

$f(\frac{1}{2})=2^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}-1-1=\sqrt{2}-\frac{7}{4}=\frac{4\sqrt{2}-7}{4}<0$, θα είναι $f(x)<0$, για κάθε $x\in(0,1)$.

Η συνάρτηση $F(x)=\int_1^x f(t)dt-x+1, x\in(0,1)$ έχει προφανή ρίζα το 1, αφού $F(1)=0$.
Η $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ (αφού η f είναι συνεχής στο $(0,1]$) με
$F'(x)=f(x)-1<0,\ x\in(0,1)$ (αφού $f(x)<0$, $x\in(0,1)$) και άρα η F είναι γνησίως μονότονη (άρα και 1-1), δηλαδή έχει μοναδική ρίζα το 1.