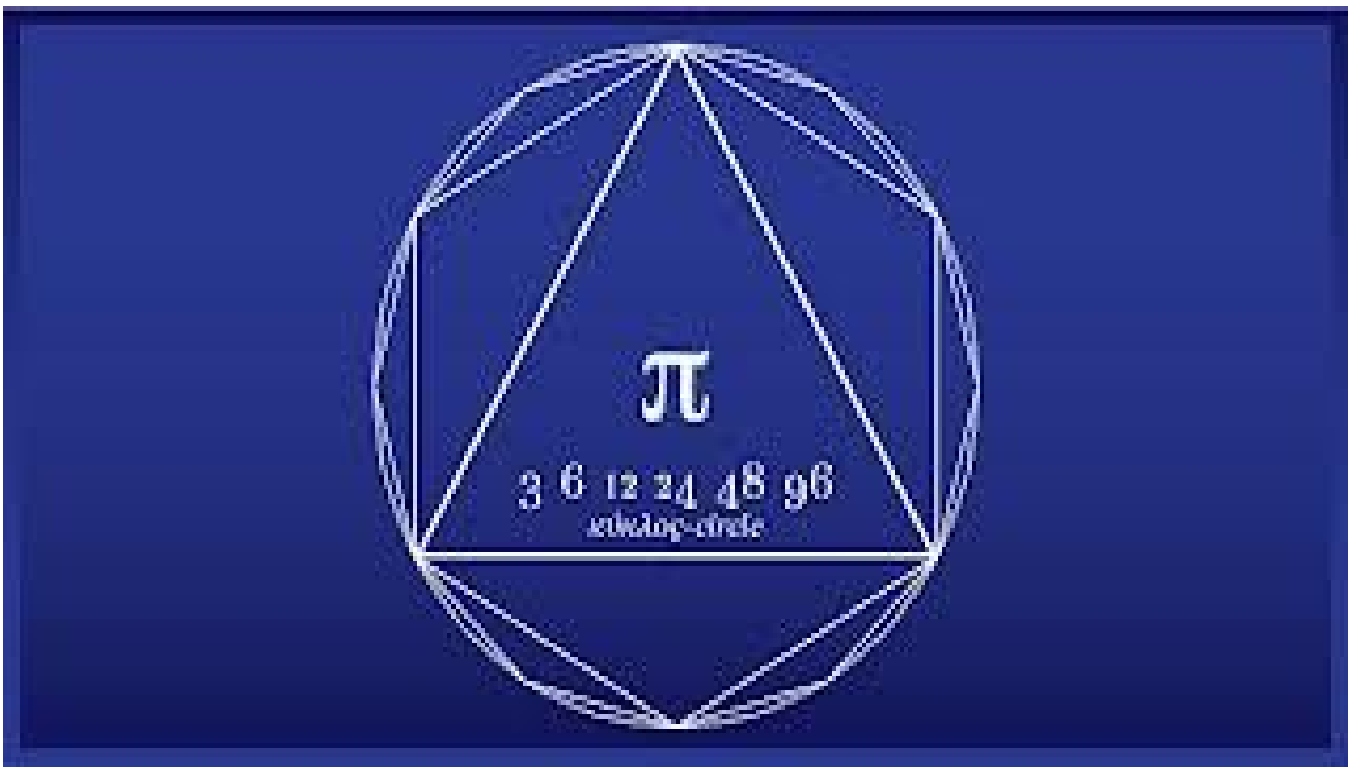
Σειρά: Θέματα εξετάσεων Γενικών Λυκείων
Επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης



ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΝΟΜΟΥ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ: 2012-2013

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος.....3

Θέματα Α΄ Λυκείου Άλγεβρας.....4

Θέματα Α΄ Λυκείου Γεωμετρίας.....41

Θέματα Β΄ Λυκείου Άλγεβρας.....80

Θέματα Β΄ Λυκείου Γεωμετρίας.....110

Θέματα Β΄ Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης.....142

Θέματα Γ΄ Λυκείου Γενικής Παιδείας.....175

Θέματα Γ΄ Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης.....207

Πρόλογος

Η παρούσα συλλογή θεμάτων εξετάσεων είναι αποτέλεσμα της συνεργασίας μου με τους συναδέλφους μαθηματικούς που υπηρετούν σε σχολικές μονάδες της Δ.Ε. του Νομού Δωδεκανήσου τους οποίους και θερμά ευχαριστώ.

Σε συνέχεια της περσινής συλλογής θεμάτων προστίθεται και αυτή ώστε να δημιουργηθεί μια ολοκληρωμένη τράπεζα θεμάτων που θα μπορεί να διευκολύνει τους συναδέλφους, αφού εύκολα θα μπορεί ο οποιοσδήποτε να αναζητήσει θέματα.

Τα θέματα των εξετάσεων δημοσιεύονται χωρίς να αναφέρεται η σχολική μονάδα, ο εισηγητής και ο διευθυντής του σχολείου για λόγους δεοντολογίας. Άλλωστε η ουσία είναι η συλλογή των θεμάτων και τίποτα άλλο. Πολλά σχολεία βέβαια έχουν αναρτήσει τα θέματα στην ιστοσελίδα τους αλλά αυτό γίνεται με δική τους ευθύνη.

Η προσπάθεια αυτή θα συνεχιστεί ώστε να φτιαχτεί μια συλλογή θεμάτων διαχρονική και μεθοδικά τακτοποιημένη κατά τάξη και μάθημα.

Σημειώνω βέβαια ότι τα θέματα μεταφέρθηκαν όπως δόθηκαν στις σχολικές μονάδες από τους εισηγητές και χωρίς καμία παρέμβαση στο περιεχόμενο τους, εκτός από κάποιες μορφοποιήσεις κειμένων και σχημάτων που έγιναν για λόγους ομοιομορφίας.

Ρόδος, Οκτώβριος 2013
Καραγιάννης Β. Ιωάννης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Νομού Δωδεκανήσου

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ά λ γ ε β ρ α

(21 Διαγωνίσματα)

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει η ισότητα: $|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$
(10 Μονάδες)

Β) Τι ονομάζεται απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α;

(5 Μονάδες)

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη (Σ) αν είναι σωστές ή (Λ) αν είναι λανθασμένες .

i) Για κάθε $\alpha \in R$ ισχύει ότι $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$.

ii) Για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\cdot\beta}$.

iii) Για κάθε $\alpha, \beta \in R$ ισχύει $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$.

iv) $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$, με $\alpha, \beta > 0$

v) Αν η διακρίνουσα ενός τριωνύμου είναι μηδέν, τότε το τριώνυμο δεν έχει ρίζες.
(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A)=0,7$, $P(B')=0,4$ και $P(A\cap B)=0,5$ να αποδείξετε ότι:

Α) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Β, δηλαδή το Ρ(Β), είναι 0,6.
(10 μονάδες)

Β) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα Α, Β δηλαδή το $P(A\cup B)$, είναι 0,8.

(15 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι παραστάσεις $A(x)=|x-2|-|3-x|$ και $B(x)=1-|x-3|$

Α) Να λυθούν οι εξισώσεις:
i) $B(x)= -3$
ii) $B(x)=4$
(10 Μονάδες)

Β) Να λυθεί η εξίσωση $A(x)=0$
(7 Μονάδες)

Γ) Να λυθεί η ανίσωση $A(x) < B(x)$
(8 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η εξίσωση $x^2+\beta x+6=0$

α) Αν το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης, να βρεθεί το β.
(5 μονάδες)

β) Για β=-5

i) Να λύσετε την εξίσωση $x^2+\beta x+6=0$.
(9 μονάδες)

ii) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2+\beta x+6$.
(5 μονάδες)

iii) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+\beta x+6 \leq 0$
(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 1

Α) Θεωρούμε ένα πείραμα με ισοπίθανα μεταξύ τους αποτελέσματα και Ω ο δειγματικός χώρος αυτού. Αν Α ενδεχόμενο του πειράματος, να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας του ενδεχομένου Α.

