

**Μάθημα: Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής  
Γενικής Παιδείας  
Γ' Λυκείου  
Διαγώνισμα στο Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>**

**Σχολικό έτος: 2013-2014  
Διάρκεια εξέτασης: 2 δ.ω  
Αριθμός θεμάτων: 4  
Σύνολο μονάδων:100**

**Θ Ε Μ Α Τ Α**

**ΘΕΜΑ Α**

- A.1)** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ ;  
**(Μονάδες 7)**
- A.2)** Να αποδείξετε ότι:  $(x)' = 1, x \in \mathbb{R}$   
**(Μονάδες 8)**
- A.3)** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό, αν η πρόταση είναι Σωστή και με Λάθος, αν η πρόταση είναι Λάθος.
1.  $(\sin 60^\circ)' = -\eta\mu 60^\circ$
  2. Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_0$ , όταν  $f(x) \leq f(x_0)$ , για κάθε  $x$  σε μια περιοχή του  $x_0$ .
  3. Ισχύει:  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{(g(x))^2}$ , για τα  $x$  που ορίζονται οι  $f$ ,  $g$ ,  $f'$ ,  $g'$  και  $g(x) \neq 0$
  4. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως άυξουσα στο  $\Delta$ .

5. Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέγεται συνεχής, αν για κάθε  $x_0 \in A$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

(Μονάδες  $5 \times 2 = 10$ )

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$

**B.1)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, την μονοτονία της και τα ακρότατα της.

(Μονάδες 9)

**B.2)** Να αποδείξετε ότι:  $e^x[f(x) - 2f'(x) + f''(x)] = 4(x-2), x \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 8)

**B.3)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$ .

(Μονάδες 8)

### ΘΕΜΑ Γ

Σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  δίνονται τα σημεία  $A(0, x+1)$  και  $B(x^2+2x, 0)$  με  $x > 0$ . Να βρείτε:

**Γ.1)** Το εμβαδόν  $E(x)$  του τριγώνου  $OAB$ .

(Μονάδες 9)

**Γ.2)** Την  $E'(x)$  και  $E''(x)$ .

(Μονάδες 8)

**Γ.3)** Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου όταν  $x=2$

(Μονάδες 8)

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{x^3}{3} - ax^2 + \beta x - 3$  και

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2 + x}{1 - \sqrt{x+1}}, x \neq 0 \\ \gamma, x = 0 \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

**Δ.1)** Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $A(3,9)$  και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(1,f(1))$  να είναι κάθετη στην ευθεία  $y = -x + 1$

**(Μονάδες 8)**

**Δ.2)** Να βρείτε την τιμή του  $\gamma$ , ώστε η συνάρτηση  $g$  να είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$

**(Μονάδες 8)**

**Δ.3)** Για  $\alpha = -1$ ,  $\beta = -2$  και  $\gamma = -2$

**Δ.3.1.** Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η  $h$  έχει ακρότατα και η μονοτονία της συνάρτησης  $h(x)$  με

$$h'(x) = f'(x) - (1 - \sqrt{x+1})g(x) - 2, x \neq 0$$

**(Μονάδες 5)**

**Δ.3.2.** Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f'(x) - (g(0) + 24)}{x^2 - (g(3) - 1)^2}$

**(Μονάδες 4)**

*Ευχόμαστε Επιτυχία*

*Μαθηματικός Περιηγητής 2013-2014*