

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ Γ' ΓΕΝΙΚΗΣ

Θ Ε Ω Ρ Ι Α

ΘΕΜΑ 1

- A1.** Πότε μια συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο; **Μονάδες: 8**
- A2.** Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής; **Μονάδες: 7**
- A3.** Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις, να γράψετε στο φύλλο των απαντήσεών σας τη λέξη **Σωστό** ή τη λέξη **Λάθος**, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
1. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν όρια στο x_0 πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ με $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$ **Μονάδες: 2**
 2. Η παράγωγος της $f(x) = \eta\mu x$ είναι η $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$. **Μονάδες: 2**
 3. Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i μίας μεταβλητής X , με το μέγεθος n του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i . Δηλαδή $f_i = \frac{\nu_i}{n}$, $i=1,2,3,\dots,K$ με $K \leq n$. **Μονάδες: 2**
 4. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. **Μονάδες: 2**
 5. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες τότε ισχύει: $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **Μονάδες: 2**

ΘΕΜΑ 2

- A. α.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι ίση με 1. Δηλαδή $(x)'=1$. **(μονάδες 10)**
- β.** Τι ονομάζουμε διάμεσο (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων. **(μονάδες 5)**
- B.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις
- α.** Ισχύει $(x^n)' = nx^{n-1}$, όπου n φυσικός αριθμός.
- β.** Για $x > 0$, είναι $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- γ.** Ισχύει $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
- δ.** Αν $\bar{x} > 0$, $CV = \frac{\bar{s}}{\bar{x}}$
- ε.** Ένα δείγμα είναι ομοιογενές όταν ο συντελεστής μεταβολής είναι μικρότερος ή ίσος του 0,1. **(μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ 3

1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι η $f'(x) = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 10**
2. Πότε δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα; **Μονάδες 5**
3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
 - α. Η παράγωγος της $f(x) = \eta\mu x$ είναι $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$.
 - β. Για την παράγωγο του γινομένου δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων ισχύει ο κανόνας $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
 - γ. Η διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων είναι πάντα μία από αυτές τις παρατηρήσεις.
 - δ. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει πάντα $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
 - ε. Για την σχετική συχνότητα f_i των τιμών x_i ενός δείγματος μεγέθους n ισχύει $0 \leq f_i \leq 1$.

Μονάδες 5x2=10**ΘΕΜΑ 4**

- A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$ **Μονάδες 10**
- A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- i.** Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής αν υπάρχει ένα $x_0 \in A$ έτσι ώστε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
 - ii.** $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$
 - iii.** Ισχύει $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$
 - iv.** Ισχύει $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$.
 - v.** Διάμεσος(δ)ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση αν το n είναι περιττός **Μονάδες 10**
- A3.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

ΘΕΜΑ 5

- A.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $(x)' = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (μονάδες 15)
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση: (μονάδες 10)
- α)** Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g ισχύει: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
- β)** Ισχύει $(\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .
- γ)** Το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων f_i των τιμών x_i μιας μεταβλητής είναι ίσο με **100**.
- δ)** Η διάμεσος ενός δείγματος είναι μέτρο διασποράς.
- ε)** Το εύρος ενός δείγματος τιμών θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς.

Θέμα 6

- A.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. (Μονάδες 03)
- B.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι :

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \quad (\text{Μονάδες 08})$$

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
- α.** Αν A και B δύο σύνολα με $A \subseteq B$, τότε ισχύει $A \cap B = A$
- β.** Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$.
- γ.** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$, όπου l_1, l_2 πραγματικοί αριθμοί και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$, τότε ισχύει η σχέση $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$.
- δ.** Ισχύει η σχέση $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$
- ε.** Η μέση τιμή και η διάμεσος ενός συνόλου n παρατηρήσεων είναι μέτρα διασποράς.

(5x2 = 10 μονάδες)

Δ. Να συμπληρώσετε τους παρακάτω κανόνες παραγώγισης

$$\alpha. (f(x) \cdot g(x))' = \dots\dots\dots \beta. \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \dots\dots\dots \quad (\text{Μονάδες } 04)$$

ΘΕΜΑ 7

A1. Ας υποθέσουμε ότι x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n . Τι ονομάζεται συχνότητα n_i της τιμής x_i ; (μον.4)

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής; (μον.4)

A3. Να αποδείξετε ότι $(x)' = 1$ (μον.9)

A4. Να συμπληρώσετε τις ισότητες

$$(c)' = \dots\dots\dots, (e^x)' = \dots\dots\dots, (\ln x)' = \dots\dots\dots \quad (\text{μον.5})$$

$$(\sqrt{x})' = \dots\dots\dots, (x^n)' = \dots\dots\dots$$

A5. Η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ το 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτή και το πολύ το 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτή. Σωστό ή Λάθος; (μον.3)

ΘΕΜΑ 8

A1. Αν A, B δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι ισχύει:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. **Μονάδες 10**

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 5**

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Δύο ενδεχόμενα A, B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα όταν $A \cup B = \emptyset$.

β. Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών οι αθροιστικές συχνότητες N_i εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής X_i .

γ. Η διάμεσος μιας κανονικής κατανομής συμπίπτει με τη μέση τιμή της.

δ. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο $x_0 \in \mathbb{R}$ όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$$

ε. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής στο A , αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. **Μονάδες 5x2=10**

Θέμα 9

A) Να κάνετε την αντιστοίχιση στον παρακάτω πίνακα μεταξύ της κάθε συνάρτησης και της πρώτης παραγώγου της. μονάδες 15

Στήλη Α $f(x)$	Στήλη Β $f'(x)$
$f(x) = c$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = x^p$	$f'(x) = -\eta\mu x$
$f(x) = \eta\mu x$	$f'(x) = 0$
$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = p \cdot x^{p-1}$

B) Να γράψετε τους τύπους που προκύπτουν από τους κανόνες παραγώγισης για τις παρακάτω συναρτήσεις: μονάδες 10

i) $(f(x) + g(x))' =$ ii) $(f(x) \cdot g(x))' =$ iii) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$

ΘΕΜΑ 10

A. Απαντήστε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος). Όπου συμπληρώσατε Λ, βάλτε δίπλα ακριβώς τη σωστή ισότητα.