[Μονάδες 10]

Β) Πότε δυο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;

[Μονάδες 6]

Γ) Να αντιστοιχίσετε τις πιθανότητες της στήλης Α με τους κατάλληλους τύπους της στήλης Β

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1.$P(A\cup B)$	α) $1-P(A)$
2.$P(A-B)$	β) $P(A)-P(A\cap B)$
3. $P(A')$	γ) $P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

[Μονάδες 9]

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ανισώσεις $|2x+1\geq 5|$ (1) και $x^2+x-12<0$ (2)

Α. Να λύσετε την ανίσωση (1) [Μονάδες 10]

Β. Να λύσετε την ανίσωση (2)

[Μονάδες 10]

Γ. Κατόπιν να βρείτε τις κοινές λύσεις των (1) και (2) και να τις γράψετε σε μορφή συνόλων. [Μονάδες 5]

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4+\mu-x^2}$ με $\mu\geq 0$.

Α) Να βρείτε την τιμή του μ, ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο Α(2,0)

[Μονάδες 5]

Β) Για μ=0:

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

[Μονάδες 7]

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Β(0,f(0)) και είναι παράλληλη προς την ευθεία y= x + 1

[Μονάδες 8]

iii) Να λύσετε $\frac{1}{f^2(x)}+\frac{1}{x+2}=1$, αν $-2<x<2$ [Μονάδες 5]

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 3\lambda = 0$, $\lambda \in$ R η οποία έχει δυο άνισες πραγματικές λύσεις.

Α. Να αποδείξετε ότι $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (12, +\infty)$

[Μονάδες 8]

Β. Για $\lambda = -4$

Β1) Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 3\lambda = 0$

[Μονάδες 6]

Β2) Αν x_1 η θετική ρίζα και x_2 η αρνητική ρίζα της , τότε

i) Να λυθεί η ανίσωση $|x + 2013| \le x_2$

[Μονάδες 6]

ii) Να δείξετε ότι $\sqrt[3]{x_1\sqrt{x_1}} = \sqrt{2}$

[Μονάδες 5]

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρούμε δύο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα x΄x, με τα σημεία Α και Β αντίστοιχα.
Τι λέμε απόσταση των αριθμών α και β, πώς συμβολίζεται και με τι είναι ίση;
Μονάδες 7

Α2. *Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας τη λέξη* ***«Σωστό»*** *ή* ***«Λάθος»****, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Για κάθε $\alpha > 0$, $\mu \in \mathbb{Z}$ *και* $\nu \in \mathbb{N}^{*}$, ορίζουμε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$.

β. Αν η εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$ έχει πραγματικές ρίζες, τότε το άθροισμά τους, είναι ίσο με τον αριθμό S και το γινόμενό τους, ίσο με τον αριθμό P.

γ. Αν $M(x, y) \in C_f$ *τότε* $f(x) = y$.

δ. Αν $\alpha > 0$, τότε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ε. Αν $\alpha < 0$, τότε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$ έχει μέγιστη τιμή το $f(0) = 0$.

Μονάδες 10

Α3. *Στη* ***στήλη Α*** *δίνεται το είδος της συμμετρίας και στη* ***στήλη Β*** *το συμμετρικό ενός σημείου Μ(α,β). Να αντιστοιχίσετε κάθε γράμμα της* ***στήλης Α*** *στο σωστό αριθμό της* ***στήλης Β.***

Στήλη Α	***Στήλη Β***
α. Ως προς τον άξονα x΄x.	***1.*** Α (β,α)
β. Ως προς τον άξονα y΄y.	***2.*** Β (-α,-β)
γ. Ως προς την αρχή των αξόνων Ο(0,0).	***3.*** Γ (α,-β)
δ. Ως προς την διχοτόμο της γωνίας xOy .	***4.*** Δ (-α,β)

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{|x-4|}$.

Β1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
Μονάδες 6

Β2. Να βρεθούν οι τιμές $f(2)$, $f(3)$ *και* $f(5)$ της συνάρτησης f.
Μονάδες 6

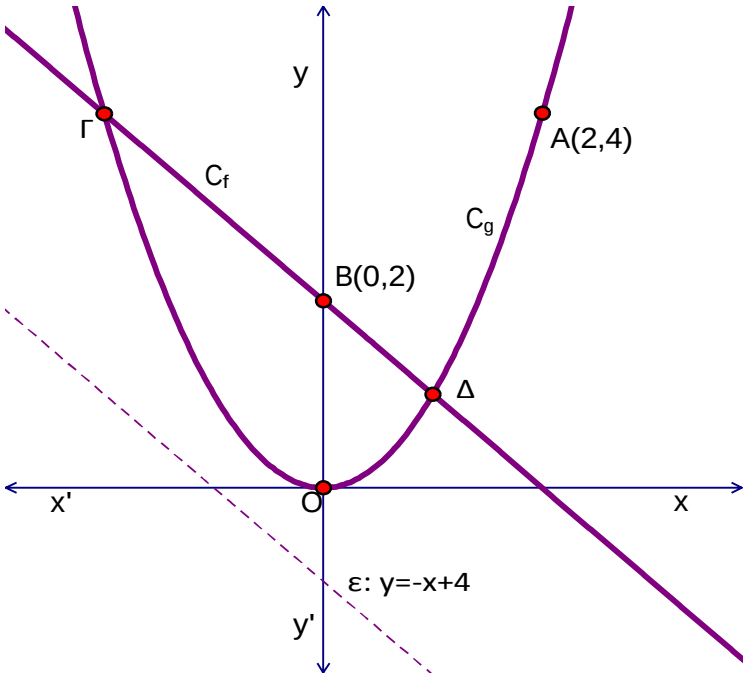
Β3. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\dfrac{1}{f(5) - f(3)}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.
Μονάδες 6

Β4. Να λυθεί η ανίσωση: $|x - f(5)| < 2 \cdot f(2)$.
Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f *και* C_g των συναρτήσεων:

- $f(x) = \alpha x + \beta$, που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,2)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : y = -x + 4$ και της
- $g(x) = \gamma x^2$ που διέρχεται από το σημείο $A(2,4)$.



Να βρεθούν:

Γ1. Οι συναρτήσεις f *και* g..
Μονάδες 9

Γ2. Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων Γ και Δ των γραφικών παραστάσεων C_f *και* C_g.
Μονάδες 9

Γ3. Οι τετμημένες των σημείων της C_g που βρίσκονται κάτω από την C_f.
Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Για τα ενδεχόμενα A *και* B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$\left[5P(A) - 4\right]^2 + \left[10P(B) - 5\right]^2 = 0.$$

Δ1. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A)$ *και* $P(B)$ των ενδεχομένων A *και* B
Μονάδες 5

Δ2. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A *και* B είναι ασυμβίβαστα.
Μονάδες 5

Δ3. Αν $P(A \cap B) = \frac{3}{5}$ να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

α) «Να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A *και* B»

β) «Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A *και* B»

γ) «Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A *και* B»
Μονάδες 15

Θέμα 1ο

Α. Αν η εξίσωση $ax^2+\beta x+\gamma=0$, α $\neq$ 0 έχει δύο άνισες ρίζες x_1 , x_2

να αποδείξετε ότι : $x_1+x_2=\dfrac{\beta}{\alpha}$. **(Μονάδες 13)**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση ,τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**

α. Αν η εξίσωση $ax^2+\beta x+\gamma=0$,α$\neq$0 έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2 τότε ισχύει $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x+x_1)(x+x_2)$.

β. Η απόσταση δύο πραγματικών αριθμών α και β ισούται με $|\beta-\alpha|$.

γ. Αν $\alpha<\beta$ και $\gamma<0$ τότε ισχύει $\beta\cdot\gamma<\alpha\cdot\gamma$

δ. Αν $\theta>0$ τότε ισχύει : $|x|>\theta \Leftrightarrow x>\theta$ και $x<-\theta$.

ε. Αν $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$ και $\nu,\mu\in\mathbb{N}^*$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\mu]{\beta}=\sqrt[\nu\cdot\mu]{\alpha\cdot\beta}$

ζ. Αν $a=0$ τότε ισχύει : $|\alpha|>0$.

(Μονάδες 2Χ6=12)

Θέμα 2ο

Έστω A κα B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου, για τα οποία ισχύουν :

i. $P(A)=0,6$.

ii. $P(B)=0,7$.

iii. $P(A\cap B)=0,5$.

