

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θ Ε Ω Ρ Ι Α

ΘΕΜΑ 1

- A1.** Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. **Μονάδες 10**
- A2.** Να διατυπώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. **Μονάδες 5**
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$
- β.** Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ αντίρροπα διανύσματα τότε ισχύει $-\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.
- γ.** Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται πάντα από τον τύπο $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \det \left(\vec{AB}, \vec{A\Gamma} \right)$
- δ.** Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι η $C: xx_1 + yy_1 + \rho^2 = 0$.
- ε.** Αν O σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα \vec{AB} ισχύει $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ 2

- A1.** Τι ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων \vec{a} και \vec{b} ; (Μονάδες 5)
- A2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ , είναι:
 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$. (Μονάδες 10)
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεών σας τη λέξη **Σωστό** ή τη λέξη **Λάθος**, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Αν $A(x_1, \psi_1)$ και $B(x_2, \psi_2)$ δύο σημεία του επιπέδου, τότε οι συντεταγμένες του μέσου M του AB είναι

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ και } \psi_M = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}.$$

2. Η παραβολή $\psi^2 = 2\rho x$ έχει εστία την $E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right)$.

3. Σε κάθε έλλειψη με εστιακή απόσταση 2γ και σταθερό άθροισμα 2α ισχύει ότι: $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$.

4. Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $Ax + B\psi + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ και $B \neq 0$.

5. Το εμβαδό ενός τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται πάντοτε από τη σχέση $E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} \det\left(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}\right)$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3

1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ϵ του κύκλου $C : x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$. **Μονάδες 10**

2. Τι ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. **Μονάδες 5**

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0.$$

- β. Αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε οπωσδήποτε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

- γ. Για το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\nu}$ ισχύει: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\nu}| \cdot \cos \theta$.

- δ. Η ευθεία με εξίσωση $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$,

είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

- ε. Αν $A^2 + B^2 - 4 \cdot \Gamma = 0$ η εξίσωση $x^2 + y^2 + A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ παριστάνει ένα μόνο σημείο.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ 4

- A. Δίνονται τα σημεία $A(x_1, \psi_1)$ και $B(x_2, \psi_2)$ Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες x, ψ του μέσου $M(x, \psi)$

του ευθυγράμμου τμήματος AB είναι: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $\psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$.

(μονάδες 15)

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες, γράφοντας στο

γραπτό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$.

β) Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ τότε $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

γ) Στην παραβολή $\psi^2 = 2px$ η εστία είναι $E(-\frac{p}{2}, 0)$ και η διευθετούσα $\delta: x = \frac{p}{2}$

δ) Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ είναι παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$

ε) Το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{AB} & \vec{A\Gamma} \end{pmatrix} \right|$ (μονάδες $5 \times 2 = 10$)

ΘΕΜΑ 5^ο

A. Δίνονται τα διάνυσμα $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

(Μονάδες 9)

B. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 8)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Για κάθε διάνυσμα \vec{a} και $\vec{\beta}$ ισχύει: $\vec{a} = \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{\beta}|$

β. Έστω $\vec{a} \nearrow \nearrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$.

γ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο αν ισχύει $A^2 + B^2 + 4\Gamma > 0$

δ. Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-A, B)$ είναι παράλληλο στην ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$, $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 6°

- A. Πως ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$; (μονάδες 9)
- B. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$. Να εκφράσετε (χωρίς απόδειξη) το $\sin(\vec{a}, \vec{\beta})$ συναρτήσει των συντεταγμένων των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$. (μονάδες 8)
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α) Το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων είναι πάντα θετικός αριθμός.
- β) Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,A)$
- γ) Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $x^2=1-y^2$
- δ) Οι ευθείες $y=\frac{1}{\lambda}x$, $\lambda \neq 0$ και $y=\lambda^2x-1$ είναι κάθετες για $\lambda=-1$ (μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 7

- A. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$. Να δείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενό τους είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους, δηλαδή: $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ Μονάδες 16
- B. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.
- α. Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ δεν παριστάνει ευθεία όταν
- β. Αν $B \neq 0$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι ίσος με
- γ. Η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, είναι παράλληλη προς το διάνυσμα και κάθετη προς το διάνυσμα

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 8

A1. Αν $\vec{a}=(x_1, y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$ και $\vec{\gamma}=(x_3, y_3)$ να αποδείξετε ότι: $\vec{a} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$.

