ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Θ Ε Ω Ρ Ι Α

ΘΕΜΑ 1

Α1. Αν α>0 με α≠1 τότε για οποιουσδήποτε θ_1, θ_2>0 να αποδείξετε ότι ισχύει:

$\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$. Μονάδες 9

Α2. Πότε ένα πολυώνυμο λέγεται σταθερό και πότε μηδενικό; Μονάδες 6

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεών σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που ακολουθεί σε κάθε πρόταση:

α. Η συνάρτηση f(x) = ημx είναι περιοδική με περίοδο π.

β. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

γ. Η συνάρτηση f(x) = συνx έχει πεδίο ορισμού [–1 , 1].

δ. Για κάθε x>0 ισχύει $e^{\ln x} = x$.

ε. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με 0<α<1 είναι γνησίως φθίνουσα στο IR.

ΘΕΜΑ 2

Α. Έστω $\alpha>0$ με $\alpha\neq1$. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε $\theta_1,\theta_2>0$ ισχύει ότι $\log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2)=\log_\alpha(\theta_1)+\log_\alpha(\theta_2)$. **Μονάδες 10**

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α) Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ μπορεί να δώσει υπόλοιπο, ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού.

β) Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ με $0<\alpha\neq1$ και $x\in R$, είναι γνήσια φθίνουσα στο R αν και μόνο αν $0<\alpha<1$.

γ) Για κάθε $\theta>0$ και $0<\alpha\neq1$ ισχύει ότι $\alpha^{\log_\alpha(\theta)}=\log_\alpha(\alpha^\theta)$.

δ) Οι λύσεις της εξίσωσης $\varepsilon\varphi(x)=\varepsilon\varphi(\theta)$ με $x,\theta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ είναι οι $x=\kappa\pi+\theta$ με $\kappa\in Z$.

ε) Η συνάρτηση f(x) = συνx είναι περιοδική με περίοδο Τ = 2π. **Μονάδες 5x2=10**

Γ. Πότε ένας αριθμός ρ λέγεται ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$; **Μονάδες 5**

Θ Ε Μ Α 3

Α. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο υ της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το x - ρ ,

είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου $P(x)$, για x = ρ, δηλαδή $\upsilon = P(\rho)$. **(Μονάδες 13)**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη «Σωστό» ή « Λάθος» δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. $10^x = \theta \Leftrightarrow \log\theta = x,\ \ \theta > 0$

β. $\ln\dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \dfrac{\ln\theta_1}{\ln\theta_2}$, $\vartheta_1, \vartheta_2 > 0$

γ. Ένας αριθμός ρ, λέγεται ρίζα ενός πολυωνύμου $\mathrm{P}(x)$ αν και μόνο αν , ισχύει $\mathrm{P}(\rho) = 0$

δ. Η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$ έχει περίοδο $\mathrm{T} = \dfrac{2\omega}{\pi}$ **(Μονάδες 04)**

Γ. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τα παρακάτω :

α. $\varepsilon\varphi\, x = \varepsilon\varphi\,\theta \ \Leftrightarrow\ x = \cdots$

β. $\log_a a^x = ...$ όπου $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ και $x \in R$

γ. Η συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως …………….

δ. $\log_a \theta^\kappa =$………… όπου $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $\kappa \in R$ και $\theta > 0$

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 4

Α. Να δείξετε ότι, το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$, δηλαδή $\upsilon = P(\rho)$.

Μονάδες 8

Β. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισοδυναμίες, που μας δίνουν τις λύσεις των αντίστοιχων τριγωνομετρικών εξισώσεων.

1. $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = ...\quad \dot{\eta}\quad x = ...,\quad k \in \mathbb{Z}$
2. $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = ...\quad \dot{\eta}\quad x = ...,\quad k \in \mathbb{Z}$
3. $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x = ...,\quad k \in \mathbb{Z}$

Μονάδες 8

Γ. Θεωρούμε τη εκθετική συνάρτηση: $f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας τη λέξη «Σωστό» ή «Λάθος», δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση.

α. Η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $\left(0,+\infty\right)$.

β. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Το σημείο $\mathrm{A}\left(1,0\right)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 5

1. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x – ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x = ρ, δηλαδή υ = P(ρ). **Μονάδες 10**

3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με α > 1 είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β. Ισχύει $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$, για κάθε α > 0 , α ≠ 1 και θ > 0.

γ. Ο βαθμός ενός μηδενικού πολυωνύμου είναι 0.

ΘΕΜΑ 6

Α. α. Αν α>0 με α≠1,να αποδείξετε ότι για κάθε θ>0 και $\kappa \in R$ ισχύει $\log_\alpha\theta^\kappa=\kappa\log_\alpha\theta$ **(μονάδες 9)**

β. Η συνάρτηση $f(x)=\log_\alpha\chi$,α>0 ,α≠1 είναι:

1. για α>1 γνησίως ....

2. για 0<α<1 γνησίως ....

Να συμπληρώσετε τα παραπάνω κενά **(μονάδες 4)**

Β Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη (Σ) ή (Λ) αν είναι σωστές ή λάθος αντίστοιχα

α.Για κάθε χ>0 ισχύει $e^{\ln x}=\chi$

β. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, 0<α≠1 έχει σύνολο τιμών το (0,+∞)

γ. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x) = lnx και $g(x) = e^x$ έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία y= -χ

ΘΕΜΑ 7

Α$_1$) Να αποδείξετε ότι : ένα πολυώνυμο P(χ) έχει παράγοντα το χ—ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(χ), δηλαδή αν και μόνο αν P(ρ) = 0. **(μονάδες12)**

Α₂) Να αντιστοιχήσετε κάθε εξίσωση της πρώτης στήλης του παρακάτω πίνακα με τη λύση της που βρίσκεται στη δεύτερη στήλη

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	ΛΥΣΕΙΣ
ημχ=ημθ	χ=κπ+θ, $\kappa \in \mathbb{Z}$
συνχ=συνθ	χ=2κπ+θ ή χ=2κπ-θ, $\kappa \in \mathbb{Z}$
εφχ=εφθ	χ=2κπ+θ ή χ=2κπ+π-θ, $\kappa \in \mathbb{Z}$
σφχ=σφθ	

(μονάδες6)

Α₃) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου Δ(χ) (διαιρετέος) δια του δ(χ) (διαιρέτης),αναφέροντας τα ονόματα των υπόλοιπων πολυωνύμων που υπάρχουν σε αυτήν, όπως και τους περιορισμούς για ένα από αυτά. **(μονάδες7)**

ΘΕΜΑ 8

Α. Να αποδείξετε ότι : « Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $\mathrm{P}(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$.Είναι δηλαδή $\upsilon = P(\rho)$ ». **(12 μόρια)**

Β. Τι ονομάζεται λογάριθμος του θ ως προς βάση α; ($\log_a \theta$) **(5 μόρια)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την έκφραση «σωστό» ή «λάθος».

α. Το πεδίο ορισμού της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=a^x$ είναι το R.

β. Ισχύει $\ln e = 0$.

γ. Ισχύει $\ln x < 0$, αν $0<x<1$.