Να βρείτε τις πιθανότητες :

α. $P(A')$. **(Μονάδες 08)**

β. $P(A\cup B)$. **(Μονάδες 09)**

γ. $P(A-B)$ **(Μονάδες 08)**

Θέμα 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{2x-3}{x-2}+\dfrac{2-x^2}{x^2-2x}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . **(Μονάδες 08)**

β. Να βρείτε(αν υπάρχουν) τις τιμές: $f(-1)$ και $f(2)$. **(Μονάδες 08)**

γ. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=0$. **(Μονάδες 09)**

Θέμα 4ο

Δίνεται το τριώνυμο $-2x^2+3x-5$.

α. Να αποδείξετε ότι $-2x^2+3x-5<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 12)**

β. Να λύσετε την ανίσωση : $|-2x^2+3x-5|<-2x+6$. **(Μονάδες 13)**

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Να αντιστοιχίσετε τα γράμματα της στήλης Α με τους αριθμούς της στήλης Β

ΣΤΗΛΗ Α $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$	ΣΤΗΛΗ Β η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$
α) $\Delta>0$	1. έχει μία διπλή ρίζα την $x_o=-\frac{\beta}{2\alpha}$
β) $\Delta=0$	2. δεν έχει πραγματικές ρίζες
γ) $\Delta<0$	3. έχει δυο άνισες ρίζες $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με ***Σωστό (Σ)*** ή ***Λάθος(Λ).***

α) Η εξίσωση $|2011x-2012|=-2013$ είναι αδύνατη. Σ Λ

β)Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $|a|^2>\alpha^2$. Σ Λ

γ) Αν α,β ≥ 0 ισχύει ότι $\sqrt[\nu]{\alpha+\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}$ Σ Λ

δ) $\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$ Σ Λ

ε) Αν θ>0, $|x|\leq\theta\Leftrightarrow-\theta\leq x\leq\theta$ Σ Λ

στ) Η εξίσωση $x^4-16=0$ έχει μοναδική λύση $x=2$. Σ Λ

(ΜΟΝΑΔΕΣ 12)

Γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της δίνεται από τον τύπο $S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Α. Δίνεται η εξίσωση $x^2+\lambda x-3=0$. Αν έχει ρίζα τον αριθμό 1, να δείξετε ότι λ=2.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Β. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση που προκύπτει για λ=2. (ΜΟΝΑΔΕΣ 15)

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Α. Να λύσετε την ανίσωση $x^2+12<7x$. (ΜΟΝΑΔΕΣ1 5)

Β. Αν ο x είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (Α) , να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση

$$|x-3|-|x-4|-2|x|$$ (ΜΟΝΑΔΕΣ10)

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Α. Να λυθεί η εξίσωση $x^5 - 81x = 0$.
(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Β. Αν α η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (Α) να δείξετε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{a}+1} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} = \sqrt{a}.$$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 15)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι ισχύει |α + β| ≤ |α| + |β|, για κάθε α, β∈R.
(μονάδες 12)

Β. Τι ονομάζουμε συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β ;
(μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in R$, είναι πάντα θετικό, όταν η διακρίνουσα του Δ, είναι μικρότερη του μηδενός.
β. Ισχύει ότι $|x| \geq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$ όπου θ θετικός αριθμός
γ. Αν $a \neq 0$ τότε η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ έχει ακριβώς μια λύση.
δ. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε ισχύει :
$\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.
(μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2ο
Δίνεται η εξίσωση $\lambda(\lambda - 1)\chi = \lambda^2 + \lambda$
Α. Αν η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα να βρείτε το λ.
(μονάδες 12)

Β. Για λ=0 να βρείτε την μικρότερη ακέραια λύση της ανίσωσης $d(x, \lambda - 4) < 2$
(μονάδες 13)
ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$
Α. Να βρείτε τα α και β ώστε η ευθεία να σχηματίζει με τον άξονα χ΄χ γωνία ω=45ο και τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στο σημείο Β(0,1)
(μονάδες 14)
Β. Για α =1να βρείτε τα $\mu \in R$ ώστε η (ε) να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση ψ=$\left|\frac{\mu}{\mu+1}\right| \chi - 2$
(μονάδες 11)

ΘΕΜΑ 4ο
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - 6, x \in R$
Α. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
(μονάδες 6)
Β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f.
(μονάδες 6)
Γ. Να βρείτε τα $x \in R$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να βρίσκεται πάνω από την ευθεία με εξίσωση ψ=-6 και κάτω από τον άξονα χ΄χ .
(μονάδες 7)
Δ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$
(μονάδες 6).

Θέμα 1ο

Α. Να γράψετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής.
(ΜΟΝ 5)

Β. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

$|3|=\ldots\ldots,\ |2|=\ldots\ldots\ldots,\ |0|=\ldots\ldots,\ \left|-\frac{3}{4}\right|=\ldots\ldots,\ |\pi|$

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (**Σ**) ή Λάθος (**Λ**):

α) $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2$

β). $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha\beta$

γ) Αν η διακρίνουσα $\Delta<0$, η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει δύο λύσεις

δ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=1/x-1$ είναι το $R-\{1\}$

(ΜΟΝ 2.5x4=10)

Θέμα 2ο

Α) Να λύσετε την εξίσωση: $3(x-4)+8=4-x$. *(ΜΟΝ 15)*

Β) Να λύσετε την ανίσωση $4x-2<10$ και να παραστήσετε τις λύσεις της στον άξονα των πραγματικών αριθμών *(ΜΟΝ 10)*

Θέμα 3ο

Δίνεται η ακολουθία : -2, 3, 8, ….

Α) Να βρείτε τον 15ο όρο (*ΜΟΝ10)*

Β)Να βρείτε το άθροισμα των 40 πρώτων όρων (*ΜΟΝ15)*

Θέμα 4ο

Α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-5x+6=0$ *(ΜΟΝ 15)*

Β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-5x+6<0$ *(ΜΟΝ 10)*

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Τι ονομάζεται συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β; (Μον. 4)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Ισχύει $\alpha^0=1$ για κάθε $a \neq 0$

β) Ισχύει $a^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu}$

γ) Ισχύει $|a| < 0$ για κάθε α πραγματικό αριθμό

δ) Ισχύει $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$ όπου α, β μη αρνητικοί αριθμοί

(Μον. 12)

Γ. Αν Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$ και διακρίνουσα Δ να γίνει η αντιστοίχιση :

Τιμή Διακρίνουσας	Πλήθος Λύσεων Εξίσωσης
1. $\Delta > 0$	Α. Μία διπλή λύση
2. $\Delta = 0$	Β. Καμία λύση
3. $\Delta < 0$	Γ. Δύο άνισες λύσεις

(Μον. 9)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Α. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $|x| = 9$ β) $|x+4| = 7$ γ) $|x-13| = -1$ (Μον. 15)

Β. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 8x + 2 = 0$ τότε χωρίς να βρεθούν οι ρίζες αυτές να υπολογιστούν οι παραστάσεις

α) $x_1 + x_2$ β) x_1x_2 (Μον. 10)

ΘΕΜΑ 3^{Ο}

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 3,7, 11,……

Α. Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και την διαφορά ω της αριθμητικής προόδου (Μον. 8)

Β. Να βρείτε τον εικοστό τέταρτο όρο α_{24} της αριθμητικής προόδου (Μον. 8)

Γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα των πρώτων τριάντα όρων της αριθμητικής προόδου (Μον. 9)

ΘΕΜΑ 4^{Ο}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Α. Να υπολογιστούν οι τιμές της συνάρτησης $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ (Μον.9)

Β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$ (Μον.9)

Γ. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) \geq 0$ (Μον.7)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για τους πραγματικούς αριθμούς **α, β** να αποδείξετε ότι :

$$|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|$$ **Μονάδες 7**

Α2. Πότε μια ακολουθία ονομάζεται Γεωμετρική Πρόοδος ; **Μονάδες 4**

Α3. Να γράψετε τον ορισμό της συνάρτησης από ένα σύνολο **Α** σε ένα σύνολο **Β** .

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν **α>0 ,** μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε : $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$

β) Αν **α=0 και β=0**, τότε η εξίσωση **αx+β=0** είναι αδύνατη.