$(c)' = 1$	
$(x)' = 1$	
$(x^p)' = px^p$	
$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	
$(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$	
$(e^x)' = e^x$	
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	

B. Να αποδείξετε την παράγωγο της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$.

Μονάδες 15+10

ΘΕΜΑ 11

A) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$ είναι $f'(x)=0$ [Μονάδες 5]

B) Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις της στήλης I με τις παραγώγους τους στη στήλη II

ΣΤΗΛΗ I (Συνάρτηση f)	ΣΤΗΛΗ II (Παράγωγος f')
1. e^x	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
2. $\sin x$	$\frac{1}{x}$
3 \sqrt{x}	e^x
4. $\ln x$	$-\eta \mu x$
5. $\eta \mu x$	$\Sigma \nu \nu x$

[Μονάδες 10]

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας της λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

- α) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται στην απεικόνιση στατιστικής έρευνας μόνο για ποιοτικές μεταβλητές
- β) Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και $x_1 \in A$. Αν $f(x) \geq f(x_1)$, για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 , τότε το $f(x_1)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
- γ) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- δ) Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής X μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός.

[Μονάδες 10]

ΘΕΜΑ 13

A. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω να

αποδείξετε ότι : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(Μονάδες 10)

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό ή Λάθος.

α. Η μέση τιμή είναι μέτρο θέσης.

β. Αν A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε ισχύει

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

γ. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

δ. Η διάμεσος ενός δείγματος n παρατηρήσεων διατεταγμένων κατά αύξουσα σειρά, ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση όταν το πλήθος n είναι άρτιο.

ε. Αν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in \Delta$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε η f έχει έξι ακρότατα στο Δ .

(Μονάδες 05)

Γ. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις και να συμπληρώσετε καθεμιά από αυτές έτσι ώστε να είναι αληθής:

α. $P(A') \dots 1 - P(A)$

β. αν $A \subseteq B$ τότε $P(B) \dots P(A)$.

γ. $(c \cdot f(x))' = \dots\dots\dots$

δ. $(f(x) \cdot g(x))' = \dots\dots\dots$

ε. $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \dots\dots\dots$ με $g(x) \neq 0$,

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 14

A1. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A, A' ισχύει: $P(A') = 1 - P(A)$ Μονάδες 10

A2. Τι ονομάζουμε διάμεσο (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

(i). Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο στην περίπτωση ποσοτικής μεταβλητής.

(ii). Το εύρος R είναι μέτρο θέσης

(iii). Αν ο συντελεστής μεταβολής CV είναι μικρότερος του 50% τότε το δείγμα είναι ομοιογενές

(iv). Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε ισχύει πάντα: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(v). Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε ισχύει πάντα: $P(A \cap B) \leq P(A)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 15

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μον. 10)

A2. Να γράψετε τον ορισμό της διακύμανσης ή διασποράς (s^2) των παρατηρήσεων t_1, t_2, \dots, t_n μίας μεταβλητής X .

(Μον. 5)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Ισχύει $(\sin x)' = -\cos x$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

β) Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g ισχύει: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x)'$

γ) Για την σχετική συχνότητα f_i των τιμών x_i ενός δείγματος μεγέθους n ισχύει $0 \leq f_i \leq 1$ για $i=1, 2, \dots, k$ με $k \leq n$.

δ) Ισχύει $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$ όπου p ρητός αριθμός.

ε) Αν $\bar{x} > 0$ τότε $CV = \frac{s}{\bar{x}}$

(Μον. $5 \times 2 = 10$)

ΘΕΜΑ 16

A) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$. (15 μονάδες)

B) Να χαρακτηρίσετε με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις:

i) Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση και για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα. (2 μονάδες)

ii) Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση και $x_0 \in A$ τότε η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

(2 μονάδες)

iii) Για κάθε ζεύγος f, g παραγωγίσιμων συναρτήσεων ισχύει : $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(2 μονάδες)

iv) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $(cf(x))' = cf'(x)$ όπου c ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός .

(2 μονάδες)

v) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

(2 μονάδες)

Θέμα 17

A. Έστω A και B δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω .

α) Πότε τα ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα; (2,5 μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι $P(A') = 1 - P(A)$. (7,5 μονάδες)

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Ο συντελεστής μεταβολής ενός δείγματος τιμών μιας οποιασδήποτε μεταβλητής X ορίζεται από το λόγο $CV = \frac{\bar{x}}{s}$, όπου \bar{x} η μέση τιμή και $s \neq 0$ η τυπική απόκλιση.

(5 μονάδες)

β) Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και A' το συμπλήρωμα του ενδεχομένου A . Τότε:

β1) Αν $A' \subseteq B$, τότε $P(A) + P(B) < 1$. (5 μονάδες)

β2) Αν $P(A) = P(A')$, τότε $2 \cdot P(A) = P(\Omega)$. (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 18

- A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
(Μονάδες 7)
- A2.** Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής μίας μεταβλητής x αν $\bar{x} < 0$ και πως αν $\bar{x} > 0$; (Μονάδες 4)
- A3.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ ; (Μονάδες 4)
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη
- a) Ισχύει $(\sin x)' = \eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - b) Η διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων είναι μέτρο θέσης
 - c) Αν f και g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο \mathbb{R} , τότε ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
 - d) Στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ όπου \bar{x} είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και s η τυπική τους απόκλιση
 - e) Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) > P(B)$ (Μονάδες 2X5)

ΘΕΜΑ 19

- A1.** Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
 $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$. (Μονάδες 12)
- A2.** Να γράψετε πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής. (Μονάδες 5)
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό ή Λάθος.
- α)** Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας CV ενός δείγματος είναι μεγαλύτερος του 10% τότε το δείγμα χαρακτηρίζεται ως ομοιογενές.
- β)** Η τυπική απόκλιση ενός δείγματος είναι μέτρο διασποράς.
- γ)** Αν A και B είναι δυο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε ισχύει:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- δ)** Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 20

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x)=x$, είναι η $f'(x)=1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 10**

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 5**

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \emptyset$.

β. Η διάμεσος \mathcal{D} ενός δείγματος \mathcal{N} παρατηρήσεων, t_1, t_2, \dots, t_n είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές.

γ. Ισχύει ότι $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο \mathbb{R}

δ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\eta \mu x)' = -\sigma \upsilon \nu x$.