δ. Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x)=\ln x$, έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$. **(8 μόρια)**

ΘΕΜΑ 9

α. Τα πολυώνυμα P(x)= $\alpha_\mu x^\mu + \ldots \alpha_1 x + \alpha_o$ και q(x)= $\beta_\nu x^\nu + \ldots \beta_1 x + \beta_o$ με $\mu > \nu$ πότε λέμε ότι είναι ίσα;

β. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x-ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ. Είναι δηλαδή υ= P(ρ). Είναι σωστός αυτός ο ισχυρισμός;

γ. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} \ldots \alpha_1 x + \alpha_o = 0$ με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος ρ≠0 είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0. Είναι σωστός αυτός ο ισχυρισμός;

<u>ΘΕΜΑ 10</u>

Α. Αν α > 0 με α ≠ 0,τότε για οποιαδήποτε θ_1,θ_2> 0, να αποδείξετε ότι $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$

[Μονάδες 12]

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

[Μονάδες 5]

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σωστές (Σ) ή λάθος(Λ).

1. Για α > 0 , α ≠ 1 και θ > 0 ισχύει $\alpha^{\log_\alpha\theta} = \theta$
2. Για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει ημ$\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$ = − συνω
3. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
4. Η συνάρτηση f(x) = α^x με 0 < α < 1 είναι γνησίως φθίνουσα στο R

[Μονάδες 8]

<u>ΘΕΜΑ 11</u>

Α) Να αποδείξετε ότι : ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$

αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$. **(Μονάδες 07)**

Β) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη ¨**Σωστό**¨ αν η πρόταση είναι **σωστή** και ¨**Λάθος**¨ αν η πρόταση είναι **λάθος** , δίπλα στο **γράμμα** που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β. $\sigma\upsilon\nu(180^o - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$.

γ. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

δ. Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε α>0 .

ε. Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ παίρνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$θετικές τιμές.

στ. Το υπόλοιπο της διαίρεσης υ ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι το $\upsilon = P(\rho)$.

(Μονάδες 12)

Γ) Να συμπληρώσετε στην κόλλα σας τις ισότητες

α. Αν *ημx* = ημα τότε x=…………ή ………….. $k \in \mathbb{Z}$

β. Αν *εφx* = εφα τότε x=……………............ . $k \in \mathbb{Z}$

γ. Αν *συνx* = συνα τότε x=…………ή………….. $k \in \mathbb{Z}$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 12

Α1. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x – ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x = ρ, είναι δηλαδή: υ = P(ρ) **Μονάδες 15**

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας **Σωστό** ή **Λάθος**.

(i). Αν για την ορίζουσα D ενός γραμμικού συστήματος 2x2 ισχύει ότι $D \neq 0$ τότε το σύστημα είναι είτε Αδύνατο είτε Αόριστο

(ii). Αν $\pi < \omega < \dfrac{3\pi}{2}$ τότε $\varepsilon\varphi\omega < 0$

(iv). Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0

ΘΕΜΑ 13

1. Αν α > 0 με $\alpha \neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει: $\mathbf{\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2}$ **(Μον. 10)**

2. Έστω α > 0 με $\alpha \neq 1$ και θ > 0. Τι ονομάζουμε **λογάριθμο** του αριθμού θ ως προς βάση α ; **(Μον. 5)**

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $0 < \alpha \neq 1$ τότε για κάθε θ>0 ισχύει: $\mathbf{\alpha^{\log_\alpha \theta} = \alpha}$.

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x-ρ είναι

ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ. Δηλαδή υ=P(ρ).

γ) Η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = \log_\alpha x}$ με α>1 είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

δ) Αν $0 < \alpha \neq 1$ τότε $\mathbf{\log_\alpha \alpha = 1}$

ε) Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $\theta_1, \theta_2 > 0$ τότε $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \dfrac{\log_\alpha \vartheta_1}{\log_\alpha \theta_2}$ **(Μον. 5$\times$2=10)**

ΘΕΜΑ 14

Α1. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}$ +……$\alpha_1 x + a_0$=0, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος ρ≠0 είναι ρίζα της εξίσωσης , τότε να δειχθεί ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.
(Μονάδες 9)

Α2. Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της πρώτης στήλης του διπλανού πίνακα με τις λύσεις της που βρίσκονται στη δεύτερη στήλη του πίνακα.

ΕΞΙΣΩΣΗ	ΛΥΣΕΙΣ
α) ημx=ημθ	**1)** x=κπ+θ , κ∈Ζ
β) συνx=συνθ	**2)** $\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta & \Psi \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta & ,\kappa \in Z \end{cases}$
γ) εφx=εφθ	**3)** $\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta & \Psi \\ x = 2\kappa\pi - \theta & ,\kappa \in Z \end{cases}$

Α3. Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη **Σωστό** ή τη λέξη **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α) Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

β) Η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο π .

γ) Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-ρ αν και μόνο αν P(ρ)=0 .

δ) Η συνάρτηση f(x)= α^x με α>1 είναι γνησίως φθίνουσα.

ε) Αν α>0 με α≠1, τότε για οποιαδήποτε θ_1 , θ_2>0 ισχύει: $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 15

Α) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

1) f(x) = ημx 2) g(x)=συνx 3) h(x)=lnx 4) t(x)= e^x (Μονάδες 10)

Β) Για τις προηγούμενες συναρτήσεις να συμπληρώσετε τις παρακάτω τιμές:

1) f(0) = …… 2) g(π) = …… 3) h(e) = ….. 4) t(0) =….. 5) h(1) =…. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 16

Α. Αν α>0 και $\alpha \neq 1$,τότε για οποιουσδήποτε θ_1, θ_2 >0 να δείξετε ότι $\log_\alpha(\theta_1 . \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$
(Μον. 8)

Β. Να συμπληρώσετε τις ισότητες :

$\log_\alpha \alpha^x$=……. $\log_\alpha 1$=……. $\log_\alpha(\theta_1 : \theta_2)$= ……… $\alpha^{\log_\alpha \theta}$ =……… (Μον. 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i) Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το χ-ρ αν και μόνο αν $P(\rho) \neq 0$

ii) Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$

iii) Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ είναι γνησίως αύξουσα για 0<α<1

iv) Ισχύει $\log\frac{\theta_1}{\theta_2} = \log\theta_1 - \log\theta_2$ όπου $\theta_1,\theta_2>0$ (Μον. 12)

ΘΕΜΑ 17

Α1. Αν α>0 και α$\neq$1,τότε για οποιουσδήποτε θ_1, θ_2 >0 να δείξετε ότι

$\log_\alpha(\theta_1 . \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$ **(μονάδες10)**

Α2.Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση **(μονάδες10)**

1. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f(x) = συνx είναι το [- 1, 1]

2. Ισχύει ότι $\log_a 1 = 1$ (α>0, α$\neq$1)

3. Αν εφx=θ τότε x=κπ+θ

4 .Η συνάρτηση f(x)=lnx , έχει πεδίο ορισμού το R

5 .Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0

Α3. Τι ονομάζουμε εκθετική συνάρτηση με βάση το α (α>0) **(μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ 18

Α) Αν $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει : $\log(\theta_1\theta_2) = \log\theta_1 + \log\theta_2$ **(15 μονάδες)**

Β) Να απαντήσετε στην κόλλα σας αν οι παρακάτω προτάσεις είναι μαθηματικά σωστές γράφοντας **(Σ)** ή μαθηματικά λανθασμένες γράφοντας **(Λ)**:

i) Ισχύει για κάθε γωνία ω πως $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$:.

ii) Η εξίσωση ημx=2 είναι αδύνατη.

iii)Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=lnx,x>0 τέμνει τον άξονα χ'χ στο σημείο (1,0).

iv)Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

v)Για κάθε θετικό αριθμό θ ισχύει η ισοδυναμία: $\log\theta = x \Leftrightarrow \theta = 10^x$. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 19

Α1. Αν $0 < \alpha \neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε θ_1, $\theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι:

$\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$. (ΜΟΝΑΔΕΣ10)

Α2. Πότε ένας αριθμός ρ λέγεται ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$; (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η συνάρτηση $f(x) = \rho\,\eta\mu\omega x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π.
2. Για κάθε $\theta > 0$ και $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει ότι $\alpha^{\log_\alpha(\theta)} = \log_\alpha\left(\alpha^\theta\right)$.
3. Η διαίρεση ενός πολυωνύμου P(x) με το x-ρ μπορεί να δώσει υπόλοιπο, ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού.
4. Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.
5. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 2x5)

ΘΕΜΑ 20

Α. Να αποδείξετε ότι : Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν P(ρ) = 0.