γ) Αν **α > 0** και **Δ < 0** τότε η ανίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Τρείς αριθμοί **α, β, γ** είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

ε) Η εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με ρίζες x_1, x_2 μετασχηματίζεται σε $x^2+Sx+P=0$ όπου **S , P** το άθροισμα και γινόμενο αντίστοιχα των ριζών της .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

$$f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}-4$$

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$g(x)=\frac{x^2-4}{|x|-2}$$

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=|x-3|-4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 5**

Β2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού **Α** της συνάρτησης **g** και να δείξετε ότι $g(x)=|x|+2$ για κάθε $x \in A$. **Μονάδες 8**

Β3. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=g(x)-6$ **Μονάδες 7**

Β4. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x)<4$ **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ

Ο πρώτος όρος μιας αριθμητικής πρόοδου είναι $\alpha_1=3$ και ο **15ος** όρος είναι $\alpha_{15}=59$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η διαφορά **ω** της παραπάνω προόδου είναι **ω=4**.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε ποιος όρος της παραπάνω προόδου ισούται με **119**. **Μονάδες 8**

Γ3. Να βρείτε το άθροισμα:

$$S=(\alpha_1+6)+(\alpha_2+6)+(\alpha_3+6)+....+(\alpha_{30}+6)+3$$ **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ Δ

Για τον πραγματικό αριθμό **α** δίνεται ότι: $|\alpha+1|^2-4>|\alpha-1|^2+4$

Δ1. Να αποδείξετε ότι : $\alpha>2$ **Μονάδες 8**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **(ε) :** $x^2-2\alpha x+4=0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες ρ_1,ρ_2 άνισες μεταξύ τους και διάφορες του **2.**

Μονάδες 8

Δ3. Αν $f(x)=x^2-2\alpha x+4$ να αποδείξετε ότι :

$f(\rho_1+\rho_2)=\rho_1\cdot\rho_2$ όπου ρ_1,ρ_2 οι ρίζες του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

(μονάδες 10)

Α2.Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Η απόσταση των αριθμών α και β δίνεται από τον τύπο :d(α,β)= |α-β|
2. Αν $x_1 + x_2 = S$ και $x_1 \cdot x_2 = P$, τότε η εξίσωση που έχει ρίζες τις x_1, x_2 είναι η $x^2 + Sx + P = 0$
3. Αν $\alpha \in R$, τότε $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$
4. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ έχει μία διπλή ρίζα, τότε Δ=0
5. Ισχύει ότι $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

(μονάδες 10)

Α3. Πότε δύο ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα ;
(μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι παραστάσεις:

$A = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{3-\sqrt{5}}$ και $B = x \cdot \dfrac{|1-x|}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$

Β1. Να αποδείξετε ότι A =2
(μονάδες 5)

Β2. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B και να την απλοποιήσετε
(μονάδες 12)

Β3. Αν $B = x$ να λύσετε την ανίσωση: $d(B,1) > -2|x-1| + 3$
(μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1}$ *και* $g(x) = \dfrac{1}{2}$.

Γ1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g
(μονάδες 5)

Γ2. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y
(μονάδες 8)

Γ3. Να απλοποιήσετε το τύπο της f
(μονάδες 5)

Γ4. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g
(μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ο δειγματικός χώρος: $\Omega=\{-2,-1,0,1,2,6\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Αν $A=\{\lambda\in\Omega\ /$ η εξίσωση $x^2+\lambda x-3+2\lambda=0$ έχει διπλή ρίζα στο $R\}$

και $B\{\mu\in\Omega/=$ η ευθεία (ε) με εξίσωση: $\psi=\left(\mu^3-4\mu\right)x+20$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x\}$

Γ1. Να βρείτε τα ενδεχόμενα Α, και Β
(μονάδες 13)

Γ2. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:
$P(A\cup B)$, $P(A\cap B)$ και $P(A'\cap B)$
(μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες:

1) Ισχύει η συνεπαγωγή: $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ όπου $\gamma < 0$.

2) Ισχύει η ισότητα: Αν $\alpha, \beta \geq 0$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$

3) Ισχύει η ισοδυναμία: $|\chi| = |\alpha| \Leftrightarrow \chi = \alpha$ ή $\chi = -\alpha$ όπου χ ,α οποιαδήποτε πραγματικοί αριθμοί.

4) Για $\chi_0 \in R$ και $\rho > 0$ ισχύει $|\chi - \chi_0| < \rho \Leftrightarrow \chi \in (\chi_0 - \rho, \chi_0 + \rho)$

(12 μονάδες)

Β) Να αποδείξετε ότι για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

(13 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^2 + ax - 1 = 0$ έχει πάντα δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
(5 μονάδες)

Β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να υπολογίσετε σε συνάρτηση με το α, τις παραστάσεις:

i) $x_1 + x_2$ (4 μονάδες)

ii) $x_1 \cdot x_2$ (4 μονάδες)

iii) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ (12 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^2 - 5x + 4, Q(x) = 9 - x^2$

Α). Να λύσετε κάθε μία από τις ανισώσεις $P(x) \geq 0$ και $Q(x) \geq 0$
(10 μονάδες)

Β). Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{P(x)} + \frac{1}{\sqrt{Q(x)}}$$

(15 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Α) Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\frac{|\chi| + 3}{4} > |\chi| - \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad \frac{|\chi - 2| + 3}{4} < |\chi - 2| - \frac{3}{2}$$

(15 μονάδες)

Β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.
(10 μονάδες)

Θέμα 1ο

Να σημειώσετε το Σ (σωστό) ή το Λ (λάθος) για τις επόμενες προτάσεις:

α. $|x| = \theta, \quad \theta > 0 \Leftrightarrow x = \theta \ \Psi \ x = -\theta$ (2,5 μονάδες)
β. $|x| \geq -x, \quad \forall x \in \mathbf{R}$ (2,5 μονάδες)
γ. Αν $|x| > 1$, τότε $x > 1$ ή $x < -1$. (2,5 μονάδες)
δ. $|-3 + 2| = |-3| + |2|$ (2,5 μονάδες)
ε. Αν $x \leq 5$, τότε $|x - 5| = 5 - x$. (2,5 μονάδες)
στ. $\sqrt[3]{\sqrt[2]{x^2}} = \sqrt[3]{x^2}$ (2,5 μονάδες)
ζ. $|x - 1| < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$ (5 μονάδες)
η. $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ (5 μονάδες)

Θέμα 2ο

Αν ο 6ος όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι 12 και ο 10ος όρος είναι 16, να βρείτε:

α. τον 1ο όρο και τη διαφορά της προόδου (15 μονάδες)

β. το άθροισμα των πρώτων 20 όρων της προόδου (10 μονάδες)

Θέμα 3ο

Να λύσετε την εξίσωση: $(2x - 1)^2 + 5 \cdot |2x - 1| - 6 = 0$ (25 μονάδες)

Θέμα 4ο

Να λύσετε την ανίσωση: $(3 - x) \cdot (x^2 - 3x + 2) \cdot (2x - x^2 - 5) > 0$

(25 μονάδες)

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Στην περίπτωση που η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, έχει πραγματικές ρίζες, να αποδείξετε ότι :

i) $S = -\frac{\beta}{\alpha}$, όπου $S = x_1 + x_2$

ii) $P = \frac{\gamma}{\alpha}$, όπου $P = x_1 \cdot x_2$

Β. ι) Αν $\theta>0$, να γράψετε τις λύσεις της εξίσωσης $|x| = \theta$

ii) Για $\rho>0$ να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης $|x| < \rho$

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις :

1) Η εξίσωση $\chi^\nu = \alpha$, με $\alpha>0$ και ν άρτιο φυσικό, έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και $-\sqrt[\nu]{\alpha}$.

2) Αν $A(\alpha,\beta)$ σημείο του επιπέδου, τότε το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων είναι το $A'(\beta,\alpha)$.

3) Αν $\Delta>0$ και χ_1 , χ_2 οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, $\alpha\neq 0$, τότε $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha(\chi+\chi_1)(\chi+\chi_2)$.

4) Αν $\alpha>0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος τότε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$.

5) Για κάθε $\alpha,\beta \times R$ και για κάθε ν φυσικό ισχύει η ισοδυναμία : $\alpha^\nu = \beta^\nu \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

(Μονάδες : 9+6+10)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Δίνεται το τριώνυμο $\chi^2 - \alpha\chi + \beta$, όπου $\alpha=\sqrt{100} - \sqrt{36}$ και $\beta = |-9| - |8| + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = 3$.

