Λύσεις του Διαγωνίσματος (Όρια συνάρτησης)
Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
18-11-2013

Θέμα Α

Α1. Θεωρία- διατύπωση Θεωρήματος, σελ. 169 του σχολικού βιβλίου

Α2. **1**. Σωστό

2. Σωστό

3. Λάθος

4. Λάθος

5. Λάθος

Α3. Τα κενά συμπληρωμένα:

1. $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
2. $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
3. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$

Θέμα Β

Β1.

Αν στη δοθείσα σχέση θέσουμε όπου x το $\frac{\pi}{2}$ θα έχουμε τελικά $3 \le f(\frac{\pi}{2}) \le 3$ και άρα

$f(\frac{\pi}{2}) = 3$.

Από την δοθείσα σχέση έχουμε $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2\sqrt{\eta\mu x}) = 3$ και $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2+\eta\mu x) = 3$ έτσι ,από το κριτήριο της παρεμβολής, θα έχουμε και $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 3$

Β2. Από την δοθείσα σχέση διαδοχικά έχουμε:

$$\frac{2\sqrt{\eta\mu x}-2}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \le \frac{f(x)-3}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \le \frac{\eta\mu x - 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, x \in [0,\pi]$$

Τώρα έχουμε:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sqrt{\eta\mu x}-2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sqrt{\eta\mu x}-1)(\sqrt{\eta\mu x}+1)}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)(\sqrt{\eta\mu x}+1)}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x-1}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)(\sqrt{\eta\mu x}+1)}=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\eta\mu x)(\sqrt{\eta\mu x}+1)}=-\frac{1}{2}$$

και ακόμα:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x-1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}=-\frac{1}{2}$$

Έτσι, από το κριτήριο της παρεμβολής, θα έχουμε $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-3}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=-\frac{1}{2}$

B3. Αφού $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{f(x)-3}=-2<0$ τότε και $\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{f(x)-3}<0$ κοντά στο $\frac{\pi}{2}$. Καθώς συν^{2}x>0 θα πρέπει 3-f(x)>0 και άρα το ζητούμενο όριο (χωρίς τις απόλυτες τιμές) γράφεται:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3-f(x)-xf(x)-3}{f(x)-3}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{xf(x)-xf(x)}{f(x)-3}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)(x+1)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{f(x)-3}=-3(\frac{\pi}{2}+1)(-\infty)=+\infty$$

Θέμα Γ

Γ1. Θα πρέπει $x\neq 0$ και $\frac{x^2+\kappa^2}{x}>0 \Leftrightarrow x(x^2+\kappa^2)>0 \Leftrightarrow x>0$ και έτσι $A_f=(0,\infty)$

Γ2. θέτω $u=\frac{x^2+\kappa^2}{x}$, όταν x→0^+ τότε u→+∞ και άρα το ζητούμενο όριο γίνεται $\lim_{x\to+\infty}u=\infty$

Γ3. $\lim_{x\to\infty}(f(x)-\ln x)=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2+\kappa^2}{x^2}$

Έτσι αν θέσουμε $u=\frac{x^2+\kappa^2}{x^2}$ τότε, αν x→+∞ έχουμε u→1 και άρα το ζητούμενο όριο γίνεται

$\lim_{u\to 1}\ln u=0.$

Γ4. $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-2\ln x)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{x^2+\kappa^2}{x^3}$

Θέτουμε $u=\dfrac{x^2+\kappa^2}{x^3}$ τότε, όταν x→+∞ έχουμε u→0^+ και άρα το ζητούμενο όριο γίνεται $\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$.

Θέμα Δ

Δ1.

Δ.1.1. Από την σχέση $f^3(x)-f^2(x)+3f(x)=x^3$, $x\in(0,\infty)$ έχουμε $f(x)(f^2(x)-f(x)+3)=x^3,\, x\in(0,\infty)$ και επειδή $f^2(x)-f(x)+3>0$ για κάθε $x\in(0,\infty)(\Delta=-11<0)$ θα έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^3}{f^2(x)-f(x)+3}>0,\, x\in(0,\infty)$$

Δ.1.2. Έχουμε (αντικαθιστώντας την συνάρτηση f από το προηγούμενο υποερώτημα):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f^2(x)-f(x)+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f^2(x)(1-\frac{1}{f(x)}+\frac{3}{f^2(x)})}=0$$

Έχουμε ακόμα**:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{x^3}\cdot x^2)=$$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{f^2(x)-f(x)+3}\cdot x^2)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{f^2(x)(1-\frac{1}{f(x)}+\frac{3}{f^2(x)})}\;(1)$$

Τώρα έχουμε $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{f^2(x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{x})^2}=\dfrac{1}{l^2}$ (*όπου* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=l\in\mathbb{R}^*\cup\{-\infty,\infty\}$)

και $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1-\frac{1}{f(x)}+\frac{3}{f^2(x)}}=1$

άρα η (1) *δίνει* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{f^2(x)}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1-\frac{1}{f(x)}+\frac{3}{f^2(x)}}=\dfrac{1}{l^2}$

Τότε:

$$l=\frac{1}{l^2}\Rightarrow l^3=1\Rightarrow l=1$$

Άρα: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

Σημείωση:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=l\neq 0$ διότι αν $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ τότε και από την δεδομένη σχέση θα είχαμε:

$$\frac{f^3(x)}{x^3}-\frac{f^2(x)}{x^3}+3\frac{f(x)}{x^3}=1, x\in(0,\infty)$$

$$(\frac{f(x)}{x})^3-(\frac{f(x)}{x})^2\frac{1}{x}+3\frac{f(x)}{x}\frac{1}{x^2}=1$$

και παίρνοντας όρια όταν $x\to\infty$ θα είχαμε 0=1 (άτοπο) άρα $l\neq 0$

Δ. 2.

Δ.2.1.

$$g(x)=\sqrt{x^2-x-2}-ax+\beta$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}[x(\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-a+\frac{\beta}{x})]=(1-\alpha)(+\infty)$$

Αν $1-\alpha>0\Rightarrow\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$

Αν $\alpha=1$ τότε

$$g(x)=\sqrt{x^2-x-2}-x+\beta=\sqrt{x^2-x-2}-(x-\beta)$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{[\sqrt{x^2-x-2}-(x-\beta)][\sqrt{x^2-x-2}+(x-\beta)]}{[\sqrt{x^2-x-2}+(x-\beta)]}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2-(x-\beta)^2}{[\sqrt{x^2-x-2}+(x-\beta)]}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2\beta-1)x-\beta^2-2}{x(\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1-\frac{\beta}{x})}=2\beta-1$$

Άρα αν $a>1$ και $\beta\in\mathbb{R}$ θα είναι $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$

Δ.2.2.

$$g(x)=\sqrt{x^2-x-2}-ax+\beta$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}[x(\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-a+\frac{\beta}{x})]=(1-\alpha)(+\infty)$$

Θα πρέπει, κατ΄ανάγκη, να είναι $1-\alpha=0\Rightarrow\alpha=1$. Τότε από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει $2\beta-1=0\Leftrightarrow\beta=\frac{1}{2}$.

Πράγματι, για $a=1,\beta=\frac{1}{2}$ έχουμε $g(x)=\sqrt{x^2-x-2}-x+\frac{1}{2}$ και επαναλαμβάνοντας την πιο πάνω διαδικασία (πολλαπλασιασμός με συζυγή παράσταση κ.λ.π) επαληθεύουμε ότι $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$

Άρα $\alpha=1,\beta=\frac{1}{2}$