ε. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ 21

A1. Πότε μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

A2. Αν f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα A και c πραγματική σταθερά, να αποδείξετε ότι

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \text{ για κάθε } x \in A.$$

A3. Να γράψετε στο φύλλο της Στήλης Α και δίπλα σε Στήλης Β που αντιστοιχεί

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
A. $f(x) = x^2$	1. $f'(x) = \sigma \upsilon \nu x$
B. $f(x) = \eta \mu x$	2. $f'(x) = e^x$
Γ. $f(x) = e^x$	3. $f'(x) = \frac{1}{x}$
Δ. $f(x) = \ln x, x > 0$	4. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Ε. $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$	5. $f'(x) = 2x$

των απαντήσεών σας τα γράμματα κάθε γράμμα, τον αριθμό της στη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$. (5 μονάδες)
- β) Να υπολογίσετε τα $f(1)$ και $f(3)$. (5 μονάδες)
- γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$. (7 μονάδες)
- δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. (8 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 - x - 2$

- Γ1.** Να βρείτε το a ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(2,12)$
Μονάδες 9
- Γ2.** Αν $a=2$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$
Μονάδες 8
- Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2,12)$
Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x+3}{2-x}$.

- Δ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . **Μονάδες 8**
- Δ2.** Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{-5}{(x+3)(x-2)}$. **Μονάδες 8**
- Δ3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι δεν έχει ακρότατο.
Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 6$

- α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f . (5 μονάδες)
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία. (10 μονάδες)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τα ακρότατα καθώς και να βρεθούν οι τιμές των ακρότατων. 10 μονάδες

ΘΕΜΑ 5^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 5$, για $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1), f(0), f(2)$ Μονάδες: 6
- β. Βρείτε την παράγωγο της f . Μονάδες: 6
- γ. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. Μονάδες: 8
- δ. Να βρεθούν τα ακρότατα της f . Μονάδες: 5

ΘΕΜΑ 6^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x$.

- α. Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της f . (μονάδες 9)
- β. Να δείξετε ότι: $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$. (μονάδες 9)
- γ. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f στο $x_0 = 0$. (μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 7^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 1, x \in \mathbb{R}$

- B1. Να βρείτε την $f'(x)$ (μον.4)
- B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα (μον.7)
- B3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο της $M(-1, f(-1))$ (μον.7)
- B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x^2 - x}$ (μον.7)

ΘΕΜΑ 8^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 3x + 2$.

- B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- B2. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}$.
- B3. Να βρεθεί η $f'(x)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x) - x \cdot f'(x) = 2 - x^2$.
- B4. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **ΜΟΝΑΔΕΣ: 4 + 7 + (3 + 4) + 7 = 25**

ΘΕΜΑ 9^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x+3}{2-x}$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{-5}{(x+3)(x-2)}$.

Μονάδες 8

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι δεν έχει ακρότατο.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 10^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$.

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 7

B2. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

Μονάδες 9

B3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -2} f'(x)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 11^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \alpha \cdot x^3 + \beta x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, η καμπύλη της οποίας

διέρχεται από τα σημεία $A(1,0)$ και $B(2,5)$.

α. Να αποδείξετε ότι : $\alpha = 2$ και $\beta = -3$.

(Μονάδες 09)

β. Για $\alpha = 2$ και $\beta = -3$, να βρείτε την $f'(x)$.

(Μονάδες 08)

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 12^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ με $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .

(Μονάδες 06)

β. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$

(Μονάδες 06)

γ. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία. **Μονάδες 07)**

δ. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ 13°

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού. (5 μονάδες)

ii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα. (10 μονάδες)

iii) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(1,4)$. (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 14ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και η παράγωγός της (Μονάδες 10)

2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της (Μονάδες 12)

3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f έχει ολικά ακρότατα (Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 15°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$, $x \in \mathbb{R}$.

A. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. **Μονάδες 5**

B. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 7}{x}$. **Μονάδες 5**

Γ. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$. **Μονάδες 5**

Δ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 16°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

B1. Να βρείτε την $f'(x)$ (μον.4)

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα (μον.7)

B3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο της $M(-1, f(-1))$ (μον.7)

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x^2 - x}$ (μον.7)

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Η βαθμολογία 50 μαθητών στο μάθημα των μαθηματικών δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Βαθμοί x_i	Συχνότητες v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Σχετ.Συχν. τοίς εκατό $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετ. Συχν. F_i	Αθροιστική Σχετ. Συχν. τοίς εκατό $F_i\%$
11	10					
12	4					
13	6					
15						
17	12					
19	4					
20	2					
Σύνολο	50					

α. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

Μονάδες: 18

β. i) Πόσοι μαθητές πήραν βαθμό 13 και πάνω;

Μονάδες: 2

ii) Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που πήραν βαθμό 17 και κάτω;

Μονάδες:3

γ. Τι ποσοστό των μαθητών πήραν βαθμό 15;

Μονάδες :2

Η βαθμολογία των γραπτών 10 μαθητών στα μαθηματικά είναι :14,15,13,13,16,15,15,16,15,18.Να βρείτε :

α. τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

(μονάδες 8)

β. την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβλητότητας.

(μονάδες 10)

γ. να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

(μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2^ο

Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα κατανομής συχνοτήτων των τιμών x_i (με αιτιολόγηση) που αντιστοιχούν στο πλήθος των επισκέψεων στην ιστοσελίδα του Υπουργείου Παιδείας το σχολικό έτος 2011-12 ενός δείγματος 50 μαθητών της Γ' Λυκείου.

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
10					30
20			12		

30	10				
40					
Αθροίσματα	50				

1. Πόσοι μαθητές επισκέφθηκαν τουλάχιστον 20 φορές την ιστοσελίδα;
2. Ποιο ποσοστό των μαθητών αυτών επισκέφθηκε το πολύ 30 φορές την ιστοσελίδα;

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται ο πίνακας:

x_i	v_i	f_i	$f_i \%$	N_i	F_i	$F_i \%$	$x_i \cdot v_i$
1	4						
2	5						
3	8						
4	3						
Σύνολο							

- α)** Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα αφού πρώτα τον μεταφέρετε στο γραπτό σας. (μονάδες 12)
- β)** Να βρείτε τη μέση τιμή των δεδομένων του ίδιου πίνακα. (μονάδες 8)
- γ)** Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες του 2. (μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

Οι βαθμοί της μικρής Χουάνας στον έλεγχο του Β' τριμήνου, στα 10 μαθήματα που εξετάζονται γραπτά, ήταν: 15, 17, 14, 18, 15, 15, 17, 17, 16, 16.