Για $\alpha = 4$ και $\beta = 3$,

β) Να λύσετε την εξίσωση $\chi^2 - \alpha\chi + \beta = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\chi^2 - \alpha\chi + \beta > 3$

(Μονάδες : 6+9+10)

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{3-|x-2|}}{x-5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε τα σημεία που η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τους άξονες.

γ) Να δείξετε ότι $f(3) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

δ) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = \frac{f(3)}{1-f(3)} + \frac{f(3)}{1+f(3)}$$

(Μονάδες : 7+7+5+6)

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 + 2\lambda\chi - 8 = 0$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in R$.

β) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης, να βρείτε τις ρίζες και την τιμή του λ.

γ) Αν $4S = P$, να βρείτε την τιμή του λ.

δ) Για $\lambda = 1$, να κατασκευάσετε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες διπλάσιες της αρχικής.

(Μονάδες 6+7+6+6)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει :

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

Μονάδες 10

Β. Τι λέγεται συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β ;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν $\theta > 0$, τότε : $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$.
2. Για κάθε πραγματικό αριθμό α , ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$.
3. Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με $\alpha < 0$ και ν περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μία λύση την $-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.
4. Έστω Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$.
   Αν $\Delta < 0$ το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α σε όλο το R.
5. Ως συντελεστή διεύθυνσης ή ως κλίση μιας ευθείας ε, ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα x΄x.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι ανισώσεις $|x-2| \leq 1$ **(1)** και $|2y+5| \leq 9$ **(2)**

Α. Να λυθούν οι ανισώσεις **(1)** και **(2)**.
Μονάδες 10

Β. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις :

i) $x + y$

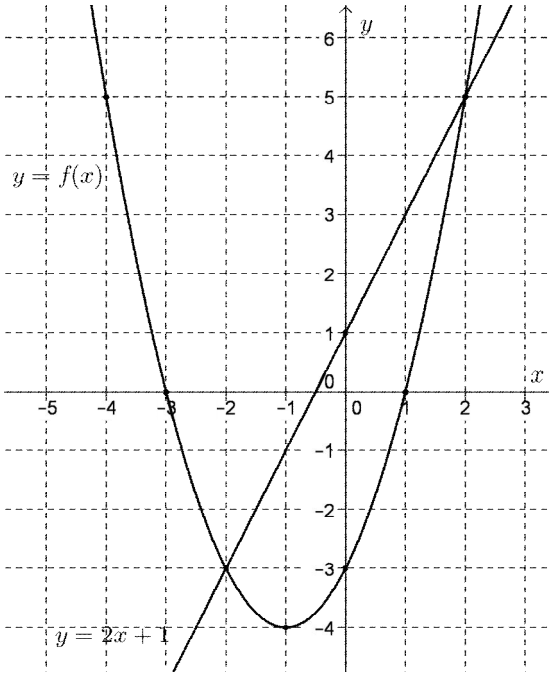
Μονάδες 7

ii) $5x - 3y - 6$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Στο διπλανό σχήμα δίνονται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το R και η ευθεία $y = 2x+1$.



Α. Να βρεθούν οι τιμές $f(0)$ κα $f(2)$ι.

Μονάδες 4

Β. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $y = 2x+1$ με τη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 6

Γ. Να λύσετε γραφικά :

i) Τις εξισώσεις :

$f(x) = 0$ κα $f(x) = 5$ι.

Μονάδες 8

ii) Τις ανισώσεις :

$f(x) < 0$ και $f(x) \geq 2x+1$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Για τις διάφορες τιμές του $x \in R$, να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου

$$-x^2 + 4x - 3.$$

Μονάδες 8

Β. Να λύσετε την ανίσωση :

$$(-2)^{2013}\left(-x^2 + 4x - 3\right) > 0.$$

Μονάδες 7

Γ. Αν $-x^2 + 4x - 3 > 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + |x - 3|.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 1°

Α. Αν Α , Α΄ είναι δυο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι: P(A΄)=1-P(A)

(Μονάδες 10)

Β. Να γράψετε τον ορισμό της ν-οστής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού α.

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Αν για την διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, α≠ 0 ισχύει $\Delta<0$ τότε η εξίσωση αυτή είναι αδύνατη στο R.

β. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει |α|=|-α|.

γ. Για κάθε μη αρνητικό πραγματικό αριθμό α ισχύει: $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\mu]{\alpha}=\sqrt[\nu\cdot\mu]{\alpha}$.

δ. Αν $\alpha,\beta,\gamma\in R$ με $\gamma<0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma>\beta\gamma$.

ε. Η απόσταση $d(\alpha,\beta)$ δύο αριθμών α και β πάνω στον άξονα των πραγματικών ισούται με $|\alpha-\beta|$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$P(A)=0{,}6$, $P(B)=0{,}5$ και $P(A\cap B)=0{,}3$.

α) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A\cup B)$ και $P(A\cup B)'$

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η εξίσωση: $-x^2+\lambda x+\lambda^2+1=0$ με $\lambda\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η εξίσωση έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες.

(Μονάδες 9)

Β) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης τότε να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε να ισχύει:

α) $|x_1|\cdot|x_2|=10$.

(Μονάδες 8)

β) $2(x_1+x_2)+x_1\cdot x_2>-4$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{3x^2-3x-2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}, & x\in\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)-\{2\}\\ -\dfrac{1}{x-2}, & x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$ **(Μονάδες 6)**

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία είναι παράλληλη στην $y=\dfrac{1}{2}x-1$ και διέρχεται από το σημείο A(3 , f(3)).

(Μονάδες 7)

δ) Να υπολογίσετε την παράσταση: $A=\dfrac{f(4)-f(0)}{\sqrt{3}+f(3)}-\dfrac{3f(-1)}{\sqrt{3}+f(1)}$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η εξίσωση $ax^2+\beta x+\gamma=0$, $\mu\varepsilon\ \alpha\neq 0$, με ρίζες x_1, x_2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της δίνεται από τον τύπο $S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}$.

Μονάδες 10

Α2. Τι ονομάζεται απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Η εξίσωση αx + β = 0 με α = 0 και β ≠ 0 είναι αδύνατη.

β. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$.

γ. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει η σχέση $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

δ. Η ευθεία y = αx + β, με α > 0 σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x΄x.

ε. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β

Σε ένα Λύκειο που έχει 200 μαθητές, το 68% των μαθητών έχουν λογαριασμό στο Facebook, το 47% έχουν λογαριασμό στο Twitter και το 18% έχουν λογαριασμό και στα δύο αυτά κοινωνικά δίκτυα.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή αυτού του Λυκείου και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής έχει λογαριασμό στο Facebook

Β: ο μαθητής έχει λογαριασμό στο Twitter

Β1. Να υπολογίσετε το πλήθος των μαθητών που έχουν λογαριασμό στο Facebook.

Β2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει λογαριασμό μόνο στο Facebook.

Β3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής να μην έχει λογαριασμό σε κανένα από αυτά τα δύο κοινωνικά δίκτυα.

Μονάδες 8 + 8 + 9 = 25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(\kappa^2-\kappa)\cdot x+2$ και $g(x)=2\cdot x-\kappa$, όπου $\kappa\in R$, με γραφικές παραστάσεις τις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.

Γ1. Να υπολογίσετε τις τιμές του κ, ώστε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Γ2. Αν κ = 2 και -1 < x < 2 να γράψετε χωρίς απόλυτα και να απλοποιήσετε την παράσταση $A=|f(x)|+|g(x)-2|$

Γ3. Αν κ = - 1 να αποδείξετε ότι $\frac{4}{\sqrt{g(2)}-1}-\sqrt{5}=1$.

Μονάδες 9 + 7 + 9 = 25

ΘΕΜΑ Δ

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής $f(x)=-x^2+\beta x+\gamma$ και της ευθείας $g(x)=2\cdot x-1$, όπου $\beta,\gamma\times R$.