Β. Τι ονομάζουμε λογάριθμο του θ ως προς βάση α; (θ>0, 0<α≠1)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ) :

1) Για θ_1, $\theta_2>0$ και $0<\alpha\neq1$ ισχύει : $\log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$

2) Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$

3) Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

4) $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$, για κάθε γωνία ω.

5) Το σύστημα $\begin{cases} \alpha\chi+\beta\psi=\gamma \\ \alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma' \end{cases}$ έχει μοναδική λύση όταν D=0 .

ΘΕΜΑ 21

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω, ισχύει $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$. **Μονάδες 10**

Β. Πότε ο αριθμός ρ λέγεται ρίζα του πολυωνύμου P(x); **Μονάδες 5**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη

λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ τότε $P(\rho)=0$.

2. Αν $0<\alpha\neq 1$ και $\theta>0$ ισχύει $\log_\alpha \theta^\kappa=\kappa\cdot\log_\alpha\theta$.

3. Ισχύε $\ln e=0$.

4. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

5. Η συνάρτηση $f\left(x\right)=\alpha^x$ με $0<\alpha<1$ είναι γνησίως αύξουσα. **Μονάδες 10**

<u>ΘΕΜΑ 22</u>

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει : $ημ^2ω+συν^2ω=1$. **(Μονάδες 11)**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) $e^{\ln x}=x$ με $x>0$.

β) Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ με $\alpha>1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$.

δ) Αν $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$ και $\theta_1,\theta_2>0$ ισχύει: $\dfrac{\log_\alpha\theta_1}{\log_\alpha\theta_2}=\log_\alpha\theta_1-\log_\alpha\theta_2$ **(Μονάδες 08)**

Γ. Να μεταφέρεται στο γραπτό σας και να συμπληρώσετε κατάλληλα τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α) συν(-ω)= …..

β) εφ(90^o-ω)=……

γ) ημ(π-ω)= …….. **(Μονάδες 06)**

<u>ΘΕΜΑ 23</u>

Α1. Αν α > 0 και α ≠ 1, τότε για οποιοδήποτε θ > 0 και $\kappa\in R$, να αποδείξετε ότι $\log_a\theta^\kappa=\kappa\cdot\log_a\theta$

Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται περιττή αν για κάθε $x \in A,\ \textit{ισχύει}$:

$-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$.

β. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με α > 1 είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

γ. Η εξίσωση συνx = συνθ , έχει λύσεις x = 2κπ + θ ή x = 2κπ – θ με $\kappa \in Z$.

δ. Κάθε σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

ε. Για κάθε α >0 και α ≠ 1 ισχύει $\log_a a = 1$.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ 24

α) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή(Σ) ή λάθος (Λ),κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις

i) Ένα σύστημα εξισώσεων που δεν έχει καμία λύση λέγεται αδύνατο.

ii) $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2$

iii) το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται μηδενικό πολυώνυμο.

iv) $ημ30^0 = 1$

(μονάδες 10)

β) Να αντιστοιχίσετε τις παρακάτω εξισώσεις με τις λύσεις τους

εξίσωση	λύσεις
1) ημx= ημθ	i) x = κπ + θ
2) συνx = συνθ	ii) x = 2κπ + θ ή x= 2κπ + π − θ
3) εφx = εφθ	iii) x = 2κπ ± θ

(μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x − ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν P(ρ) = 0. (μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 25

Α1. Να δώσετε τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης με βάση ένα θετικό αριθμό α.

Α2. Πότε δύο συστήματα εξισώσεων λέγονται ισοδύναμα;

Α3. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο υ της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το (x – ρ) είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x = ρ, δηλαδή υ = P(ρ).

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεων σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος,** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+\omega)=\eta\mu\omega$, για κάθε γωνία ω.
2. Η συνάρτηση f(x) = ρημ(ωx) είναι περιοδική, με περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}$ (ω>0).
3. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, με $0 < \alpha < 1$ είναι γνησίως αύξουσα.

ΘΕΜΑ 26

A_1) Να αποδειχθεί ότι για κάθε γωνία ω ισχύει ότι: **$\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega=1$** **(μονάδες 11)**

A_2) Να απαντήσετε με **Σωστό ή Λάθος** στα παρακάτω:

α) συν(-ω)=-συνω

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το χ-ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου P(x) για χ=ρ

γ) $\log(\theta_1\theta_2)=\log\theta_1\log\theta_2$

A_3) Να συμπληρώσετε τα κενά:

α) εφx=εφθ $\Leftrightarrow$ x= …………… β) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων y=logx και $y=10^x$ είναι συμμετρικές ως προς ……………………………………………….

γ) $\log_\alpha \alpha^x$=….. δ) $\alpha^{\log_\alpha \theta}$ = …….. ε) $\log_\alpha 1$=…. **(μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ 27

Α) Αν θ_1 , θ_2 πραγματικοί αριθμοί, με $\theta_1 >0$ και $\theta_2 >0$, να αποδείξετε ότι: $\ln(\theta_1.\theta_2) = \ln\theta_1 + \ln\theta_2$

Μονάδες 10)

Β) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις :

1) Οι συναρτήσεις $f(x) =e^x$ και g(x)= lnx, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία:

α) άξονας x΄x β) άξονας y΄y γ) y=1 δ) y=x ε) y = -x

2) Η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=e^x$ είναι η ευθεία:

α) άξονας x΄x β) άξονας y΄y γ) y=1 δ) y=x ε) y = -x

3) Η ασύμπτωτη γραφικής παράστασης της συνάρτησης g(x)= lnx, είναι η ευθεία:

α) άξονας x΄x β) άξονας y΄y γ) y=1 δ) y=x ε) y = -x

4) Η συνάρτηση g(x)=lnx, έχει πεδίο ορισμού το σύνολο:

α) $(0, +\infty)$ β) $(-\infty, 0)$ γ) R δ) (0, 1) ε) $(1, +\infty)$

5) Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ έχει σύνολο τιμών:

α) το R επειδή $e^x > 0$ για κάθε $x \in R$

β) το $(0, +\infty)$ επειδή x>0

γ) το $(0, +\infty)$ επειδή $e^x > 0$ για κάθε $x \in R$

δ) το $(0, +\infty)$ επειδή $e^x > 0$, αφού x>0

(Μονάδες 5x2 =10

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ – ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση φ(x)=$2x^2$-4x-6

α. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

X	-2	-1	o	1	2	3	4
φ(x)							

β. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση φ(x) είναι άρτια ή περιττή.