- α)** Να βρείτε τη μέση τιμή των παραπάνω βαθμών. (μονάδες 8)
- β)** Να βρείτε τη διάμεσο τιμή των παραπάνω βαθμών. (μονάδες 8)
- γ)** Αν η διακύμανση των παραπάνω τιμών s^2 , είναι ίση με 1,4 να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV. Χαρακτηρίζεται το δείγμα των βαθμών ως ομοιογενές; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

(Δίνεται ότι: $\sqrt{1,4} \approx 1,2$)

(μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 5^ο

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ώρες μελέτης των 50 μαθητών της Α τάξης ενός Λυκείου στην διάρκεια μιας εβδομάδας είναι:

Ώρες x_i	Συχνότητα v_i	$f_i\%$	N_i
2	8		
3	v_2		
4	12		
5	15		
6	6		
Σύνολο			

B1. Να υπολογίσετε τη συχνότητα v_2 .

Μονάδες 5

B2. Αν $v_2=9$ να συμπληρώσετε τον πίνακα .

Μονάδες 5

B3. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των ωρών μελέτης των μαθητών.

Μονάδες 8

B4. Να υπολογίσετε το πλήθος των μαθητών που μελέτησαν το πολύ 4 ώρες. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 6^ο

Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον επόμενο πίνακα συχνοτήτων και στη συνέχεια να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν σε κάθε μια από τις πέντε στήλες

x_i	v_i	f_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	2	0,1			
2			8		
3	8				
4					
ΣΥΝΟΛΟ		1		100	

ΘΕΜΑ 7^ο

Μια μεταβλητή X παίρνει τις τιμές : 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 .

Δ1. Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{X} .

Μονάδες 8

Δ2. Να βρείτε τη διάμεσο d των παραπάνω παρατηρήσεων.

Μονάδες 7

Δ3. Να βρείτε τη διακύμανση s^2 των παραπάνω παρατηρήσεων.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 8^ο

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές x_i μιας μεταβλητής X , και κάποιες από τις

αντίστοιχες συχνότητες. Η σχετική συχνότητα της τιμής x_4 είναι $f_4 = 0,4$.

Η συχνότητα v_1 είναι το τοπικό **ελάχιστο** και η μέση τιμή \bar{x} , των παραπάνω τιμών x_i

το τοπικό **μέγιστο** της συνάρτησης: $f(x) = 2 \cdot x^3 - 3x^2 + 6 - \bar{x}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι το μέγεθος N του δείγματος, είναι: $N = 15$. **(Μονάδες 05)**

β. Να αποδείξετε ότι $v_1 = 2$ και $\bar{x} = 3$. **(Μονάδες 09)**

γ. Να αποδείξετε ότι η συχνότητα v_3 είναι: $v_3 = 5$. **(Μονάδες 05)**

δ. Να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος. **(Μονάδες 06)**

x_i	v_i
1	
2	2
3	
4	6
Σύνολο	v

ΘΕΜΑ 9^ο

Οι παρακάτω τιμές αντιπροσωπεύουν το πλήθος των επιβατών που μπορεί να μεταφέρει καθένα από 20 διαφορετικά αυτοκίνητα.

5, 4, 4, 6, 4, 3, 5, 4, 5, 3, 4, 3, 5, 6, 4, 5, 5, 3, 4, 4

Γ1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα

(μον.9)

Μεταβλητή x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα τοις εκατό $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθροιστική σχετική συχνότητα τοις εκατό $F_i\%$	$x_i v_i$
3					
4					
5					
6					
Σύνολο					

Γ2. Να βρείτε τη διάμεσο των παραπάνω τιμών **(μον.6)**

Γ3. Να βρείτε τη μέση τιμή των παραπάνω τιμών **(μον.5)**

Γ4. Να βρείτε το ποσοστό των αυτοκινήτων του δείγματος που μπορεί να μεταφέρει το πολύ 5 επιβάτες.
(μον.5)

ΘΕΜΑ 10^ο

Δ1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα (μον.10)

Μεταβλητή x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
$x_1=1$			100			
$x_2=3$				0,5		
$x_3=5$	250	0,5				
Σύνολο						

Δ2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της f (μον.7)

Δ3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση της f (μον.8)

(Δίνεται ότι $s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{(\sum_{i=1}^k x_i v_i)^2}{v} \right\}$)

ΘΕΜΑ 11^ο

Η εξέταση 10 μαθητών στο μάθημα της Στατιστικής έδωσε τους εξής βαθμούς:

11 , 3 , 7 , 5 , 16 , 14 , 11 , 10 , 11 , 12

α) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έγραψε κάτω από 10. (5 μονάδες)

β) Να βρείτε πόσοι μαθητές έγραψαν τουλάχιστον 14. (5 μονάδες)

γ) Να βρείτε τη διάμεσο. (7 μονάδες)

δ) Να βρείτε τη μέση τιμη. (8 μονάδες)

ΘΕΜΑ 12^ο

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων που παριστάνει τον αριθμό των παιδιών ενός δείγματος 40 οικογενειών.

X_i	v_i	f_i	N_i	F_i
1	4			
2	16			
3				
4		0,2		
Σύνολο				

B1. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα. **Μονάδες 13**

B2. Να βρείτε τον αριθμό των οικογενειών που έχουν τουλάχιστον δύο παιδιά . **Μονάδες 6**

B3. Να υπολογίσετε το ποσοστό των οικογενειών που έχουν το πολύ τρία παιδιά . **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 13^ο

Μια τάξη έχει 18 μαθητές. Η μέση τιμή του ύψους των μαθητών είναι 172cm.

A) Ποιο θα είναι το μέσο ύψος της τάξης αν προστεθούν άλλοι δύο μαθητές με ύψος 152 και 158cm αντίστοιχα; **μονάδες 13**

B) Πόσο θα γίνει το μέσο ύψος της τάξης αν φύγει ένας μαθητής με ύψος 186cm; **μονάδες 12**

ΘΕΜΑ 14^ο

Τα αποτελέσματα των εκλογών σε ένα εκλογικό τμήμα δίνονται από τον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα:

Κόμμα x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i
A		0,25
B	150	0,50
Γ		0,10
Δ	45	
Σύνολο		

- α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα. μονάδες 18
- β) Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα των συχνοτήτων v_i μονάδες 7

ΘΕΜΑ 15

Η επίδοση ενός μαθητή της Γ λυκείου σε πέντε μαθήματα είναι: 12, 10, 16, 18, 14.

