Γενικά Επαναληπτικά Θέματα

Κεφάλαια: 3ο, 4ο, 5ο

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

11 Απριλίου 2014

Στόχος του παρόντος φυλλαδίου είναι να αποτελέσει μια αφορμή για επανάληψη πριν τις εξετάσεις. Να προσπαθήσετε να λύσετε τα παρακάτω θέματα, εφόσον πρώτα έχετε μελετήσει τη θεωρία και τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου και των σημειώσεων σας.
Σας εύχομαι καλό διάβασμα και... καλό Πάσχα!

Μη είναι βασιλικήν ατραπόν επί γεωμετρίαν. (Ευκλείδης)

Θέμα 1ο. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ, παίρνουμε στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΔ=ΑΕ και Μ το μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

(α) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα,

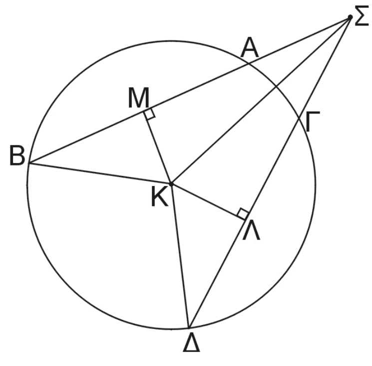
(β) το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές,

(γ) να αποδείξετε ότι η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ.

Θέμα 2ο. Δίνεται κύκλος κέντρου Κ και ένα σημείο Σ στο εξωτερικό του. Από το Σ φέρνουμε δύο τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ τέτοιες ώστε ΣΒ=ΣΔ. Αν ΚΜ$\perp$ΣΒ και ΚΛ$\perp$ΣΔ να αποδείξετε ότι:

(α) τα τρίγωνα ΣΚΒ και ΣΚΔ είναι ίσα και ΣΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Sigma}$.

(β) ΚΜ=ΚΛ και ΣΑ=ΣΓ.



Θέμα 3ο. Έστω ΑΒΓΔ τετράγωνο. Κατασκευάζουμε στο εσωτερικό του τετραγώνου ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ. Έστω ΔΛ κάθετη στην ΑΕ. Να αποδείξετε ότι:

(α) τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ είναι ίσα,

(β) να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου ΕΔΓ,

(γ) ΑΒ=2ΔΛ

Θέμα 4ο. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΑΔ και $\widehat{A} = 2\widehat{\Delta}$.

(α) Να υπολογιστούν οι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

(β) Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) Να δείξετε ότι η γωνία $\widehat{\Delta \mathrm{E} \Gamma} = 90^0$.

Θέμα 5ο. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο το σημείο Ο. Στην προέκταση της ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε ΒΕ=ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

(α) οι ευθείες ΓΕ και ΒΔ είναι παράλληλες,

(β) $\mathrm{BO} = \frac{1}{2}\mathrm{E}\Gamma$,

(γ) η γωνία $\widehat{\mathrm{A}\Gamma\mathrm{E}}$ είναι ορθή.

Θέμα 6ο. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Αν Δ και Ε τα συμμετρικά των κορυφών Β και Γ ως προς τα μέσα Μ και Ν, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

(α) τα σημεία Α, Δ και Ε είναι συνευθειακά,

(β) ΔΕ=2ΒΓ.

Θέμα 7ο. Δίνεται παραλληλόγραμμο $\mathrm{AB}\Gamma\Delta$ και Ε το μέσο της $\mathrm{B}\Gamma$.
Έστω ότι η προέκταση της $\Delta\mathrm{E}$ τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

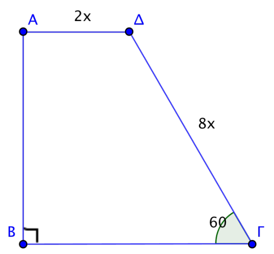
(α) τα τρίγωνα $\Delta\mathrm{E}\Gamma$ και BEZ είναι ίσα,

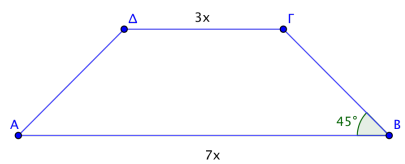
(β) το τετράπλευρο $\Delta\mathrm{BZ}\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο,

(γ) $\mathrm{AZ} = 2\Delta\Gamma$.

Θέμα 8ο. **(α)** Να υπολογίσετε τη διάμεσο του παρακάτω τραπεζίου.

(β) Να υπολογίσετε το ύψος του παρακάτω ισοσκελούς τραπεζίου.





Θέμα 9ο. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB}\Gamma$ με $\widehat{\mathrm{A}} = 90^o$ και $\widehat{\mathrm{B}} = 60^o$. Έστω ότι το $\mathrm{A}\Delta$ είναι το ύψος που φέρουμε από την κορυφή Α και τα Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{EZ} = \mathrm{AB}$,

(β) τα τρίγωνα EAZ και $\mathrm{A\Delta B}$ είναι ίσα,

(γ) το τρίγωνο $\mathrm{AE\Delta}$ είναι ισόπλευρο.