γ. Να επιλύσετε αλγεβρικά τις φ(x)=0 και της φ(x)>0.

δ. Να γράψετε σε ποια διαστήματα είναι γνησίως αύξουσα και σε ποια γνησίως φθίνουσα.

ε. Για ποια τιμή του x η φ έχει ελάχιστη τιμή και ποια είναι αυτή;

στ. Έχει η γραφική παράσταση άξονα συμμετρίας; Ποιος είναι αυτός;

25 μονάδες

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σύστημα (Σ): $\begin{cases} (\lambda-1)x+2y=\lambda-2 \\ (\lambda-1)x+\lambda y=3(\lambda-2) \end{cases}$ $\lambda \in$ R

Β1. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες D, D_x, D_y **Μονάδες 9**

Β2. Να διερευνήσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του λ **Μονάδες 16**

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 5(\psi-1)=(2-\lambda)\chi \\ \chi-5=-(\lambda+2)\psi \end{cases}$

1. Να αποδείξετε ότι για λ$\neq$ 3 και λ$\neq$-3 το σύστημα έχει μοναδική λύση και να βρεθεί αυτή η λύση. **(Μον.12)**

2. Να αποδείξετε ότι για λ=-3 το σύστημα είναι αδύνατο. **(Μον. 6)**

3. Να αποδείξετε ότι για λ=3 το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και να βρεθούν ποιάς μορφής είναι οι λύσεις αυτές. **(Μον. 7)**

ΘΕΜΑ 4

Α) Δίνεται ένα σύστημα (Σ_1) με $D = \lambda^2 - 1$, $D_x = \lambda+1$ και $D_y = \lambda-1$. Να εξετάστε αν το σύστημα (Σ_1) έχει άπειρες λύσεις. (Μονάδες 5)

Β) Δίνεται το σύστημα (Σ) : $\begin{cases} ax - y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

1) Να υπολογίσετε τις ορίζουσες D, D_x, D_y του συστήματος (Σ). (Μονάδες 9)

2) Για ποιες τιμές του α το σύστημα έχει μοναδική λύση; (Μονάδες 2)

3) Να βρείτε τη μοναδική λύση (x_0, y_0), για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α. (Μονάδες 4)

4) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου α, ώστε για τη λύση (x_0, y_0) του συστήματος να ισχύει: $3x_0 + y_0 = 1$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 5

Α. Να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων των παρακάτω συστημάτων, **χωρίς** να τα λύσετε :

i) $\begin{cases} 2\chi - 3\psi = 30 \\ 4\chi - 6\psi = 40 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2\chi - 5\psi = 12 \\ 3\chi + 4\psi = 41 \end{cases}$

Β. Σε έναν αγώνα το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 2,5 € και το εισιτήριο ενός ενήλικα 6 € . Τον αγώνα παρακολούθησαν 1.400 άτομα και εισπράχθηκαν 5.600 €. Να βρείτε πόσα ήταν τα παιδιά και πόσοι οι ενήλικες που παρακολούθησαν τον αγώνα. (Μονάδες : 10 + 15)

ΘΕΜΑ 6

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το [-3,3]. η οποία είναι περιττή και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [-3,3].

1. Αν είναι f(-2)=15, να υπολογιστεί το f(2). 5 Μονάδες
2. Αν η f παρουσιάζει μέγιστο για x = -3 το f(-3) = 35 να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για x = 3 και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της. 8 Μονάδες
3. Να λυθεί η ανίσωση f(-2x) < f(2). 7 Μονάδες
4. Αν είναι $f(x) = -x^3 - x + 5$, να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης g που προκύπτει από μετατόπιση της C_f κατά 2 μονάδες αριστερά και 5 μονάδες κάτω. 5 Μονάδες

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1

1. Να αποδείξετε ότι: $(1+\sigma\varphi x)^2+(1-\sigma\varphi x)^2=\frac{2}{\eta\mu^2 x}$ **Μονάδες 13**

2. Να λύσετε την εξίσωση: $(1+\sigma\varphi x)^2+(1-\sigma\varphi x)^2=4$ **Μονάδες 12**

ΘΕΜΑ 2

Α. Να βρεθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικοί αριθμοί:

α. συν330^o = ……………..

β. συν (-300^o) = ……………..

γ. συν (-210^o) = ……………..

δ. συν240^o = ……………..

Β. 1. Από τις παρακάτω τιμές δεν μπορεί να είναι ημίτονο γωνίας η:

α. $\frac{1}{2}$ β $-\frac{3}{2}$. γ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ δ. $-\frac{1}{2}$ ε. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Για οποιαδήποτε γωνία x:

α. συνx <-1 , β. συνx >1 , γ. -1≤ συνx ≤ 1 , δ. το συνx δεν ορίζεται , ε. δεν ισχύει κανένα από τα προηγούμενα.

3. Να λύσετε την εξίσωση ημ^{2}x + 5συν^{2}x=4 (25 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$.

α. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **(9 μόρια)**

β. Να βρείτε την περίοδο , την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $g(x)=2f(4x)$.

(6 μόρια)

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x , ισχύει $g(x)=1$. **(10 μόρια)**

<u>ΘΕΜΑ 4</u>

Η συνάρτηση f(x)= α + β.συν2x με β>0, έχει μέγιστη τιμή το 4 και η γραφικής της παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ($\frac{\pi}{3}$,-5).

Β1. Να βρείτε τα α και β.

Β2. Για α=-2 και β=6:

i. Να βρείτε την περίοδο Τ της συνάρτησης f.

ii.Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

iii.Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή της.

vi.Να βρείτε τα κοινά σημεία της συνάρτησης f με την ευθεία y=1.

<u>ΘΕΜΑ 5</u>

Δίνεται η συνάρτηση f(χ)=α.συν($\frac{\beta\chi}{4}$) όπου α,β$\in \boldsymbol{R}$. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α(0,-2) και Β($\frac{4\pi}{\beta}$,β) τότε:

α. να αποδείξετε ότι α=-2 και β=2 **(μονάδες 8)**

β. Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f καθώς και την περίοδό της **(μονάδες 9)**

γ. Να λύσετε την εξίσωση f(χ)=1 **(μονάδες 8)**

<u>ΘΕΜΑ 6</u>

Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, τότε:

Β1. Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad. (Μονάδες 8)

Β2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{K} = \frac{10\sigma\upsilon\nu x - 12\varepsilon\varphi x}{5\eta\mu x}$. (Μονάδες 4)

Β3. Να λύσετε την εξίσωση : $(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = \frac{2}{5}K - 2\eta\mu^2\omega$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 7

Δίνεται η παράσταση $A=\dfrac{\eta\mu^4 x-\sigma\upsilon\nu^4 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

Γ1. Να δείξετε ότι Α=1+$\sigma\upsilon\nu x$ (μονάδες 10)

Γ2. Αν $\eta\mu x=\dfrac{4}{5}$ $\mu\varepsilon$ $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης Α (μονάδες 7)

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{A}-\sigma\upsilon\nu 5x=1$ (μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 8