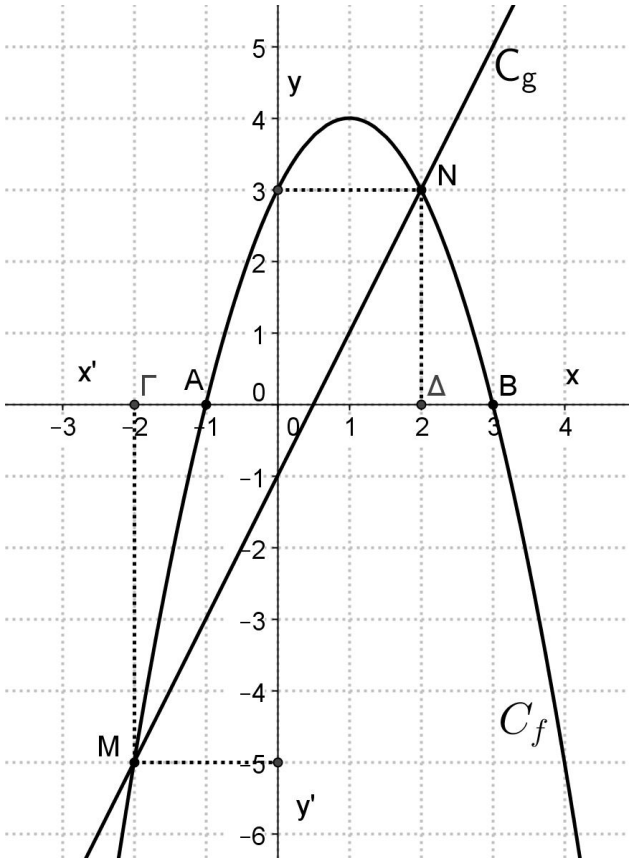
Δ1. Να αποδείξετε ότι β = 2 και γ = 3.

Δ2. Να λυθεί η ανίσωση $f(x)\le 0$

Δ3. Να προσδιορίσετε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g.

Δ4. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=-3$ (με αιτιολόγηση).

Μονάδες 8 + 7 + 7 + 3 = 25



ΘΕΜΑ Α

α) Να αποδείξετε την ισότητα $|\alpha| \cdot |\beta| = |\alpha \cdot \beta|$
(μονάδες 5)

β) Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμια από τις επόμενες προτάσεις
i) μια εξίσωση που δεν έχει λύση λέγεται αδύνατη
ii) αν η διακρίνουσα μιας εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού είναι $\Delta>0$ η εξίσωση είναι αδύνατη
iii) ισχύει ότι $\alpha^{\kappa+\lambda}=\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda}$
iv) ισχύει ότι $\sqrt{100} = 20$
(μονάδες 10)

γ) ποια ακολουθία λέγεται αριθμιτική πρόοδος;
(μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

α) Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2x-1}{4}+\frac{x+3}{8}=\frac{2x-4}{4}$
(μονάδες 10)

β) Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $|x| = 5$ ii) $x^2 - 4|x|+3= 0$
(μονάδες 9)

γ) Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $x^2 =25$ ii) $x^3= 27$ iii) $2x^2= 32$
(μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

α) Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $|x| < 4$ ii) $5(x+3) > 8x +7$
(μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση

$$x^2-7x+6<0$$

(μονάδες 10)

γ) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

i) $\frac{x^2-4}{2x-4}$ ii) $\frac{x^2-5x+6}{x-3}$ (μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος

5,10, 15 , 20……

α) Να βρεθεί ο $1^{ος}$ όρος α_1 και το σταθερό άθροισμα της προόδου ω. (μονάδες 8)

β) Να βρεθεί ο $20^{ος}$ όρος α_{20} της παραπάνω αριθμητικής προόδου. (μονάδες 5)

γ) Να βρεθεί το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου S_{20}. (μονάδες 5)

δ) Να βρεθεί ο χ ώστε οι αριθμοί 5, 3χ , 25 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Τι ονομάζουμε γωνία που σχηματίζει μια ευθεία (ε) με τον άξονα των x΄x; Ποιες τιμές παίρνει αυτή η γωνία;

Α2. Να αποδείξετε ότι $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$, για κάθε α, β ≥ 0.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει: $\sqrt{\alpha^6} = \alpha^3$.
2. Το σημείο Μ(x,y) με x < 0 και y < 0 βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο.
3. Ισχύει |-x| ≥ x, για κάθε x ∈IR.
4. Για κάθε α, β∈R ισχύει ότι $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2$.
5. Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με ν περιττό και α∈IR έχει πάντοτε λύση.

ΜΟΝΑΔΕΣ: 8 + 7 + 10 = 25

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι παραστάσεις : $K = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $\Lambda = \sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt[4]{16}}}}$ και

$M = \sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2+12x+36} - 6$, με -2 < x < 3 .

Β1. Να δείξετε ότι K = 5 και Λ = 4.

Β2. Να δείξετε ότι M = 3.

Θεωρούμε ενδεχόμενα Α,Β δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν: $P(A) = \dfrac{1}{K}$, $P(B) = \dfrac{1}{\Lambda}$ και

$P(A \cup B) = \dfrac{1}{M}$ Να βρείτε την πιθανότητα:

Β3. να πραγματοποιηθούν και τα δύο ενδεχόμενα Α, Β.

Β4. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α, Β.

ΜΟΝΑΔΕΣ: 10 + 7 + 4 + 4 = 25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι ευθείες ε_1 : y = (κ – 2) ·x + 3, ε_2: y = |λ – 1|·x – 1 με λ > 0, ε_3: y = |μ – 2|·x + 3 και η συνάρτηση f(x) = x^2 – x + 5, x∈IR.

Γ1. Αν η ευθεία ε_1 διέρχεται από το σημείο Μ(-2, 1) και η κλίση της ευθείας ε_2 ισούται με 4, να βρείτε τις τιμές των κ, λ.
Αν κ = 3 και λ = 5,

Γ2. να βρείτε για ποιες τιμές του μ η κλίση της ε_3 είναι μεγαλύτερη από την κλίση της ε_1,

Γ3. να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4x - 1$,

Γ4. να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ε_2.

ΜΟΝΑΔΕΣ: 6 + 6 + 6 + 7 = 25

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 2(\kappa - 5)\cdot x - (\kappa - 5)$, όπου $\kappa \in IR$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι ίση με $\Delta = 4(\kappa - 3)(\kappa - 5)$.

Δ2. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in IR$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Δ3. Αν x_1, x_2 είναι οι άνισες ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, να λύσετε ως προς κ την εξίσωση:

$$16(x_1\cdot x_2)^4 - 5(x_1 + x_2)^2 + 4 = 0.$$

Δ4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in IR$ ισχύει: $|f(x)| - f(x) = 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

ΜΟΝΑΔΕΣ: 5 + 7 + 7 + 6 = 25

ΘΕΜΑ Α

Α) Κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να τις χαρακτηρίσετε με (Σ) αν είναι σωστή, ή με (Λ) αν είναι λάθος.

1) Ισχύει πάντα ότι $\sqrt{x^2} = x$
2) Δύο αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές
3) Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε α=0 και β=0
4) $\sqrt[3]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\beta}$, για α, β ≥ 0
5) Αν x >1 τότε $\chi^3 > 1$

Β) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
Η εξίσωση $\alpha \cdot \chi^2 + \beta \cdot \chi + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ με διακρίνουσα Δ έχει:
1) Δύο άνισες ρίζες, αν Δ . . . .
2) Μία διπλή ρίζα , αν Δ . . . .
3) Καμιά πραγματική ρίζα, αν Δ . . . .

Γ) Θεωρούμε την εξίσωση $\alpha \cdot \chi^2 + \beta \cdot \chi + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ και την περίπτωση που αυτή έχει δύο ρίζες άνισες X_1, X_2 και συμβολίζουμε με S το άθροισμα X_1+X_2 , με P το γινόμενο $X_1 \cdot X_2$.