Θέμα 10ο. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρνουμε τις ΑΚ και ΓΛ κάθετες στη διαγώνιο ΒΔ.

(α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.

(β) Αν Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΜΚ=ΛΝ.

(γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΜΚ και ΛΝΓ είναι ίσα.

Θέμα 11ο. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ$\parallel$ΓΔ και ΑΒ$<$ΓΔ) η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει τη διάμεσο του ΕΖ στο Η και τη ΔΓ στο εσωτερικό της σημείο Θ. Να αποδείξετε ότι:

(α) το τρίγωνο ΓΘΒ είναι ισοσκελές,

(β) το Η είναι μέσο του ΒΘ,

(γ) η ΓΗ είναι κάθετη στην ΒΘ.

Θέμα 12ο. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και προεκτείνουμε αυτό προς το μέρος του Δ κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

(β) Αν Μ το μέσο του ΒΕ, να αποδείξετε ότι ΜΔ=$\dfrac{\mathrm{AB}}{2}$.

(γ) Αν Λ είναι το μέσο του ΑΒ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΛΔΜΒ είναι ρόμβος.

(δ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΜΒΑ είναι τραπέζιο.

Θέμα 13ο. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ$<$ΑΓ προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ και την διάμεσο ΑΜ κατά τμήματα ΔΕ=ΑΔ και ΜΝ=ΑΜ . Να αποδείξετε ότι:

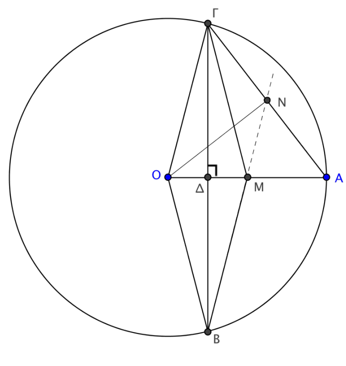
(α) ΔΜ$\parallel$ΕΝ,

(β) το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές,

(γ) το ΑΒΝΓ είναι παραλληλόγραμμο,

(δ) το ΒΕΝΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Θέμα 14ο. Έστω κύκλος με κέντρο Ο, ακτίνα ΟΑ και Μ το μέσο της ΟΑ. Από το μέσο Δ του ΟΜ φέρνουμε την κάθετη στο ΟΜ, η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:



(α) το τετράπλευρο ΒΟΓΜ είναι ρόμβος,

(β) η προέκταση του ΒΜ διέρχεται από το μέσο Ν της ΑΓ,

(γ) το τρίγωνο ΑΝΟ είναι ορθογώνιο.

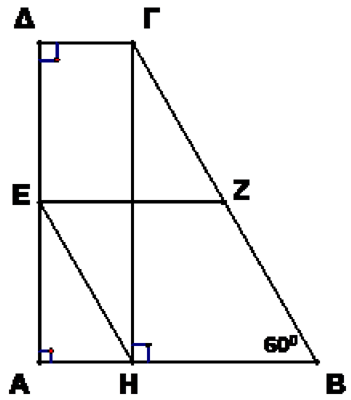
Θέμα 15ο. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) με $\widehat{B} = 60^o$. Φέρνουμε τη διχοτόμο Βx της γωνίας $\widehat{B}$ και την ΓΔ⊥Βx.

(α) Να δείξετε ότι ΑΒ=ΓΔ.

(β) Αν Ε το σημείο τομής των ΑΓ και Βx, το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

(γ) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Θέμα 16ο. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με γωνίες $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^0$, ΑΒ>ΓΔ, ΒΓ=4ΓΔ και $\widehat{B}$=60^0. Φέρνουμε την ΓΗ κάθετη στην ΑΒ (Η πάνω στην ΑΒ) και θεωρούμε τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών του ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

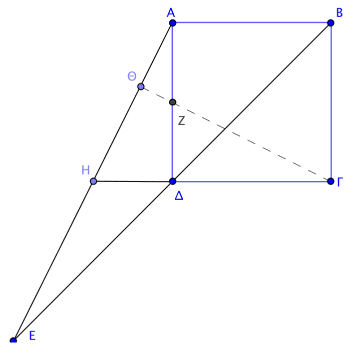


(α) το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο,

(β) ΗΒ=ΕΖ,

(γ) το τετράπλευρο ΕΗΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Θέμα 17ο. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την ΒΔ κατά τμήμα ΔΕ=ΒΔ και έστω Η το σημείο τομής της ΓΔ με την ΑΕ. Αν Ζ το μέσο της ΑΔ και οι ΓΖ και ΑΕ τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:



(α) ΔΗ=$\dfrac{AB}{2}$,

(β) τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΓΔΖ είναι ίσα,

(γ) ΓΘ⊥ΑΕ.