Μονάδες 10

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.

2. Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή.

3. Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση: $yy_1 = p(x + x_1)$.

4. Μια παραβολή με κορυφή το $O(0,0)$ και διευθετούσα $y = -\frac{p}{2}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$.

5. Δύο ελλείψεις λέγονται όμοιες όταν έχουν τις ίδιες εστίες. **Μονάδες 10**

A3. Τι λέγεται έλλειψη με εστίες τα σημεία E' και E ενός επιπέδου; **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 9

A) Έστω $Ox\psi$ ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ .

Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου αυτού και να αποδείξετε γιατί είναι αυτή που γράψατε η εξίσωσή του.

(Μονάδες 10)

B) Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$ **(Μονάδες 5)**

Γ) Να χαρακτηρίσετε τα παρακάτω σαν **σωστό** ή **λάθος**

i) $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$ ii) $|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ iii) $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$ iv) $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{\beta}$

όπου \vec{a} και $\vec{\beta}$ δυο τυχαία διανύσματα του επιπέδου. **(Μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ 10

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ , είναι η $x^2 + y^2 = \rho^2$.

(12 μόρια)

B. Τι ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων, \vec{a} και $\vec{\beta}$; **(5 μόρια)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την έκφραση «σωστό» ή «λάθος».

α. Ισχύει $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$.

β. Το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \right|$.

γ. Αν $\vec{\alpha} \nearrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.

δ. Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, A)$ είναι παράλληλο στην ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$. **(8 μόρια)**

ΘΕΜΑ 11

A. Να γράψετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

B. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνθήκη από τη στήλη A με τη σωστή ιδιότητα από τη στήλη B.

1.	$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$	A.	$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
2.	$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$	B.	$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} $
3.	$\vec{\alpha} \nearrow \vec{\beta}$	Γ.	$\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$
4.	$\vec{\alpha} \nearrow \vec{\beta}$	Δ.	$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} $
5.	$(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$	Ε.	$2 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} $

Μεταφέρετε στην κόλλα αναφοράς τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο.

1.	2.	3.	4.	5.

Γ. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ).

1. Αν $|\vec{a}| = |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$

2. Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$.

3. Η εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ με $\rho \in \mathbb{R}$ είναι πάντοτε εξίσωση κύκλου.

4. Η εξίσωση $x^2 - y^2 = 1$ παριστάνει ισοσκελή υπερβολή.

5. Τα σημεία $M(x, y)$ με $x = \beta \sigma \nu \theta$, $y = \alpha \eta \mu \theta$ με $\theta \in [0, 2\pi)$, ανήκουν στην έλλειψη

$$C: \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1.$$

Μονάδες 5+10+10

ΘΕΜΑ 12

A) Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ αποδείξτε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, όπου λ_1 και λ_2

είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ εφόσον αυτά δεν είναι παράλληλα στον άξονα $y'y$.

[Μονάδες 10]

B) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την

λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ομόρροπα διανύσματα τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

β) Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$

γ) Μία ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον $x'x$ έχει εξίσωση $y = y_0$.

δ) Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$ έχει εστία $E(\frac{p}{2}, 0)$

ε) Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $2a > 2\gamma$ είναι

$$\frac{x^2}{\beta^2} - \frac{y^2}{\alpha^2} = 1 \text{ με } \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \quad [\text{Μονάδες 10}]$$

Γ) Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης με εστίες τα σταθερά σημεία E' και E του επιπέδου. [Μονάδες 5]

ΘΕΜΑ 13

A. Δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

(Μονάδες 05)

B. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου

που σχηματίζουν γωνία θ , να αποδείξετε ότι: $\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

(Μονάδες 12)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στη κόλλα σας τη

λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

β. Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$ είναι παράλληλο στην ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$.