Α) Να λύσετε τις παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις:

i) $\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ (8 μονάδες)

ii) $2-\sigma\upsilon\nu x=2\eta\mu^2 x$ (12 μονάδες)

Β) Να διαπιστώσετε αν ο αριθμός $x=\dfrac{\pi}{2}$ επαληθεύει και τις δύο παραπάνω εξισώσεις.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\sigma\upsilon\nu 4\mathrm{x}+\alpha,\ \mathrm{x}\in[0,\pi]$

Β1. Να βρείτε την τιμή του α, αν $f(\pi)=5$ (ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

Για την τιμή α = 3:

Β2. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f και ποια η περίοδος της;

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

Β3. Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 4 (ΜΟΝΑΔΕΣ 13)

ΘΕΜΑ 10

Α. α) Να μετατρέψετε σε μοίρες τις γωνίες :

i) $\dfrac{7\pi}{6}$ rad ii) $\dfrac{5\pi}{4}$ rad iii) $\dfrac{4\pi}{3}$ rad

β) Να μετατρέψετε σε rad τις γωνίες :

i) 120° ii) 135° iii) 150° (Μονάδες : 3 + 3)

Β. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) (1+ημχ) · (εφχ + $\sqrt{3}$) = 0 β) 4συν^{2}χ – 4συνχ – 3 = 0 (Μονάδες : 8 + 11)

ΘΕΜΑ 11

Δίνεται η παράσταση $$\mathrm{K}=\frac{\varepsilon\phi\left(\pi-\omega\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi+\omega\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2}-\omega\right)}{\eta\mu\left(13\pi+\omega\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(-\omega\right)\cdot\sigma\phi\left(\frac{21\pi}{2}-\omega\right)}$$

και η εξίσωση $2\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu x+\mathrm{K}=0$ **(1)**

Α. Να υπολογίσετε την παράσταση K . Μονάδες 12

Β. Για $\mathrm{K}=-1$, να λύσετε την εξίσωση **(1).** Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 12

Δίνονται οι παραστάσεις: Α=1-2ημx και Β=1-2συν^{2}x

α. Να αποδείξετε ότι:

$\mathrm{A}^2-2\mathrm{B}=3-4\eta\mu\mathrm{x}$ (Μονάδες 12)

β. Να λύσετε την εξίσωση: $\mathrm{B}=0$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$, $\mu\varepsilon$ $\rho>0$, $\omega>0$ και πεδίο ορισμού Α = [0, 2π], που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Δ1. Με βάση το σχήμα να βρείτε τα ακρότατα της $f(x)$ και τις τιμές του x για τις οποίες παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή της.

Δ2. Να υπολογίσετε την περίοδο Τ της συνάρτησης $f(x)$ καθώς και τα ρ, ω.

Δ3. Αν $f(x) = 4\eta\mu(2x)$ να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 2$ στο διάστημα [0,π].

Δ4. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\frac{\pi}{9})$, $f(\frac{\pi}{7})$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 8 + 6 + 6 + 5 = 25

ΘΕΜΑ 14

Δίνεται η συνάρτηση f(x)= (λ – κ)·ημ[(3λ + 4κ)·x] με κ, λ ∈ IR , (3λ + 4κ) > 0 και (λ – κ) > 0. Η f έχει μέγιστη τιμή το 3 και περίοδο Τ = π.

Β1. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ.

Αν κ = -1 και λ = 2, τότε:

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f στο διάστημα [0, π] και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα [0, π].

Β3. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = -\frac{3}{2}$.

Μονάδες 8+10+7=25

ΘΕΜΑ 15

Η συνάρτηση f(x)=α+ β.συν2x με β>0, έχει μέγιστη τιμή το 4 και η γραφικής της παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ($\frac{\pi}{3}$,-5).

Β1.Να βρείτε τα α και β.

Β2.Για α=-2 και β=6:

i. Να βρείτε την περίοδο Τ της συνάρτησης f.

ii.Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

iii.Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή της.

vi.Να βρείτε τα κοινά σημεία της συνάρτησης f με την ευθεία y=1.

ΘΕΜΑ 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$.

α. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

β. Να βρείτε την περίοδο , την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $g(x)=2f(4x)$.

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x , ισχύει $g(x)=1$.

ΘΕΜΑ 17

Ο πληθυσμός βακτηριδίων σε ένα οργανισμό μετά τη χορήγηση φαρμάκου αυξομειώνεται περιοδικά σύμφωνα με τον τύπο: $f(t)=5-2\eta\mu\frac{\pi t}{12}$ σε εκατομμύρια, όπου t ο χρόνος σε ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

Να βρείτε:

α) τον αρχικό πληθυσμό βακτηριδίων του οργανισμού.

β) την περίοδο του φαινομένου.

γ) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του πληθυσμού καθώς και τις αντίστοιχες ώρες που εκδηλώνονται οι ακρότατες τιμές του πληθυσμού στο πρώτο 24ωρο.

δ) τις ώρες του πρώτου 24ώρου που ο πληθυσμός είναι 6 εκατομμύρια

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + αx^3 + βx^2 - 2x + 4$, όπου α, β$\in$IR. Το P(x) έχει παράγοντα το x – 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x + 1 είναι το 6.

Β1. Να δείξετε ότι α = –1 και β = –2. Μονάδες 7

Β2. Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0. Μονάδες 6

Β3. Να λύσετε την ανίσωση P(x) > 0. Μονάδες 5

Β4. Να λύσετε την εξίσωση $συν^4x - συν^3x + 2ημ^2x - 2συνx + 2 = 0$ στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \pi)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο P(x), βαθμού $\nu \geq 2$, για το οποίο ισχύει :

$8(x-1).P(x)-x.P(2x+3)=-52x^3-8x^2-6x-16$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x-1 είναι 2:

Γ1. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το πολυώνυμο x^2-6x+5.

Γ2. Αν το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το πολυώνυμο x^2-6x+5 είναι το $\Pi(x)=x+4$:

ΘΕΜΑ 3

α)Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης P(x):

i. με τον άξονα $y'y$. ii.με την ευθεία y=2

β)Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) είναι πάνω από την ευθεία y=2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x)=x^3-6x^2+11x+\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Α. Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x=-1$ να είναι ίση με $-24.$ Μονάδες 7

Β. Για $\alpha=-6$ να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-1.$ Μονάδες 8

Γ. Να λυθεί η ανίσωση: $P(x)>0.$

ΘΕΜΑ 5

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 2x + \alpha + 7$. Δίνεται ότι το x + 2 είναι παράγοντας του P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το (x + 1) είναι ίσο με 8.

1. Να αποδείξετε ότι α = 1 και β = -1. **Μονάδες 8**

2. Να κάνετε την Ευκλείδεια διαίρεση P(x):(x^2 – 2x) και να γράψετε την ταυτότητα της. **Μονάδες 8**

3. Να λύσετε την ανίσωση P(x) < 8. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 6

Έστω πολυώνυμο P(χ)=x^3+α$χ^2$+βχ+4 με α,β∈R το οποίο έχει παράγοντες τους χ+1,χ-2

α. Να αποδείξετε ότι α=-3 και β=0 **(μονάδες 7)**

β. Για τις παραπάνω τιμές των α, β να λύσετε την εξίσωση P(χ)=0 **(μονάδες 7)**

γ. Έστω C η γραφική παράσταση συνάρτησης f(χ)=P(χ) με α=-3 και β=0

να βρείτε **:(i)**το σημείο τομής της C με τον άξονα y΄y **(μονάδες 4)**

(ii) τις τιμές του χ για τις οποίες ή C είναι πάνω από τον χ΄χ **(μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ 7

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=2x^3+x^2-\alpha x+2$.