A. Να βρείτε τη διάμεσο.

B. Να βρείτε τη μέση επίδοση.

Γ. Αν τα μαθήματα είχαν συντελεστές στάθμισης 2, 3, 1, 1 και 3 αντίστοιχα, ποια θα ήταν

η μέση επίδοση; Σε ποια μαθήματα έπρεπε να δώσει ιδιαίτερη προσοχή ο μαθητής;

ΘΕΜΑ 16

Εξετάσαμε ένα δείγμα 20 φοιτητών ως προς τη βαθμολογία τους στο μάθημα της Αστρονομίας και τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα

Βαθμολογία x_i	Αριθμός φοιτητών v_i	$f_i\%$	N_i	$x_i v_i$	x_i^2	$x_i^2 v_i$
2	6					
3	7					
5	3					
8	4					
ΣΥΝΟΛΟ			////////		////	

A) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε [Μονάδες 12]

B) Να δειχθεί ότι η μέση βαθμολογία των φοιτητών είναι $\bar{x} = 4$ [Μονάδες 4]

Γ) Να βρεθεί η τυπική απόκλιση s του δείγματος

$$\left(\text{Δίνεται } s^2 = \frac{1}{v} \cdot \left\{ \sum x_i^2 \cdot v_i - \frac{(\sum x_i \cdot v_i)^2}{v} \right\} \right) \quad [\text{Μονάδες 9}]$$

ΘΕΜΑ 17

Σε μία στατιστική έρευνα παίρνουμε τις παρακάτω παρατηρήσεις που αφορούν σε μία μεταβλητή X :

$$1, \alpha, 5, 2, \beta, 7, 5, \gamma, 2, 1$$

Δίνεται επιπλέον η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^3 - 8$.

A) Να βρεθούν τα α, β, γ αν γνωρίζουμε ότι $\alpha = f(2)$, $\beta = f'(1)$ και το $\gamma = \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + 12]$

[Μονάδες 9]

B) Για $\alpha=0$ και $\beta=3$ και $\gamma=4$ να βρείτε:

1)Τη μέση τιμή του παραπάνω δείγματος των 10 παρατηρήσεων

2)Τη διάμεσό του [Μονάδες 16]

ΘΕΜΑ 18

Στον διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X και κάποιες συχνότητες, αθροιστικές συχνότητες, σχετικές συχνότητες και αθροιστικές σχετικές συχνότητες.

Γ1. Να συμπληρωθεί ο πίνακας**Μονάδες 9****Γ2.** Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση**Μονάδες 9****Γ3.** Είναι το δείγμα ομοιογενές;**Μονάδες 7**

x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
100				0,1		
200	15	20				
300			0,4			
400						
ΣΥΝ						

ΘΕΜΑ 19

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων που παριστάνει την κατανομή του αριθμού των μαθημάτων που άριστευσαν ενός δείγματος φοιτητών.

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_{i\%}$	$F_{i\%}$
1	8					
2			14			
3	4	0,2				
4						
Σύνολα			//////////	//////////		//////////

Γ1. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε (με αιτιολόγηση) τον παραπάνω πίνακα.**(Μον. 15)**

Γ2. Να βρείτε τον αριθμό και το ποσοστό των φοιτητών που άριστευσαν σε περισσότερα από δύο μαθήματα.
(Μον. 5)

ΘΕΜΑ 20

Οι τιμές μιας μεταβλητής X και οι αντίστοιχες συχνότητες δίνονται στον παρακάτω ελλιπή πίνακα :

x_i	v_i
2	3
6	v_2
10	v_3
14	6
18	2
Σύνολο	20

Δ1. Αν είναι γνωστό ότι $\bar{X} = 9,8$ να υπολογίσετε τις συχνότητες v_2 και v_3 . **(Μον.15)**

Δ2. . Να υπολογίσετε την διάμεσο δ . **(Μον. 5)**

Δ3. Να σχεδιάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων. **(Μον. 5)**

ΘΕΜΑ 21

Ρωτήθηκαν 10 οικογένειες για τον αριθμό των παιδιών που έχουν και οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

Αριθμός παιδιών x_i	Συχνότητα v_i	Σχετ. Συχνότητα f_i	Σχετ. Συχνότητα $f_i \%$	Αθρ. Συχνότητα N_i
0	α			
1	$\alpha+2$			
2	$\alpha+1$			
3	$\alpha-1$			
Σύνολο				

1. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$. (Μον.7)
2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αν $\alpha = 2$. (Μον.10)
3. Να βρείτε την μέση τιμή των παιδιών που έχουν οι 10 οικογένειες. (Μον.8)

ΘΕΜΑ 22

Δίνονται οι αριθμοί 5, 3, 6, 5, 4, 5, 3, 8, 6, 5.

Να υπολογίσετε:

i) Τη μέση τιμή \bar{x} (5 μονάδες)

ii) Τη διασπορά των αριθμών s^2 (5 μονάδες)

iii) Τη διάμεσο δ (5 μονάδες)

iv) Το εύρος R (5 μονάδες)

v) Το συντελεστή μεταβολής CV (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 23

Η εξέταση 10 μαθητών στο μάθημα της Στατιστικής έδωσε τους εξής βαθμούς:

11 3 7 5 16 14 11 10 11 12

Να βρείτε:

- α)** τη διάμεσο, (5 μονάδες)
β) τη μέση τιμή, (5 μονάδες)
γ) το εύρος και (5 μονάδες)
δ) τη διακύμανση της παραπάνω βαθμολογίας. (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 24

Οι αποστάσεις (σε km) των 26 κοινοτήτων ενός νομού από το πλησιέστερο νοσοκομείο είναι :

5, 10, 8, 8, 13, 10, 4, 2, 0, 16, 5, 15, 9, 6, 4, 7, 5, 4, 6, 7, 7, 5, 8, 10, 3, 9

1) Να κατασκευάσετε πίνακα

α) Απόλυτων συχνοτήτων (Μονάδες 7)

β) Αθροιστικών συχνοτήτων των αποστάσεων (Μονάδες 5)

2) Πόσες κοινότητες απέχουν από το νοσοκομείο περισσότερο από 10 km; (Μονάδες 5)

3) Πόσες κοινότητες απέχουν από το νοσοκομείο τουλάχιστον 5 km και το πολύ 8 km; (Μονάδες 4)

4) Να βρεθεί το ποσοστό των κοινοτήτων που απέχουν από το νοσοκομείο ακριβώς 8 km; (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 25

Εξετάστηκε ένα δείγμα 80 οικογενειών ως προς τον αριθμό των παιδιών τους και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

Αριθμός παιδιών (x_i)	Αριθμός (n_i) οικογενειών	f_i	$f_i \%$	$n_i x_i$	N_i
0	12				
1	20				
2	32				

3	12				
4	4				
Σύνολο	80				

A. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα, αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα σας. **Μονάδες 12**

B. Να υπολογίσετε:

i) Τη μέση τιμή. **Μονάδες 8**

ii) Τη διάμεσο της κατανομής. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 26

Ρωτήσαμε τους 40 μαθητές μιας τάξης για τον αριθμό των αδελφών τους. Οι απαντήσεις που πήραμε φαίνονται στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων.