γ. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει

εξίσωση $xy + x_1y_1 = \rho^2$

δ. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει: Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ τότε $\vec{\alpha} = 0$ ή $\vec{\beta} = 0$. (Μονάδες 4X1=4)

ΘΕΜΑ 14

A1. Δίνονται τα σημεία $A(x_1, \psi_1)$ και $B(x_2, \psi_2)$. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες x, ψ του μέσου $M(x, \psi)$ το ευθυγράμμου τμήματος AB είναι: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και: $\psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$ **Μονάδες 10**

A2. Ποιός τύπος εκφράζει την απόσταση $d(M_0, \varepsilon)$ του σημείου $M_0(x_0, \psi_0)$ από την ευθεία $\varepsilon: Ax + B\psi + \Gamma = 0$; **Μονάδες 5**

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

(i). Ισχύει: $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$

(ii). Αν $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ και $\lambda \in \mathbf{R}$ τότε οπωσδήποτε: $\vec{a} = \vec{\beta}$

(iii). Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, \psi_1)$ είναι: $xx_1 + y\psi_1 + \rho^2 = 0$

(iv). Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή

(v). Το σημείο $(1, -1)$ ανήκει στον κύκλο: $x^2 + y^2 = 1$ **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 15

A1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ είναι η $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ **Μονάδες 7**

A2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας τη λέξη "**Σωστό**" ή "**Λάθος**", δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $B \neq 0$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι: $-\frac{A}{B}$.

β. Αν $A^2 + B^2 - \Gamma > 0$, τότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο.

γ. Ο άξονας $y' y$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής: $y^2 = 2px$.

δ. Το εμβαδό τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})|$. **Μονάδες 10**

A3. Στη **στήλη Α** δίνονται οι εξισώσεις κωνικών τομών και στη **στήλη Β** οι εξισώσεις των εφαπτομένων των αντίστοιχων κωνικών τομών, στο σημείο επαφής (x_1, y_1) .

Να αντιστοιχίσετε κάθε γράμμα της **στήλης Α** στο σωστό αριθμό της **στήλης Β**.

	Στήλη Α		Στήλη Β
α.	$x^2 + y^2 = \rho^2$	1.	$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$
β.	$y^2 = 2px$	2.	$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$
γ.	$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	3.	$x_1x + y_1y = \rho^2$

$\delta.$	$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	$4.$	$yy_1 = p(x + x_1)$
-----------	--	------	---------------------

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 16

1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $C: \chi^2 + \psi^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(\chi_1, \psi_1)$ είναι η ευθεία $\varepsilon: \chi\chi_1 + \psi\psi_1 = \rho^2$. (Μον. 10)
2. Να γράψετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων. (Μον. 5)
3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
 - α) Η ευθεία με εξίσωση $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (B, -A)$.
 - β) Η εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο αν ισχύει $A^2 + B^2 + 4\Gamma > 0$.
 - γ) Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\beta} \neq 0$, τότε $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{\beta}, \lambda \in \mathbf{R}$.
 - δ) Η εξίσωση της κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(\chi_0, \psi_0)$ είναι η $\chi = \chi_0$.
 - ε) Αν $\vec{a} = (\chi_1, \psi_1)$ και $\vec{\beta} = (\chi_2, \psi_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου. Οχψ τότε ισχύει:

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \chi_1\psi_1 + \chi_2\psi_2. \quad (\text{Μον. } 5 \times 2 = 10)$$

ΘΕΜΑ 17

- A1. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ (Μονάδες 10)
- A2. Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής. (Μονάδες 5)
- A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
 - α) Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
 - β) Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1y_1 + x_2y_2$
 - γ) Η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ από τη ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
 - δ) Η εξίσωση $(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 = \rho^2$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ .
 - ε) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες: $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$ (Μονάδες $5 \times 2 = 10$)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ****ΘΕΜΑ 1^ο**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(8,\lambda)$ και $\vec{\beta}=(-\lambda,-2)$.

A) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ (Μονάδες 7)

B) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ να είναι ομόρροπα (Μονάδες 10)

Γ) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$; (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{a}=(2+\kappa, 4)$ και $\vec{\beta}=(5, \kappa+11)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Για $\kappa=1$ να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ (μονάδες 8)

β) Για $\kappa=1$ να βρείτε το $\text{συν}(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}})$. (μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία είναι $\vec{a} \perp \vec{\beta}$. (μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(-3,4)$

B1. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=3\vec{a}-2\vec{\beta}$ (μον.5)

B2. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{a}+\vec{\beta}$ (μον.6)

B3. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ (μον.6)

B4. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u}=(5,-2)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,3)$.

- A. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{a} - 3\vec{\beta}$. (μονάδες 8)
- B. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ (μονάδες 8)
- Γ. Να βρείτε τον αριθμό $k \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{u} = (k^2 - k, k)$ να είναι κάθετο στο \vec{a} . (μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 5^ο

Δίνονται τα σημεία $A(-4,-3)$, $B(2,1)$ και $\Gamma(5,3)$.

- α. να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overline{AB} και $\overline{B\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά. (9 μόρια)
- β. να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου του AB . (5 μόρια)
- γ. να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\overline{B\Gamma}$. (4 μόρια)
- δ. αν $\vec{\alpha} = (2, -3)$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \overline{A\Gamma}$. (7 μόρια)

ΘΕΜΑ 6^ο

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 1)$, $\vec{\beta} = (-6, 0)$ και $\vec{\gamma} = \kappa \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

- B1. Να αποδείξετε ότι τα $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -6$. Μονάδες 6
- B2. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$ τότε:
- Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$. Μονάδες 6
 - Να υπολογίσετε το $|\vec{\gamma}|$. Μονάδες 6
 - Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 7^ο

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το κυρτό τετράπλευρο ABΓΔ με

$$\vec{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \quad \vec{AD} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}, \quad \vec{AG} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}.$$

1. Να αποδείξετε ότι το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. **Μονάδες 6**

2. Αν το ABΓΔ είναι ρόμβος και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ τότε :

α) Να αποδείξετε ότι τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

β) Να βρεθεί το μήκος της πλευράς του ρόμβου.

γ) Να βρεθεί το είδος της γωνίας \widehat{BAD} . **Μονάδες 7+6+6=19**

ΘΕΜΑ 8^ο

Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A(0,3), B(-9,0) και Γ(γ,0) όπου $\gamma \in R$ με $\gamma > 0$.

Αν ισχύει: $|\vec{AB}| = 3|\vec{AG}|$, τότε:

B1. Να υπολογίσετε την τιμή του γ.

Μονάδες 9

B2. Αν Δ(κ,λ) και Ε(μ,ν) είναι δύο σημεία του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\vec{AD} = 3 \cdot \vec{AG}$ και $\vec{BG} = 2 \cdot \vec{GE}$ να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Ε.

Μονάδες 9

B3. Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} \perp \vec{AE}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 9^ο

Αν $|\vec{a}| = 2$ και $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ και $\left(\hat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 45^\circ$.

i) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{a} και \vec{b} . (Μονάδες 9)

ii) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} - \vec{b}$. (Μονάδες 7)

iii) Να βρείτε τη γωνία $\left(\hat{\vec{a} - \vec{b}, \vec{b}}\right)$ των διανυσμάτων $\vec{a} - \vec{b}$ και \vec{b} (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A(0,3), B(-9,0) και Γ(γ, 0) όπου $\gamma \in R$ με $\gamma > 0$.