α. Να βρεθεί η τιμή του α ώστε το $\mathrm{P}(x)$ να έχει παράγοντα το $(x+2)$. **(7 μόρια)**

β. Για $\alpha=5$,να λυθεί η εξίσωση $\mathrm{P}(x)=0$. **(10 μόρια)**

γ. Για $\alpha=5$, να κάνετε την διαίρεση $P(x)\div(x^2-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. **(8 μόρια)**

ΘΕΜΑ 8

Δίνεται το πολυώνυμο P(x)=χ(x^2 +λ) +κ$χ^2$ +5 με παράγοντα το χ-1 και P(-2)=3

A) Βρειτε τα κ,λ **ΜΟΝΑΔΕΣ 9**

B) Αν κ=-1 και λ—5

1) Λύστε την εξίσωση P(x)=0 **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

2) Λύστε την ανίσωση P(x)$\leq$8 **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

ΘΕΜΑ 9

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + αx^2 + βx + 6$, όπου x πραγματικός αριθμός.

Α) Αν η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου P(x) για x = 3 είναι ίση με 30 και το $x-1$

είναι παράγοντας του P(x), να αποδείξετε ότι $α = -1$ και $β = -7$ [Μονάδες 13]

Β) Κατόπιν αφού αντικαταστήσετε τα α, β που βρήκατε στο ερώτημα Α), να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$ [Μονάδες 12]

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + αx^2 + βx – 20$, $α, β \in R$

Δ1. Αν το P(x) έχει παράγοντα το $x + 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x + 1$ είναι ίσο με $–16$ να δείξετε ότι: $α = 12$ και $β = 6$ **Μονάδες 10**

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$ **Μονάδες 10**

Δ3. Για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) βρίσκεται κάτω από τον άξονα x’x ; **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 11

Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3x + αx - 3$,όπου $α \in R$ έχει ρίζα το 1.

Α. Να βρείτε την τιμή του $α$. **Μονάδες 8**

Β. Για $α = -1$,

i) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$. **Μονάδες 9**

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 2$ **Μονάδες 4**

iii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 2013 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$. **Μονάδες**

ΘΕΜΑ 12

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)= x^3+(2α+1)x^2-(α+β)x-9$ όπου $α, β \in R$.

Α. Αν το -3 είναι ρίζα του P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) δια το x+1 είναι -8, τότε να βρείτε τις τιμές των α και β. **(Μονάδες 08)**

Β. Αν α=2 και β= -5 τότε:

α) Να λύσετε την εξίσωση: P(x)=0 **(Μονάδες 08)**

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{P(x)}{x+2} \geq 0$ **(Μονάδες 09)**

ΘΕΜΑ 13

Δίνεται το πολυώνυμο το οποίο έχει παράγοντα το $x-2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-3$.

Β2. Να κάνετε την διαίρεση του $P(x)$ με το x^2+2x+1 και να γράψετε την ταυτότητα της.

Β3. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. **Μονάδες 8 + 8 + 9 = 25**

ΘΕΜΑ 14

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 5x + \beta$, με α, β$\in$ IR.

Γ1. Αν το P(x) έχει παράγοντες το x – 1 και το x + 3, να βρείτε τις τιμές των α και β.

Αν α = 1 και β = 3

Γ2. να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0.

Γ3. να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης P(x): $(x^2 + 3x + 4)$.

Γ4. να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \cdot Q(x) > 0$, αν $Q(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ **Μονάδες 6+5+6+8=25**

ΘΕΜΑ 15

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=\left(\kappa^2-1\right)x^4+\frac{1}{2}\left(\kappa+1\right)x^3+\left(\kappa-1\right)x^2-3\kappa x+\lambda$, $\kappa,\lambda \in R$.

1. Αν το $P(x)$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ είναι -4 να υπολογίσετε τα κ και λ .

2. Αν $\kappa=1$ και $\lambda=-2$ τότε :

α. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

β. Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

γ. Να λυθεί η ανίσωση $P(x)<-4$

ΘΕΜΑ 16

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (λ+1)\, x^3 + (x-1)^2$ ημλ + x -1, όπου $λ\in R$.

α) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x-1 να είναι ίσο με το 2.

β) Να βρεθούν οι τιμές του $λ\in R$, ώστε το P(x) να έχει ρίζα το μηδέν.

γ) Για λ=0 να λυθεί η εξίσωση: P(x) = 1.

ΘΕΜΑ 17

΄Εστω $P(χ) = χ^3+αχ^2+7χ-3$ και $Q(χ) = (β+1-χ)χ^2+γ(χ-1)+γ-3$

1. Να βρείτε τα α, β,γ έτσι ώστε P(χ)=Q(χ) και το χ-1 να διαιρεί το P(χ).
2. Να βρεθεί το πηλίκο της διαίρεσης P(χ):(χ-1)
3. Να λυθεί η εξίσωση P(χ)=0
4. Να λυθεί η ανίσωση Q(χ)>=0

ΘΕΜΑ 18

Δίνεται το πολυώνυμο $P(χ) = χ^4 +αχ^3 -3χ^2 +4χ -4$ και το Q(x) που είναι 3^{ου} βαθμού.

Α. (μον. 20)

ι. Να γράψετε το βαθμό, τους συντελεστές και το σταθερό όρο του P(χ).

ιι. Να βρεθεί το α ώστε το χ+2 να διαιρεί το P(χ)

Β. Αν α = -1, να απαντήσετε στα παρακάτω: (μον. 50)

ι. Ποιος από τους αριθμούς 1 , 2 , -1 είναι ρίζα του P(χ) και γιατί;

ιι. Είναι το χ-1 παράγοντας του P(χ) και γιατί;

ιιι. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης P(χ):(χ-3) με σχήμα Horner

iv. Να γίνει η διαίρεση $P(χ):(χ^2 -4)$ και να γράψετε την Τ.Ε.Δ. της διαίρεσης αυτής.

v. Να λύσετε την εξίσωση P(χ)=0

Γ. Να βρείτε το Q(x) έτσι ώστε, διαιρούμενο με το $χ^2$-χ+3 δίνει πηλίκο 2χ-1 και υπόλοιπο χ-17. (μον. 6)

ΘΕΜΑ 19

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=(\alpha^2-4)\cdot x^3+(\alpha+2)\cdot x^2-(\alpha^3+8)\cdot x+6+3\cdot\alpha$.

1) Ποιος ο βαθμός του P(x) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α ;

2) Ποια η τιμή του α ώστε το 1 να είναι ρίζα του P(x) ;

3) Πότε είναι το μηδενικό πολυώνυμο και πότε είναι μηδενικού βαθμού ;

4) Ποιο το α ώστε P(0) = 2013 ;

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ - ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(4^x - 2)$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό κοινό σημείο με την ευθεία y = 1 – log5. Μονάδες 6

Δ2. Να λύσετε την ανίσωση $4^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}2^{x+1} + \frac{6}{5} > 0$. Μονάδες 6

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(\frac{x}{2}) = 1 + \log\left(4^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}2^{x+1} + \frac{6}{5}\right)$. Μονάδες 8

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $ημ2x = f(\frac{5}{2}) + f(1) - f(\frac{3}{2})$. Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση $f(x) = k+\log(x^2-3)$, $k\in\mathbb{R}$.