Αριθμός αδελφών x_i	Συχνότητα n_i	Αθροιστική Συχν. N_i	Σχετική Συχν. f_i	Σχετική Συχν. $f_i\%$	Αθρ. Σχετ. Συχν. F_i	Αθρ. Σχετ. Συχν. $F_i\%$
0	8					
1	12					
2	10					
3	8					
4	2					
Σύνολο		-			-	-

B1. Να αντιγράψετε τον πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε. **(Μονάδες 10)**

B2. Να υπολογίσετε την μέση τιμή \bar{x} του παραπάνω δείγματος. **(Μονάδες 8)**

B3. Να βρείτε το πλήθος και το ποσοστό των μαθητών που έχουν τουλάχιστον ένα αλλά το πολύ τρία αδέρφια.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 27

Το μέσο ύψος ενός δείγματος 40 μαθητών της Γ' τάξης ενός λυκείου είναι $\bar{x} = 170\text{cm}$. Η κατανομή των μαθητών ως προς το ύψος είναι κανονική και το 34% των μαθητών έχουν ύψος από 170cm έως 175cm.

Γ1. Να αποδείξετε ότι τυπική απόκλιση s του ύψους των μαθητών είναι 5.

(Μονάδες 8)

Γ2. Να υπολογίσετε το ποσοστό και το πλήθος των μαθητών που έχουν ύψος από 160cm έως 180cm.

(Μονάδες 8)

Γ3. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του ύψους των μαθητών και να χαρακτηρίσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 28

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων ενός δείγματος, μιας ποσοτικής μεταβλητής X .

Τιμές x_i	Συχνότητες v_i	$v_i \cdot x_i$	Αθροιστικές Συχνότητες N_i	Σχετικές Συχνότητες f_i	Σχετικές Συχνότητες $f_i \%$
1	36				
2	60				
3					
4	30				
Σύνολο	200				

Γ1. Να υπολογίσετε τη συχνότητα v_3 της τιμής $x_3 = 3$.

Γ2. Να μεταφέρετε συμπληρωμένο τον παραπάνω πίνακα στην κόλλα σας.

Γ3. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο του παραπάνω δείγματος.

Γ4. Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες του 2.

Μονάδες 5 + 7 + 8 + 5 = 25

ΘΕΜΑ 29

α) Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον βαθμό που πήραν 50 φοιτητές σε ένα μάθημα. Αφού αντιγράψετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας να τον συμπληρώσετε.

(μονάδες 15)

Βαθμός(x_i)	Συχνότητα(v_i)	Σχετική Συχνότητα (f_i)	Αθροιστική Συχνότητα(N_i)	Σχετική Συχνότητα(%)
4	12			
5	8			

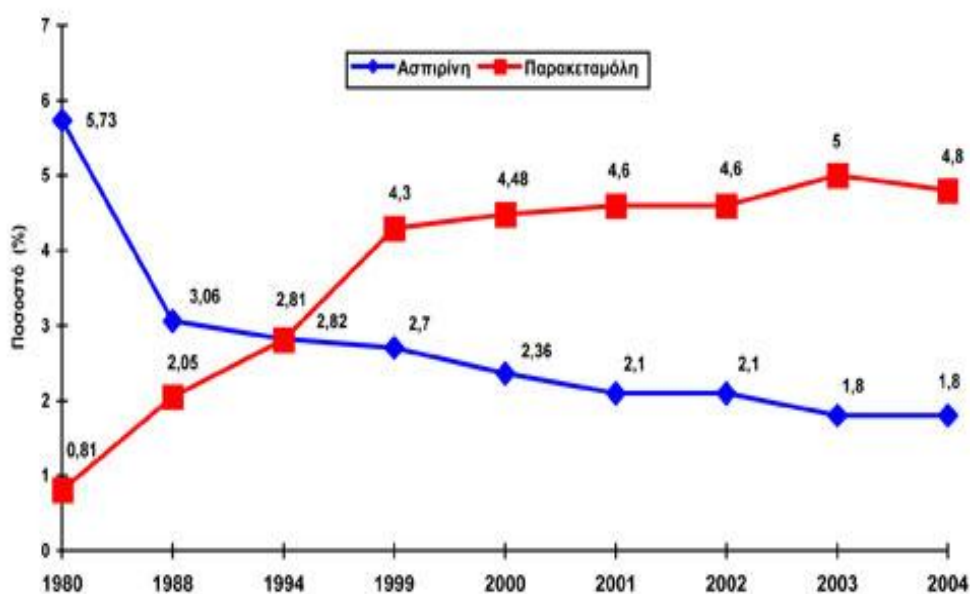
6	16			
8	4			
9	10			
σύνολο	50			

β) Πόσοι φοιτητές έγραψαν πάνω από 5; (μονάδες 5)

γ) Ποιο είναι το ποσοστό των φοιτητών που έγραψαν από 8 και πάνω; (μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 30

Στο παρακάτω χρονόγραμμα περιγράφεται το ποσοστό των δηλητηριάσεων από την χρήση παυσίπονων φαρμάκων που περιέχουν ασπιρίνη ή παρακεταμόλη την περίοδο 1980 – 2004 στην Ελλάδα .



Σχήμα 15. Δηλητηριάσεις με παυσίπονα φάρμακα

Πηγή: Υπουργείο Υγείας

Γ1. Να βρείτε το έτος στο οποίο είχαμε:

- Το μικρότερο ποσοστό δηλητηριάσεων από παρακεταμόλη. Να γράψετε το αντίστοιχο ποσοστό.
- Το μικρότερο ποσοστό δηλητηριάσεων από ασπιρίνη. Να γράψετε το αντίστοιχο ποσοστό.