Αν ισχύει: $|\overline{AB}| = 3|\overline{AG}|$, τότε:

B1. Να υπολογίσετε την τιμή του γ.

Μονάδες 9

B2. Αν Δ(κ, λ) και Ε(μ, ν) είναι δύο σημεία του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overline{A\Delta} = 3 \cdot \overline{AG}$ και $\overline{B\Gamma} = 2 \cdot \overline{GE}$ να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Ε.

Μονάδες 9

B3. Να αποδείξετε ότι $\overline{AB} \perp \overline{AE}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 11

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -5)$, $\vec{\beta} = (-3, 2)$, $\vec{\gamma} = (-2, -2)$

1) να βρείτε το $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ 2) να εξετάσετε αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, 3) να βρείτε το είδος της γωνίας των $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$

4) να γράψετε το $\vec{\gamma}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, 5) να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

6) να βρείτε τα $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|$ 7) να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 8) να βρείτε το $\vec{\alpha}(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) + \vec{\beta}^2$

9) να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$ 10) να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το γ με τον χ'χ

ΘΕΜΑ 12

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = |\gamma| = 1$, και $\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 4\vec{\gamma} = \vec{0}$

i) να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ii) αν $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$, να βρείτε το $|\vec{u}|$

ΘΕΜΑ 13

Έστω τα σημεία A(-1,2) και B(1,2) και \vec{i}, \vec{j} τα μοναδιαία διανύσματα σε ορθοκανονικό σύστημα χΟψ..

1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, O, B είναι συνευθειακά

2. Να γράψετε σαν συνάρτηση των \vec{i}, \vec{j} το \overline{AB}

3. Να βρείτε ένα σημείο Γ στον χ'χ ώστε: $\hat{A\Gamma} = 90^\circ$

4. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B\Gamma}$

ΕΥΘΕΙΕΣΘΕΜΑ 1^ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία: A(2, 3), B(-2, 5) και Γ(-4, -3)

- α) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους BE. (μονάδες 8)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου E. (μονάδες 9)
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου BEΓ. (μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2^ο

Θεωρούμε τα σημεία A(1,2), B(5,5) και Γ(7,3) του επιπέδου.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι τα A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. **Μονάδες 6**
- Γ2.** Να προσδιορίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{B\Gamma}$ με τον άξονα X'X. **Μονάδες 6**
- Γ3.** Να προσδιορίσετε σημείο Δ του επιπέδου ώστε το τετράπλευρο ABΔΓ να είναι παραλληλόγραμμο. **Μονάδες 5**
- Γ4.** Αν Δ(11,6) τότε να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία AB. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται τα σημεία A(0,2) και B(8, -4). Ευθεία κάθετη στην AB στο A, τέμνει την ευθεία ε: $y = 2x - 2$ στο σημείο Γ.

- B1.** Να βρείτε το μήκος του τμήματος AB και τις εξισώσεις των ευθειών AB και AΓ. (Μονάδες 10)
- B2.** Να δείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες (6, 10) και ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- B3.** Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ και να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου του από την κορυφή A. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ και $\Gamma(-4, 7)$.

1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου. **Μονάδες 6**
2. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο. **Μονάδες 6**
3. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$. **Μονάδες 6**
4. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου B ως προς την ευθεία $A\Gamma$.

ΘΕΜΑ 5^ο

Δίνονται τα σημεία $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ και $\Gamma(4, 3)$ του καρτεσιανού επιπέδου

i) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ που σχηματίζεται από τα παραπάνω σημεία A, B, Γ . (Μονάδες 6)

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου του τριγώνου $AB\Gamma$ που άγεται από την κορυφή Γ .