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

2. Να υπολογίσετε την τιμή του k ώστε f(2)= log100.

3. Για k=2 :

α)Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης την με την ευθεία :

$$y=-\log\frac{1}{1000}$$

β) Να λυθεί η ανίσωση : f(x) >2.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα. **(Μονάδες 10)**

β. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(2)=4$,

i. Να υπολογίσετε το α . **(Μονάδες 07)**

ii. Για $a=2$ να λύσετε την ανίσωση $f(x+1)<8$ **(Μονάδες08)**

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\log(3x-2)+\log 50$ και $g(x)=\frac{1}{2}\cdot\log(x+2)+2$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g. **Μονάδες 10**

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=g(x)$.

ΘΕΜΑ 5

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}\right)$.

A. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f Μονάδες 6

B. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x)=0$. Μονάδες 9

Γ. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 6

Δίνεται η συνάρτηση f(χ)=ln(3e^{2x}-e^{x}-2)

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f **(μονάδες 10)**

β. Να βρείτε την τεταγμένη του σημείου της γραφικής παράστασης με τετμημένη ln2 και να βρείτε τη θέση του σημείου ως προς τον άξονα χ΄χ **(μονάδες 5)**

γ**.** Να λυθεί η εξίσωση f(χ)=3χ ως προς χ **(μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\alpha-1}{3}\right)^x$, όπου x πραγματικός αριθμός.

i) Βρείτε για ποιες τιμές του α ορίζεται η $f(x)$. (ΜΟΝ.7)

ii) Βρείτε για ποιες τιμές του α η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα. (ΜΟΝ.8)

iii) Αν $\alpha=7$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(2x)=2$ (ΜΟΝ.10)

ΘΕΜΑ 8

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x^2-2x+3)$ και $g(x)=\ln\left(e^x-1\right)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των δύο συναρτήσεων. **(8 μόρια)**

β. Να δείξετε ότι $f(2)+3f(1)-f(3)=\ln 4$ **(7 μόρια)**

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(e^x)=\ln 3+g(x)$. **(10 μόρια)**

<u>ΘΕΜΑ 9</u>

Δίνεται η συνάρτηση f(x)=ln(e^{χ} -2)-ln(e^{χ} -1)

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f **ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

Β) Να αποδείξετε ότι f(x)=ln $\left(1-\frac{1}{e^x-1}\right)$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

Γ) Να λύσετε την εξίσωση f(x)=-ln2 **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

Δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει την ευθεία με εξίσωση ψ=χ

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

<u>ΘΕΜΑ 10</u>

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = α + ln(e^x −2), όπου α πραγματικός αριθμός.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f [Μονάδες 8]

Β) Να βρείτε το α ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο Α(ln3,1)
[Μονάδες 9]

Γ) Για α = −1 να λύσετε την εξίσωση f(x) = 0 [Μονάδες 8]

<u>ΘΕΜΑ 11</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{a+3}{3-a}\right)^x$

α. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. **(Μονάδες 08)**

β. Να βρείτε τις τιμές του α ,ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. **(Μονάδες 08)**

γ. Για **α=2** να λύσετε την εξίσωση : $f(x+1)=f(x)+4$ **(Μονάδες 09)**

<u>ΘΕΜΑ 12</u>

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = 2^x, $x \in R$

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. **(Μον. 3)**
2. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση. **(Μον. 3)**
3. Να λύσετε την εξίσωση: 2f(2x) – 5f(x) + 2 = 0 **(Μον. 10)**
4. Να λύσετε την ανίσωση: f(x^2+x-2) < 1 **(Μον. 9)**

ΘΕΜΑ 13

Δίνετε η συνάρτηση f(x)=ln(3x-5) .

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 5)

Δ2. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα x'x (Μονάδες 8)

Δ3. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 14

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(9^x - 3)$

Α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της (Μον. 7)

Β. Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες ισχύει: $\log 6 + 2\log a = f(1)$ (Μον. 8)

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \log 2 + \log 3^x$ (Μον. 10

ΘΕΜΑ 15

Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)= $\ln(e^{2x} - 2e^x - 3)$ και g(x)= $\ln(e^x + 1)$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f(x) και g(x) **(μονάδες 10)**

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση f(x)=g(x) **(μονάδες 15)**

ΘΕΜΑ 16

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x + ln($e^x - 5$).

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Δ2. Να αποδείξετε ότι f(ln6) < f(ln10). (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{e^{\ln x} + \ln 3 - f(x)}$.

Δ3.Βρείτε το πεδίο ορισμού της g (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

Δ4. Υπάρχει τιμή του α για την οποία η γραφική παράσταση της g περνά από το σημείο Ν(α,0);(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας) (ΜΟΝΑΔΕΣ 4)

ΘΕΜΑ 17

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log(2x)$ και $g(x) = \log(4^x - 2^{x-1})$.

Α. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g. **Μονάδες 6**

Β. Να λυθεί η ανίσωση $g(x) < f\left(\frac{1}{4}\right)$. **Μονάδες 7**

Γ. i) Να αποδείξετε ότι $\log 5 = 1 - \log 2$ **Μονάδες 4**

ii) Να λυθεί η εξίσωση $x^{f(x)} = 5,$ με $x > 0$ **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 18

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)} = \ln(3 - \mathrm{x}) - \ln(3 + \mathrm{x})$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . **(Μονάδες 06)**

Β. Να λύσετε την ανίσωση: $\mathrm{f(x)} < f(1)$ **(Μονάδες 09)**

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(2^x) + f(-1)) = [f(0) - f(1)] \cdot x$. **(Μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ 19

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\frac{x-1}{x-2}$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(3) + f(4) + f(\frac{1}{2}) = 0$.

Γ3. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + \ln(x-2) = e^{\ln 2} + \ln 1$.**Μονάδες 8 + 8 + 9 = 25**

ΘΕΜΑ 20

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\frac{2^{x+1} + 2^{x+2} - 24}{2^{2x+2} - 3 \cdot 2^x - 1})$

Δ1. Να λυθούν οι εξισώσεις: $2^{x+1} + 2^{x+2} - 24 = 0$ και $2^{2x+2} - 3 \cdot 2^x - 1 = 0$.

Δ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Δ3. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση f(x) = ln3 – (x + 1)·ln2. **Μονάδες 8+5+5+7=25**

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται το πολυώνυμο P(x) = x^4 +(συνθ − ημθ) ·x^3 +(συν^{2}θ − ημ^{2}θ)·x + ημθ ,

όπου θ∈ [0,π].