Γ2. Ποιο έτος είχαμε το ίδιο ποσοστό δηλητηριάσεων από ασπιρίνη ή παρακεταμόλη;

Γ3. Αν το 2003 δηλητηριάστηκαν συνολικά 1000 πολίτες σε όλη την Ελλάδα από διάφορα αίτια, και το ποσοστό αυτών που δηλητηριάστηκαν από ασπιρίνη όπως φαίνεται στο χρονόγραμμα είναι 1.8%, τότε ποιο το πλήθος αυτών που δηλητηριάστηκαν από ασπιρίνη;

ΜΟΝΑΔΕΣ: (7 + 7) + 4 + 7 = 25

ΘΕΜΑ 31

Στον παρακάτω πίνακα περιγράφονται οι βαθμολογίες 100 φοιτητών του Μαθηματικού τμήματος του Α.Π.Θ στο μάθημα της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Βαθμολογία	Πλήθος Φοιτητών n_i	Ποσοστό Φοιτητών $f_i\%$	Αθροιστικές Συχνότητες N_i	Αθροιστικές Σχετικές Συχνότητες $F_i\%$
2	12			
3	8			
4	35			
5	20			
6	5			
7	10			
8	6			
9	4			
Σύνολα	100			

Δ1. Αφού μεταφέρετε τον πίνακα στο φύλλο των απαντήσεών σας, να τον συμπληρώσετε.

Δ2. Να βρείτε το πλήθος των φοιτητών που κόπηκε στο μάθημα (δηλαδή που έγραψε βαθμό κάτω από 5.

Δ3. Να βρείτε το πλήθος των φοιτητών που αρίστευσε (δηλαδή που έγραψε τουλάχιστον 8

Δ4. Ποιο το ποσοστό των φοιτητών που έγραψε βαθμό τουλάχιστον 5 και το πολύ 7;

Δ5. Να βρείτε τον μέσο όρο των βαθμολογιών των γραπτών των 100 φοιτητών.

ΜΟΝΑΔΕΣ: $5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$

ΘΕΜΑ 32

Ο Γιάννης μπορεί να πάει στην δουλειά του από το σπίτι του επιλέγοντας ανάμεσα στο αστικό λεωφορείο της γραμμής Α ή το τρόλεϊ της γραμμής Β. Ο χρόνος που χρειάζεται και στις δυο περιπτώσεις ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Το αστικό λεωφορείο της γραμμής Α έχει μέσο χρόνο διαδρομής 20 λεπτά με τυπική απόκλιση 3 λεπτά ενώ το τρόλεϊ της γραμμής Β έχει μέσο χρόνο διαδρομής 21 λεπτά με τυπική απόκλιση 2 λεπτά. Ποιο από τα δυο μέσα πρέπει να επιλέξει ο Γιάννης για να φτάσει στο σπίτι του

ι) το λιγότερο σε 23 λεπτά. **ΜΟΝΑΔΕΣ : 13**

ιι) το αργότερο σε 17 λεπτά. **ΜΟΝΑΔΕΣ : 12**

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΜΑ 1

Αν για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματοχώρου Ω έχουμε $P(A)=1/2$, $P(B)=1/3$ και $P(A \cap B)=1/6$, να βρείτε τις πιθανότητες :

A. Να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A και B .

B. Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B .

Γ. Να πραγματοποιηθεί μόνο το A .

Δ. Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B .

Μονάδες 5+5+7+8

ΘΕΜΑ 2

Έστω τα ενδεχόμενα A , B ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$ και $P(A \cap B) = 0,1$.

Να αποδείξετε ότι :

α. $P(A \cup B) = 0,6$ (Μονάδες 09)

β. $P(A') = 0,7$ (Μονάδες 08)

γ. $P(A - B) = 0,2$ (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 3

Αν A , B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , με $P(A') = 0,4$, $P(B) = 0,3$ και $P(A \cup B) = 0,7$, να υπολογίσετε:

B1. Το $P(A)$ και το $P(A \cap B)$

Μονάδες 9

B2. Το $P(B - A)$ και το $P[(A - B) \cup (B - A)]$

Μονάδες 9

B3. Το $P(A \cup B')$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου να μαθαίνει ο μαθητής Γαλλικά είναι $\frac{3n}{n^2+1}$, να μαθαίνει Ισπανικά είναι $\frac{n+2}{n^2+1}$ και να μαθαίνει και τις δύο γλώσσες είναι $\frac{n+1}{n^2+1}$

Δ1. Αν γνωρίζουμε ότι οι μαθητές του σχολείου μαθαίνουν υποχρεωτικά τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες να αποδείξετε ότι $n=3$ (Μονάδες 8)

Δ2. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μια από τις δύο γλώσσες

Μονάδες 8

Δ3. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες είναι 32 να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 5

Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

α) να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς; (8 μονάδες)

β) να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς; (8 μονάδες)

γ) να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς; (9 μονάδες)

ΘΕΜΑ 6

Έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει :

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B') = \frac{1}{3} \text{ και } P(B - A) = \frac{1}{2}.$$

A. Να βρείτε την πιθανότητα $P(B)$. **Μονάδες 5**

B. Να βρείτε την πιθανότητα $P(A \cap B)$. **Μονάδες 7**

Γ. Να βρείτε την πιθανότητα $P(A \cup B)$. **Μονάδες 7**

Δ. Αν ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και το πλήθος των στοιχείων του συνόλου A είναι $N(A) = 8$ να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω . **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 7

Σε ένα Λύκειο, το 61% των μαθητών χρησιμοποιεί για ηλεκτρονική αλληλογραφία το “Gmail”, το 53% χρησιμοποιεί το “Yahoo” ενώ το 93% χρησιμοποιεί μία τουλάχιστον από τις δύο υπηρεσίες.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή αυτού του Λυκείου και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: ο μαθητής χρησιμοποιεί το “Gmail”.

B: ο μαθητής χρησιμοποιεί το “Yahoo”.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- Δ1.** Ο μαθητής να μην χρησιμοποιεί το “Yahoo”.
- Δ2.** Ο μαθητής να χρησιμοποιεί και τις δύο αυτές υπηρεσίες ηλεκτρονικής αλληλογραφίας.
- Δ3.** Ο μαθητής να χρησιμοποιεί μόνο μία από τις δύο αυτές υπηρεσίες.
- Δ4.** Ο μαθητής να χρησιμοποιεί μία το πολύ από τις δύο αυτές υπηρεσίες ηλεκτρονικής αλληλογραφίας.

Μονάδες 6 + 7 + 7 + 5 = 25

ΘΕΜΑ 8

Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται στο κάπνισμα και τα προβλήματα υγείας 200 ατόμων:

	ΚΑΠΝΙΣΤΕΣ	ΜΗ ΚΑΠΝΙΣΤΕΣ	ΣΥΝΟΛΟ
Με προβλήματα υγείας	20	20	40
Χωρίς προβλήματα υγείας	30	130	160
ΣΥΝΟΛΟ	50	150	200

Επιλέγουμε ένα άτομο. Να βρείτε την πιθανότητα:

- i) Να είναι καπνιστής. (5 μονάδες)
- ii) Να έχει πρόβλημα υγείας. (5 μονάδες)
- iii) Να είναι καπνιστής χωρίς πρόβλημα υγείας. (5 μονάδες)
- iv) Να είναι καπνιστής με πρόβλημα υγείας. (5 μονάδες)
- v) Να μην έχει πρόβλημα υγείας. (5 μονάδες)

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2}$.

