

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ'  
ΛΥΚΕΙΟΥ (ΘΕΤΙΚΗΣ Κ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση

$$|2w + 1| - 4w = 1 + 8i$$

A) Να βρείτε την λύση  $w$  της παραπάνω εξίσωσης

B) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του  $z$  για τους οποίους ισχύει  $z\bar{z} + 4\operatorname{Re}(wz) + 2 = -i^{56} - i^{72}$

Γ) Αν οι εικόνες των μιγαδικών  $z_1, z_2$  ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο του (β) ερωτήματος να βρείτε την μέγιστη τιμή του  $|z_1 - z_2|$ .

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2$  με  $z_1^2 + z_2^2 \neq 0$  των οποίων οι εικόνες ανήκουν στον κύκλο κέντρου  $O(0,0)$  και ακτίνας 2.

Θεωρούμε τον μιγαδικό  $w = \frac{2z_1 z_2}{z_1^2 + z_2^2}$

1. Βρείτε τα  $|z_1|$  και  $|z_2|$
2. Δείξτε ότι ο αριθμός  $w$  είναι πραγματικός
3. Αν  $w = i^{2012} - i^{2014}$  τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές την αρχή των αξόνων και τις εικόνες των  $z_1$  και  $z_2$  είναι ισόπλευρο.

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός  $z$  για τον οποίο ισχύει  $3z\bar{z}^6 + 4\bar{z}z^6 = 7$

A) Αποδείξτε ότι  $z\bar{z}^6 = 1$

B) Βρείτε το  $|z|$

Γ) Αποδείξτε ότι ο αριθμός  $u = \frac{(z+i)^{2011}}{z^{2011} - i}$  είναι πραγματικός

Δ) Αν  $w = 2z + 1 - 3i$  τότε να βρείτε

- 1) τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του  $w$
- 2) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του  $|w + 2 - i|$

#### Θέμα 4°

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(a) + f(\beta) = f(\alpha\beta)$   $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ . Επίσης η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα.

- 1) Να υπολογίσετε το  $f(1)$
- 2) Δείξτε ότι  $f(\alpha) - f(\beta) = f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$  για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ .
- 3) Αποδείξτε ότι η  $f$  είναι "1-1"
- 4) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x+1) + f(x+2) = f(x+2) + f(x+3)$

#### Θέμα 5°

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  και ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} + (1 - f(x))i \text{ για τον οποίο ισχύει } |z - 2| = |iz + 2|$$

- a) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$
- b) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι "1-1"
- c) Να ορίσετε την  $f^{-1}$