

Διαγώνισμα

Θεματική ενότητα: Όρια συναρτήσεων

Τάξη Γ΄ Λυκείου

Κατεύθυνση: Θετική και Τεχνολογική

Αριθμός θεμάτων: 4

Βαθμολογία: 100

Διάρκεια εξέτασης: 2 διδακτικές ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα Α

A1. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής για τις συναρτήσεις f, g, h αν ισχύει $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 .

(Μονάδες 9)

A2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό, αν είναι σωστές και με Λάθος αν είναι λανθασμένες:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha^x = 0$ αν $0 < \alpha < 1$

3. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο X_0 και ισχύει $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow X_0} g(x)$, τότε $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο X_0

4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = 1$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty, \nu \in \mathbb{N}$

(Μονάδες 10)

A3. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \dots$
2. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \dots$
3. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \dots$

(Μονάδες 6)

Θέμα Β

Έστω η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[0, \pi]$ και ισχύει ότι:

$$1 + 2\sqrt{\eta\mu x} \leq f(x) \leq 2 + \eta\mu x, x \in [0, \pi]$$

B1. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ και ότι $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 3$

(Μονάδες 5)

B2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{f(x) - 3}$

(Μονάδες 10)

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|f(x) - 3| - xf(x) - 3}{f(x) - 3}$

(Μονάδες 10)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x^2 + \kappa^2}{x}, \kappa > 0$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

Γ2. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(Μονάδες 6)

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \ln x)$

(Μονάδες 7)

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2 \ln x)$

(Μονάδες 7)

Θέμα Δ

Δ.1. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $f^3(x) - f^2(x) + 3f(x) = x^3$ για κάθε $x \in (0, \infty)$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Δ.1.1. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \infty)$

(Μονάδες 8)

Δ.1.2. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

(Μονάδες 9)

Δ2. Αν $g(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} - ax + \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε:

Δ.2.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$

Δ.2.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$

(Μονάδες 8)

Πανελλήνιες Εξετάσεις 2014

Μαθηματικός Περιηγητής