1. Ποιο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f ;
2. Ποια η μέση τιμή και η διάμεσος των παρατηρήσεων $f(2)$, $f(6)$, $f(27)$, $f(11)$, $f(3)$.
3. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της $f(x)$, δηλαδή η $f'(x)$.
4. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 1}{x - 3}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται δείγμα με συντελεστή μεταβλητότητας 0,3 ,μέση τιμή 10 και τυπική απόκλιση S καθώς και η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + Sx^2 - 8x + 1$, όπου S η παραπάνω τυπική απόκλιση. Να βρείτε :

- | | |
|--------------------------|--------------|
| α. την τυπική απόκλιση | (μονάδες 7) |
| β. την μονοτονία της f | (μονάδες 10) |
| γ. τα ακρότατα της f . | (μονάδες 8) |

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = \frac{(x^2 - 1) \cdot \lambda^2 - 4x^2 + 4}{x - 1}$

και το πείραμα τύχης της ρίψης ενός ζαριού με δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Αν $\lambda \in \Omega$ τότε:

α. Να αποδείξετε ότι : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \cdot (\lambda^2 - 4)$ (Μονάδες 07)

β. Να προσδιορίσετε τα στοιχεία των παρακάτω ενδεχομένων

$$A = \left\{ \lambda \in \Omega / \lim_{x \rightarrow 1} f(x) > 0 \right\} \quad \text{(Μονάδες 05)}$$

$$B = \left\{ \lambda \in \Omega / \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 6\lambda \right\} \quad \text{(Μονάδες 05)}$$

Να βρείτε την πιθανότητα :

ι. Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B . (Μονάδες 04)

ii. Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A.

(Μονάδες 04)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το δείγμα των παρατηρήσεων $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$ και τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$.

Γ1. Να υπολογίσετε τη διάμεσο του παραπάνω δείγματος.

Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Γ4. Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \cup B = \Omega$, $P(A) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $P(B)$ η τιμή της διαμέσου που υπολογίσατε στο Γ1, να υπολογίσετε την $P(A \cap B)$.

Μονάδες 6+5+6+8=25

ΘΕΜΑ 5

Έστω A το ενδεχόμενο ο μαθητής να είναι άριστος στα Μαθηματικά και B το ενδεχόμενο να είναι άριστος στα Αρχαία, με $P(A), P(B)$ οι αντίστοιχες πιθανότητες των παραπάνω ενδεχομένων.

Αν η πιθανότητα να είναι άριστος μόνο στα Μαθηματικά είναι $\frac{3}{10}$ και οι πιθανότητες $P(B), P(A \cap B)$

βρίσκονται στο σύνολο $\Psi = \left\{ \frac{1}{2}, \alpha, \frac{4}{3} \right\}$, όπου $\alpha = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1}{x^2+3x-4}$. Να βρείτε:

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{2}{5}$.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου A.

Μονάδες 5

Δ3. Την πιθανότητα να είναι καλός μόνο σε ένα από τα 2 μαθήματα.

Μονάδες 5

Δ4. Την πιθανότητα να είναι καλός το πολύ σε ένα από τα 2 μαθήματα.

Μονάδες 5

Δ5. Να μην είναι καλός σε κανένα από τα παραπάνω μαθήματα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 6

Έστω A,B δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω και η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - xP(A') - P(A)}{x-1}, & x \neq 1 \\ \frac{3}{2} - P(B) & , x = 1 \end{cases}$

η οποία είναι συνεχής στο $x_0=1$.

α. Να αποδείξετε ότι : $P(A) + P(B) = \frac{1}{2}$ **(Μονάδες 13).**

β. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των αριθμών : $P(A), P(B), P(A \cup B), P(A \cap B)$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 7

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ' τάξης ενός Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

Βάρος σε κιλά [-)	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
45-55	0,2
55-65	0,5
65-75	
75-85	

α) Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση. (8 μονάδες)

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων. (9 μονάδες)

γ) Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή.

γ1) Να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά. (4 μονάδες)

γ2) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών. (4 μονάδες)

ΘΕΜΑ 8

Έστω X μια ποσοτική μεταβλητή ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n και x_1, x_2, \dots, x_n οι παρατηρήσεις με μέση τιμή \bar{x} και τυπική απόκλιση s. Αν η εφαιπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = 2x^3 - sx^2 - 3x\bar{x} + 17$ στο σημείο της A(2,-3) είναι παράλληλη στον $x'x$

1. Να βρείτε την μέση τιμή \bar{x} και την τυπική απόκλιση s (Μονάδες 7)
2. Έστω $\bar{x}=4$ και $s=3$
 - 2.1. Αν y_1, y_2, \dots, y_n είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις x_1, x_2, \dots, x_n με το -2 και μετά προσθέσουμε το 1, να εξετάσετε αν το καινούριο δείγμα είναι ομοιογενές (Μονάδες 9)
 - 2.2. Αν η κατανομή είναι περίπου κανονική και 20 παρατηρήσεις έχουν τιμή τουλάχιστον 10, να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$ και ο δειγματικός χώρος Ω που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Θεωρούμε A και B δυο ενδεχόμενα του Ω για τα οποία ισχύουν:

$$P(A-B) = \frac{1}{12}, P(A) = 8 \lim_{x \rightarrow 2} f(x), P(B) = \frac{7}{12}$$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$.

(Μονάδες 8)

Δ2. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

(Μονάδες 9)

Δ3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να συμβεί ένα μόνο από τα A και B .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 10sx^2 + \bar{x} \cdot x + 11$, $x \in R$, όπου \bar{x} η μέση τιμή x και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων ενός δείγματος.

Αν η εφαπτόμενη της καμπύλης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$ είναι παράλληλη στην $\varepsilon : y = 2011$ τότε :

A) Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f . **ΜΟΝΑΔΕΣ : 5**

B) Να δείξετε ότι το δείγμα είναι ομοιογενές. **ΜΟΝΑΔΕΣ : 5**

Γ) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο. **ΜΟΝΑΔΕΣ : 5**

Δ) Αν η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 1 τότε:

i) Να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων του δείγματος .

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο A

ΜΟΝΑΔΕΣ : 5+5

OK