Να δείξετε ότι : $S=-\frac{\beta}{\alpha}$ και $P=\frac{\gamma}{\alpha}$ (τύποι του Vieta)

[Βαθμολογία: Α) 10 μονάδες, Β) 6 μονάδες, Γ) 9 μονάδες]

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε ως βασικό σύνολο το σύνολο Ω={ $\chi \in$ N / $1 \leq \chi \leq 20$ } και τα σύνολα
A={ $X \in \Omega$/όπου X άρτιος } , B={ $\chi \in \Omega$ /όπου x περιττός } και Γ={ $\chi \in \Omega$/ $5 \leq \chi \leq 15$ }
Να προσδιορίσετε ποια είναι τα εξής σύνολα:

1) η ένωση των συνόλων Α και Β ,
2) η τομή των συνόλων Α και Β
3) το συμπλήρωμα του συνόλου Α ,
4) η τομή των συνόλων Β και Γ
5) το συμπλήρωμα του συνόλου Γ

[Βαθμολογία: 5 μονάδες το κάθε ένα από τα 5 ερωτήματα του θέματος]

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος: 5, 8, 11, 14, . . .
Α) Να βρείτε τον πρώτο όρο της (α_1), την διαφορά της (ω) , τον εκατοστό όρο της (α_{100}).
Β) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 60 όρων της.

[Βαθμολογία: Α) 15 μονάδες, Β) 10 μονάδες]

ΘΕΜΑ Δ

Α) Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:
1) $|x -3|>2$ 2) $2x^2+3x-2<0$
Β) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων, αν υπάρχουν

[Βαθμολογία: Α) 15 μονάδες, Β) 10 μονάδες]

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να αποδείξετε τον τύπο του αθροίσματος $S = -\beta/\alpha$ και του γινομένου $P = \gamma/\alpha$ των ριζών ενός τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$
ΜΟΝΑΔΕΣ: 9

Β) Συμπληρώστε τις προτάσεις:
Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, γίνεται :

ι) **Ετερόσημο του α** μόνο όταν Δ……και για τις τιμές τουχπου βρίσκονται…….
των ριζών
ii) **Μηδέν** όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις……του τριωνύμου
iii)**Ομόσημο του α** σε κάθε άλλη…….
iv) **Θετικό** για κάθε x€R όταν και μόνο όταν α……..και Δ……..
v) **Αρνητικό** για κάθε x€R όταν και μόνο όταν α……και Δ……
vi) **Θετικό ή μηδέν** για κάθε x€R όταν και μόνο όταν α…….και Δ……
vii) **Αρνητικό ή μηδέν** για κάθε x€R όταν και μόνο όταν α…….και Δ……..
ΜΟΝΑΔΕΣ: 16

ΘΕΜΑ 2ο

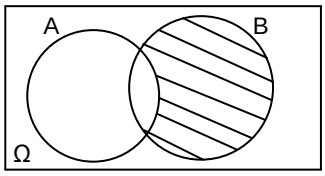
Α) Να σημειώσετε με σωστό Σ αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή με λάθος Λ αν η πρόταση είναι λάθος :

1.Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους. Σ Λ

2. Δύο ενδεχόμενα ξένα μεταξύ τους είναι αντίθετα. Σ Λ

3. Αν δύο ενδεχόμενα Α και Β είναι ξένα μεταξύ τους, τότε και τα συμπληρωματικά τους Α΄ και Β΄ είναι ξένα μεταξύ τους Σ Λ
ΜΟΝΑΔΕΣ: 15

Β) ι) Ποιο ενδεχόμενο παριστάνει στο διπλανό διάγραμμα του Venn το σκιασμένο εμβαδόν
α) Β , β) Β΄ , γ) Α – Β δ) Β-Α



ιι) Αν η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι 0,4 , ποια είναι η πιθανότητα της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου αυτού;
Α) 0,2 Β) 0,8 Γ) 0,6 Δ) 1,4
ΜΟΝΑΔΕΣ: 10

ΘΕΜΑ 3ο

Α) Να βρείτε τον α_{20} της αριθμητικής προόδου 11, 18, 25, . . .
ΜΟΝΑΔΕΣ: 7

Β) Σε μια αριθμητική πρόοδο, αν είναι $\alpha_3 = 14$ και $\alpha_{12} = 42$, να βρείτε τον α_1 και τη διαφορά της προόδου.
ΜΟΝΑΔΕΣ: 10

Γ) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων της αριθμητικής προόδου :
0, 2, 4, . . .
ΜΟΝΑΔΕΣ: 8

ΘΕΜΑ 4^{Ο}

Α) Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ **ii)** $x^2 - 6x + 9 = 0$ **iii)** $3x^2 + 4x + 2 = 0$

ΜΟΝΑΔΕΣ: 15

Β) Να λύσετε την εξίσωση $(x-1)^2 + 4|x-1| - 5 = 0$
ΜΟΝΑΔΕΣ: 10

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Πότε μια ακολουθία ονομάζεται αριθμητική πρόοδος; (ορισμός)

(Μονάδες 5)

Β) Να αποδείξετε ότι ο $ν^{ος}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $α_1$ και διαφορά ω είναι $α_ν = α_1 + (ν-1) .ω$

(Μονάδες 15)

Γ) Να βρείτε τον $ν^ο$ όρο της αριθμητικής προόδου 5, 8, 11, ……

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2ο

Α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Η εξίσωση $λ.x = λ-1$ έχει άπειρες ρίζες (ταυτότητα) όταν:

1) $λ=0$ και $λ=1$ 2) $λ \neq 0$ ή $λ \neq 1$ 3) για καμία τιμή του $λ \in R$ 4) για κάθε τιμή του $λ \in R$

Β) Να επιλέξετε Σωστό ή Λάθος για τις παρακάτω ισότητες:

1. $|x| > 2 \Leftrightarrow x > 2$ ή $x < -2$ Σ Λ
2. $\left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1$ Σ Λ
3. $|x+1| = 5 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -4$ Σ Λ

(Μονάδες 12)

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $(x-1)^2 + |x-1| - 2 = 0$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3ο

Α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x-1$ και διέρχεται από το σημείο Α(1, 3)

(Μονάδες 12)

Β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 2x + \mu$. Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες έχει μία ρίζα διπλή

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα θέατρο έχει 12 σειρές καθισμάτων. Η πρώτη σειρά έχει 10 καθίσματα και κάθε επόμενη σειρά έχει 3 καθίσματα περισσότερα.

Α) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; (Μονάδες 7)

Β) Πόσα καθίσματα συνολικά έχει το θέατρο; (Μονάδες 8)

Γ) Σε μία παράσταση τα εισιτήρια της $7^{ης}$ σειράς διανεμήθηκαν δωρεάν και όλα τα υπόλοιπα πουλήθηκαν προς 10 ευρώ το ένα. Πόσα χρήματα εισέπραξε το θέατρο από την παράσταση αυτή;

(Μονάδες 10)

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Γ ε ω μ ε τ ρ ί α

(21 Διαγωνίσματα)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

Να δημιουργηθούν σωστές εκφράσεις αντιστοιχίζοντας κέθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β.

Στήλη (Α)	**Στήλη (Β)**
• Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τα άκρα ενός τμήματος ΑΒ είναι:	διάμετρος του κύκλου (Ο,α)
• Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες $ε_1$ και $ε_2$ είναι:	ο κύκλος (Ο,α)
• Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν ίση απόσταση α από ένα σημείο Ο είναι:	η διχοτόμος της γωνίας
• Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές μιας γωνίας είναι:	η μεσοκάθετη
	η μεσοπαράλληλη
	το τόξο κύκλου

10 μονάδες

Β.

α. Να σχεδιάσετε σημεία τα οποία ισαπέχουν από τις πλευρές μιας γωνίας. Να προσδιορίσετε τη γραμμή στην οποία ανήκουν τα σημεία αυτά και να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας.

β. Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα μήκη τριών δεδομένων ευθυγράμμων τμημάτων για να αποτελούν αυτά πλευρές τριγώνου;

γ. Κάθε τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του. Είναι σωστός αυτός ο ισχυρισμός;

15 μονάδες

ΘΕΜΑ 2ο

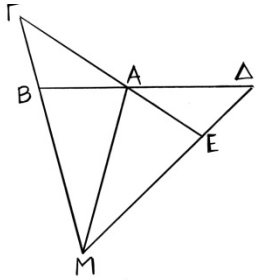
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ<ΑΓ) και στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ θεωρούμε σημεία Δ, Ε αντίστοιχα ώστε ΑΔ=ΑΓ και ΑΕ=ΒΑ. Το σημείο Μ είναι το κοινό σημείο των ευθειών ΕΔ και ΒΓ.