Α) Αν το P(x) έχει ρίζα το 1, να βρείτε το θ. [Μονάδες 12]

Β) Αν θ = π να λυθεί η ανίσωση $\frac{1}{x-3}$ ≥ P(−1) , για x ≠ 3 [Μονάδες 13]

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P(x)} = \mathrm{x}^4 + (\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta)\cdot \mathrm{x}^3 - 3\sigma\upsilon\nu\theta\cdot \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} - 1$

Αν το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ τότε :

α. Να υπολογίσετε την τιμή του **θ** $\in (0,\pi]$ **(Μονάδες 15)**

β. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο : $Q(x) = \mathrm{P}(2x-7)$ διαιρείται με το $x-4$. **(Μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \ln(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)\cdot x^2 - \ln(1 + 2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha)\cdot x - 8$,

όπου $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

i. Να αποδείξετε ότι το 2 είναι ρίζα του $\mathrm{P}(x)$. **(Μονάδες 13)**

ii. Αν $\alpha = \frac{\pi}{2}$, να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{P}(x) = 0$ **(Μονάδες 12)**

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$\mathrm{P}(x) = (2\ln\theta - 1)x^4 + x^3 - x^2 + x - 2\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad \theta > 0, \quad \varphi \in (0,\pi), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Α. Αν το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ είναι 3^{ου} βαθμού και έχει παράγοντα το x-1, να βρεθούν τα θ, φ.

Μονάδες 8

B. Αν $\mathrm{P}(x) = x^3 - x^2 + x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$ να βρεθούν οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $\mathrm{P}(x) < 0.$ Μονάδες 7

Γ. Να λυθούν:

I) η εξίσωση $\mathrm{P}\left(\sqrt{2}\eta\mu\omega\right) = 0, \quad \acute{o}\tau\alpha\nu \quad \omega \in (0, \pi).$ Μονάδες 5

II) η ανίσωση $\mathrm{P}(2 + \ln\alpha) < 0.$ Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 5

Δίνεται ο αριθμός $\Lambda = \dfrac{\log 5 + \log 2 + \log 4 - 1}{2(\log 5 + \log 2) + \log 8 - 2}$

και το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ x + y = 3\Lambda + 3 \end{cases}, \lambda \in R$

i) Να δείξετε ότι: $\Lambda = \dfrac{2}{3}$. **(7 μονάδες)**

ii) Για $\Lambda = \dfrac{2}{3}$ να υπολογίσετε τις ορίζουσες του συστήματος D, D_x, D_y **(6 μονάδες)**

iii) Για $\Lambda = \dfrac{2}{3}$ να επιλύσετε για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ το σύστημα. **(12 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 6

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3x - ax - 3$ καθώς και η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log(2^x - a)$, όπου α πραγματικός αριθμός.

Αν είναι γνωστό πως το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το x=1, τότε:

i) Να δείξετε ότι α=1. **(4 μονάδες)**

ii) Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0 για x πραγματικό αριθμό. **(7 μονάδες)**

iii) Να λύσετε την ανίσωση: P(x)<0. **(7 μονάδες)**

iv) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως f. **(7 μονάδες**

ΘΕΜΑ 7

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log_3 81 + \log_5 1 - \log_4 4$ και $\beta = 2\log_2 3 + \log_2 6 - \log_2 27$ και το πολυώνυμο $P(x) = -2\alpha x^3 + (3\alpha+2\beta)x^2 - 5x + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha =3$ και $\beta =1$

β) Για $\alpha =3$ και $\beta =1$, να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)$ **:** $(2x +1)$

είναι 7 και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 7$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $P[- (\sqrt{8})^x] = 7$

ΘΕΜΑ 8

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha^2 + \ln^4 \alpha) x^3 - 3(\alpha + \ln^3 \alpha) x^2 + (\alpha + \ln^2 \alpha) x + 1 + \ln^3 \alpha$ με $\alpha, x \in R$ και $\alpha > 0$.

Α. Να βρεθεί ο $\alpha > 0$ ώστε το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου να είναι 0 (μηδέν).

Β. Αν $\alpha = 1$ τότε:

α) Να γίνει η διαίρεση $P(x) : (x-1)$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $P(e^x + \sqrt{2}) = 0$

ΘΕΜΑ 9

α) Να λύσετε την εξίσωση (1) : $\log(x-1) + 1 = 2\log\sqrt{x+8}$

β) Αν ρ η ρίζα της (1) ,να βρεθεί η σχέση των α,βεR ώστε το πολυώνυμο $P(\chi)=\alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + 3\chi + 5$,διαιρούμενο με χ-ρ να αφήνει υπόλοιπο 5.

γ) Αν $\alpha=4^{\psi-1}$, $\beta=2^{\psi-1}$ να βρεθεί ο ψεR.

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (2\ln\theta - 1)x^4 + x^3 - x^2 + x - 2\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad \theta > 0, \quad \varphi \in (0,\pi), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Α. Αν το πολυώνυμο Ρ(χ) είναι 3ου βαθμού και έχει παράγοντα το $x-1$, να βρεθούν τα θ, φ.

Β. Αν $P(\chi)=\chi^3-\chi^2+\chi-1$ να βρεθούν οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $P(x) < 0.$

Γ. Να λυθούν:

I) η εξίσωση $\mathrm{P}\left(\sqrt{2}\eta\mu\omega\right)=0, \quad \acute{o}\tau\alpha\nu \quad \omega\in(0,\pi).$

II) η ανίσωση $\mathrm{P}(2+\ln\alpha)<0.$

ΘΕΜΑ 11

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda+1)x^3 + (x-1)^2 \cdot \eta\mu\lambda + x - 1$, όπου $\lambda \in R$.

α) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x - 1 να είναι ίσο με 2.

β) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$, ώστε το P(x) να έχει ρίζα το μηδέν.

γ) Για λ = 0 να λυθεί η εξίσωση: P(x) = 1.

ΘΕΜΑ 12

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=\left(\kappa^2-1\right)x^4+\frac{1}{2}(\kappa+1)x^3+(\kappa-1)x^2-3\kappa x+\lambda$, $\kappa,\lambda\in R$.

Α) Αν το $P(x)$ είναι πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ είναι -4 να υπολογίσετε τα κ και λ.

Β) Αν $\kappa=1$ και $\lambda=-2$ τότε :

α. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

β. Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

γ. Να λυθεί η ανίσωση $P(x)<-4$.

ΘΕΜΑ 13

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P(x)=2x^3-x+\eta\mu\theta\cdot(\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta)}$, $\theta\in[0, 2\pi]$.

α. Να αποδείξετε ότι το $x-\eta\mu\theta$ είναι παράγοντας του $\mathrm{P}(x)$.

β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $\mathrm{P}(x)$ με το $x-\eta\mu\theta$.

γ. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\mathrm{P}(x)$ με το $x-1$ είναι το 1, να βρείτε τη γωνία θ.

ΘΕΜΑ 14

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-5\cdot x^2+8\cdot x+\kappa, \quad \acute{o}\pi o\upsilon\ \kappa\in Z.$

Α. Αν το x – 1 είναι παράγοντας του πολυωνύμου P(x), να υπολογιστεί η τιμή του κ.

Β. Για κ = -4 , να λυθεί η εξίσωση Ρ(x) = 0.

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu^3 x - 5\cdot\eta\mu^2 x + 8\cdot\eta\mu x = 4$.

<u>ΘΕΜΑ 15</u>

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3 +\alpha x^2 +8x +\beta$

Α) Αν το Ρ(χ) διαιρείται με το χ-1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης Ρ(χ):(χ+1) είναι -18, να βρεθούν τα α ,β.

Β) Για α = -5 και β = -4

1. να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης Ρ(χ):(χ+2)
2. να λύσετε την εξίσωση Ρ(χ)=0
3. να λύσετε την ανίσωση Ρ(χ)<0
4. να λύσετε την ανίσωση $\ln^3(x-3)-5\ln^2(x-3)+8\ln(x-3)-4<0$