(Μονάδες 6)

iv) Να βρεθεί η απόσταση της κορυφής A του τριγώνου $AB\Gamma$ από την πλευρά του $B\Gamma$

(Μονάδες 6)

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 6^ο

Θεωρούμε δύο σημεία τα $B(-3, 7)$ και $\Gamma(3, 1)$ και τις ευθείες $\varepsilon_1: 3x - y + 2 = 0$

$\varepsilon_2: 2x + y - 7 = 0$ που τέμνονται στο σημείο A . Να βρείτε:

Γ1. Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$, την γωνία που σχηματίζει η $B\Gamma$ με τον άξονα $x'x$ και την εξίσωση της $B\Gamma$. **Μονάδες 9**

Γ2. Τις συντεταγμένες του A .

Μονάδες 7

Γ3. Την εξίσωση της διαμέσου AM του τριγώνου $AB\Gamma$ και την γωνία των ευθειών AM και $B\Gamma$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 7^ο

Θεωρούμε ευθεία ε η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία

$A(2, 0)$ και $B(0, -3)$ αντίστοιχα.

- A. Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας \mathcal{E} είναι η: $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ Μονάδες 8
- B. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία \mathcal{E} με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. Μονάδες 7
- Γ. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Δ της ευθείας \mathcal{E} που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 8^ο

Δίνεται η εξίσωση $(\kappa-2)\chi + (\kappa+1)\psi + \kappa = 0$

- A) Να βρείτε τις τιμές του κ ώστε να παριστάνει ευθεία (Μονάδες 9)
- B) Να βρείτε την τιμή του κ ώστε η ευθεία αυτή θα είναι παράλληλη στον $\psi'y$ (Μονάδες 8)
- Γ) Να βρείτε την τιμή του κ ώστε αυτή η ευθεία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 9^ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία $A(-1,0)$, $B(3,2)$ και $\Gamma(-3,4)$

- Δ1.** Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου AM (μον.6)
- Δ2.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας BΓ (ε_1) (μον.6)
- Δ3.** Να βρείτε την ευθεία (ε_2) που είναι παράλληλη στην ευθεία BΓ και διέρχεται από το σημείο A (μον.6)
- Δ4.** Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ (μον.7)

ΘΕΜΑ 10^ο

Δίνεται η εξίσωση $(3\alpha+1)x + (2\alpha-2)y + 7\alpha + 5 = 0$ **(1)**.

- α.** να δείξετε ότι η εξίσωση **(1)** παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. (5 μόρια)
- β.** να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση **(1)**, διέρχονται από το ίδιο σημείο A. (7 μόρια)

γ. για $\alpha = 0$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην (1) στο σημείο A.

(7 μόρια)

δ. Να βρείτε την γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία (1) για $\alpha = -\frac{1}{3}$

και για $\alpha = 1$.

ΘΕΜΑ 11^ο

Δίνονται τα σημεία A(0,2) και B(8, -4). Ευθεία κάθετη στην AB στο A, τέμνει την ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 2$ στο σημείο Γ.

B1. Να βρείτε το μήκος του τμήματος AB και τις εξισώσεις των ευθειών AB και ΑΓ. (Μονάδες 10)

B2. Να δείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες (6, 10) και ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

B3. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ και να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου του από την κορυφή A.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 12^ο

Θεωρούμε δύο σημεία τα B(-3,7) και Γ(3,1) και τις ευθείες $\varepsilon_1: 3x - y + 2 = 0$

$$\varepsilon_2: 2x + y - 7 = 0$$

που τέμνονται στο σημείο A. Να βρείτε:

Γ1. Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ, την γωνία που σχηματίζει η ΒΓ με τον άξονα $x'x$ και την εξίσωση της ΒΓ. **Μονάδες 9**

Γ2. Τις συντεταγμένες του A. **Μονάδες 7**

Γ3. Την εξίσωση της διαμέσου AM του τριγώνου ABΓ και την γωνία των ευθειών AM και ΒΓ.

Μονάδες 9

Κ Ω Ν Ι Κ Ε ΣΘΕΜΑ 1^ο

Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$.

A. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

(μονάδες 10)

B. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και είναι κάθετη στην εφαπτομένη του στο σημείο $(2, -3)$

(μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$.

α. να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα της παραβολής.

(6 μόρια)

β. να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.

(7 μόρια)

γ. να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο $A(1,2)$ και να αποδείξετε ότι εφάπτεται επίσης και στον κύκλο.

(12 μόρια)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ (1)

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο του K και την ακτίνα του ρ .

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα x' .

Μονάδες 4

Δ3. Έστω $K(1,2)$ το κέντρο του κύκλου .

α. Να βρεθεί το συμμετρικό σημείο Λ , του κέντρου του κύκλου ως προς το σημείο

$$M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Μονάδες 5

β. Αν $\Lambda(2,1)$ να δείξετε ότι το Λ είναι εσωτερικό του κύκλου.

Μονάδες 5

γ. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το $\Lambda(2,1)$ και τέμνει τον κύκλο στα A, B ώστε το Λ να είναι μέσο της χορδής AB .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ **(1)** και οι ελλείψεις $C_1: x^2 + 3y^2 = 2$, $C_2: 3x^2 + y^2 = 2$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **(1)** παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των παραπάνω κύκλων ως συναρτήσεις του λ . (Μονάδες 6)
- Δ2.** Να βρείτε τις εστίες και τις κορυφές των ελλείψεων C_1, C_2 . (Μονάδες 5)
- Δ3.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των ελλείψεων C_1, C_2 και να αποδείξετε ότι ανήκουν σε κύκλο C . Για ποια τιμή του λ ο κύκλος που περιγράφει η εξίσωση **(1)** συμπίπτει με τον κύκλο C ; (Μονάδες 8)
- Δ4.** Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου C στα κοινά σημεία των ελλείψεων C_1, C_2 σχηματίζουν τετράγωνο με διαγώνιους τους μεγάλους άξονες των ελλείψεων C_1, C_2 . (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 5^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ **(1)**.

1. Να αποδείξετε ότι η **(1)** παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του παραπάνω κύκλου στο σημείο του $A(2,0)$.
3. Να εξετάσετε τη σχετική θέση της ευθείας $\varepsilon: y = x - 2$ ως προς τον κύκλο C .

ΘΕΜΑ 6^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 2\lambda x - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. **(1)**

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **(1)** παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (μονάδες 7)
- β) Αν για $\lambda=1$ προκύπτει από την **(1)** ο κύκλος C_1 και για $\lambda=2$ προκύπτει ο κύκλος C_2 , να βρείτε τα κοινά σημεία των κύκλων C_1 και C_2 . (μονάδες 7)
- γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ που ορίζονται από την **(1)** για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. (μονάδες 6)
- δ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής όλων των κύκλων C_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$. (μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 7^ο

Έστω η παραβολή με εξίσωση $y^2=4x$. Αν το σημείο $A(3, 2\sqrt{3})$ ανήκει στην παραβολή τότε:

i) Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο A. (Μονάδες 8)

ii) Αν η εφαπτομένη τέμνει την διευθετούσα της παραβολής στο σημείο B να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο το AB. (Μονάδες 8)

iii) Να αποδείξετε ότι ο παραπάνω κύκλος εφάπτεται στο άξονα $x'x$ στην εστία της παραβολής. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 8^ο

Δίνονται τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$.

A. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος C_1 των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία η περίμετρος του τριγώνου MEE' είναι ίση με 18, είναι έλλειψη με μεγάλο άξονα $2a = 10$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωσή της. Μονάδες 15

B. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C_2 που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη C_1 και εκκεντρότητα $\varepsilon = 2$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 9^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ (1) και η ευθεία $x + \lambda y + 4 - \lambda = 0$ (2)

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο (-2,3) και ακτίνα 4 (μον.8)

Γ2. Αν η ευθεία (2) διέρχεται από το κέντρο του κύκλου να αποδείξετε ότι $\lambda = -1$ (μον.6)

Γ3. Για $\lambda = -1$

i) να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες (μον.6)

ii) να βρείτε την απόσταση του σημείου $M(4,-3)$ από την ευθεία (2) (μον.5)

ΘΕΜΑ 10^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda - 2)y - 4 - 3\lambda = 0$ (1)

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ. Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ κινούνται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Μονάδες 6

Δ3. Αν το κέντρο K του κύκλου που ορίζει η εξίσωση (1) ανήκει και στην ευθεία $\varepsilon: 3x+y-9=0$, να βρείτε τον αριθμό λ .

Μονάδες 4

Δ4. Για $\lambda=-4$, να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $A(1,5)$.

Μονάδες 7

Μονάδες 8+9+8=25

ΘΕΜΑ 11^ο

Έστω η παραβολή με εξίσωση $y^2=4x$. Αν το σημείο $A(3, 2\sqrt{3})$ ανήκει στην παραβολή τότε:

- i) Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο A . (Μονάδες 8)
- ii) Αν η εφαπτομένη τέμνει την διευθετούσα της παραβολής στο σημείο B να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο το AB . (Μονάδες 8)
- iii) Να αποδείξετε ότι ο παραπάνω κύκλος εφάπτεται στο άξονα $x'x$ στην εστία της παραβολής. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 12^ο

Δίνονται τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$.

- A. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος C_1 των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία η περίμετρος του τριγώνου MEE' είναι ίση με 18, είναι έλλειψη με μεγάλο άξονα $2a = 10$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωσή της. Μονάδες 15
- B. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C_2 που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη C_1 και εκκεντρότητα $\varepsilon = 2$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 13^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

- A) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 10)
- B) Να βρείτε τα σημεία τομής του κύκλου αυτού με τον $x'x$ (Μονάδες 8)
- Γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο $A(2,2)$ (Μονάδες 7)

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα \vec{u} και \vec{v} με $\vec{u} \neq 2\vec{v}$ και η εξίσωση:

$$C: x^2 + y^2 - |\vec{u}| \cdot x - 2|\vec{v}| \cdot y + \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{I}).$$

A. Να δείξετε ότι η σχέση (I) παριστάνει κύκλο με ακτίνα: $\rho = \frac{|\vec{u} - 2\vec{v}|}{2}$. Μονάδες 10

B. Αν $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$ και $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 60^\circ$, να δείξετε ότι:

α. Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(1,1)$. Μονάδες 3

β. Η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με $\rho = 1$. Μονάδες 6

γ. Ο κύκλος C εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 6x + 8y - 4 = 0$ Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (y - 2, 4)$ και $\vec{\beta} = (y + 2, 1 - 2x)$ με $x, y \in \mathbb{R}$.

Γ1. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα, να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην παραβολή $C: y^2 = 8x$. (Μονάδες 6)

Γ2. Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής C . (Μονάδες 5)

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της παραβολής C που διέρχεται από το σημείο $A(-2,0)$ και σχηματίζει οξεία γωνία με τον $x'x$. (Μονάδες 7)

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση κύκλου C_1 που έχει κέντρο στον $y'y$, εφάπτεται στην διευθετούσα δ της παραβολής C και διέρχεται από το σημείο επαφής της παραβολής C με την ευθεία ε_1 . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ (1) και η ευθεία $x + \lambda y + 4 - \lambda = 0$ (2)

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $(-2,3)$ και ακτίνα 4 (μον.8)

Γ2. Αν η ευθεία (2) διέρχεται από το κέντρο του κύκλου να αποδείξετε ότι $\lambda = -1$ (μον.6)

Γ3. Για $\lambda = -1$

i) να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες (μον.6)

ii) να βρείτε την απόσταση του σημείου $M(4,-3)$ από την ευθεία (2) (μον.5)