Α. Να βρείτε στο σχήμα αυτό όσα ζεύγη ίσων τριγώνων μπορείτε.

Β. Να δείξετε ότι η διαγώνιος του τετραπλεύρου ΑΕΜΒ διχοτομεί δυο γωνίες του.

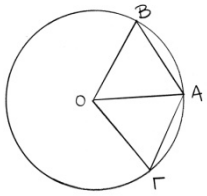
Γ. Να δείξετε ότι μια διαγώνιος του τετραπλεύρου ΑΕΜΒ είναι μεσοκάθετος της άλλης.

25 μονάδες



ΘΕΜΑ 3ο

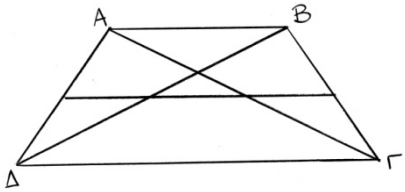
Αν Ο είναι το κέντρο του κύκλου και οι χορδές ΑΒ και ΑΓ είναι ίσες να αποδείξετε ότι:
Α. ΟΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ
Β. ΟΑ είναι μεσοκάθετος της χορδής ΒΓ.



25 μονάδες

ΘΕΜΑ 4ο

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ||ΓΔ και ΓΔ=2ΑΒ να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι χωρίζουν τη διάμεσο σε τρία ίσα τμήματα.



25 μονάδες

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του. (10 μονάδες)

Β) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **σωστές (Σ)** ή **λανθασμένες (Λ)**:

α) Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν έχει μία οξεία γωνία.

β) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.

γ) Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

δ) Αν σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, μια γωνία του ισούται με 60°, τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

ε) Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

(15 μονάδες)

ΘΕΜΑ2ο

Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{A}=90^o$, ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, ΔΕ//ΑΒ και $\hat{B}=50^o$.

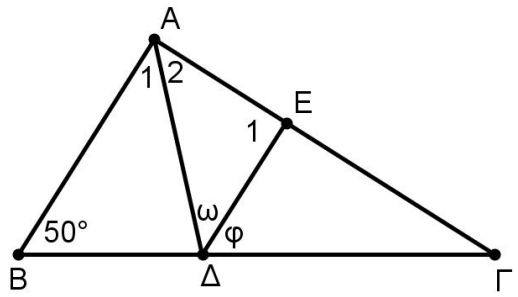
Να υπολογίσετε τις γωνίες:

α) $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ (8 μονάδες)

β) $\hat{\omega}$, $\hat{\varphi}$ και $\hat{\Gamma}$ (9 μονάδες)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(8 μονάδες)



ΘΕΜΑ 3ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι γωνίες του είναι : $A = x + 20^o$, $B = 3x – 110^o$ και $\Gamma = 170^o – 2x$.

i) Να δείξετε ότι $x = 50^o$. (10 μονάδες)

ii) Να υπολογιστούν οι γωνίες Α , Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ. (9 μονάδες)

iii) Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές και τις γωνίες του.

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται κύκλος κέντρου Κ και ΑΒ μια χορδή του. Πάνω στην ΑΒ παίρνουμε τα σημεία Λ και Μ ώστε ΑΛ= ΒΜ .

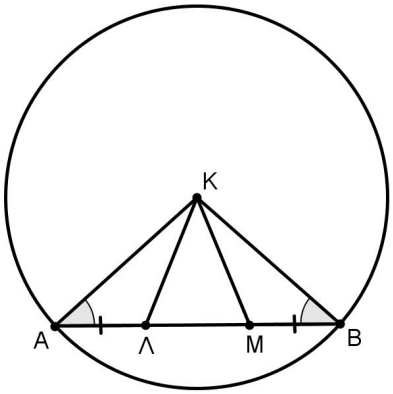
i) Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = \hat{B}$. (7 μονάδες)

ii) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΑΛ και ΚΒΜ είναι ίσα(7 μονάδες)

.

iii) (Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές

(11μονάδες)



ΘΕΜΑ 1

Α1) Να αποδείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30°, τότε η απέναντι κάθετη πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας.

[Μονάδες 9]

Α2) Να απαντήσετε αν είναι σωστή ή λάθος κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι μεταξύ τους ίσα. Σ Λ
2. Δυο τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προ ς μια. Σ Λ
3. Το άθροισμα των γωνιών ενός εξαγώνου είναι 720° Σ Λ
4. Σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιες είναι ίσες. Σ Λ
5. Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών του. Σ Λ

[Μονάδες 10]

Α3) Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις:

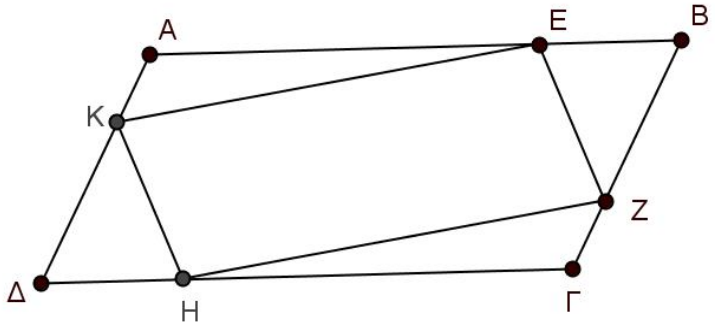
α) Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος ανήκει στην ……

β) Κάθε εσωτερικό σημείο μιας γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της ……

[Μονάδες 6]

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Κ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ =ΓΗ και ΒΖ =ΔΚ.



Α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΚ και ΖΓΗ είναι ίσα.

[Μονάδες 10]

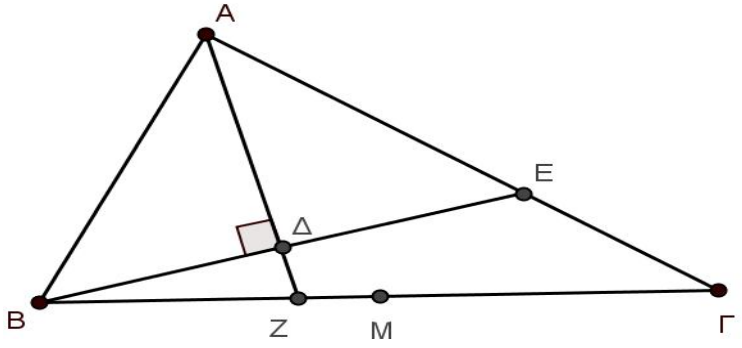
Β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΚ είναι παραλληλόγραμμο.

[Μονάδες 15]

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ> ΑΒ και Μ μέσον της ΒΓ.

Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$ που τέμνει τη ΒΓ στο Ζ και κατόπιν από την κορυφή Β φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο ΑΖ που τέμνει αυτή στο Δ και την πλευρά ΑΓ στο Ε.



Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ=ΑΕ [Μονάδες 5]

β) ΕΓ = ΑΓ−ΑΒ [Μονάδες 5]

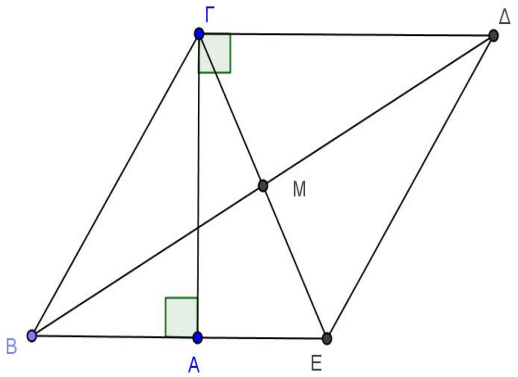
γ) $\Delta M=\frac{A\Gamma - AB}{2}$ [Μονάδες 10]

δ) $B\hat{\Delta}M = 90° + \frac{\hat{A}}{2}$ [Μονάδες 5]

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $\hat{A}$ = 90°.
Από την κορυφή Γ φέρνουμε κάθετο τμήμα στην ΓΑ το ΓΔ=ΓΒ.
Αν Μ είναι το μέσον της ΒΔ και η προέκταση της ΓΜ τέμνει την προέκταση της ΒΑ στο Ε , να αποδείξετε ότι :

α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας γωνία $\hat{B}$ [Μονάδες 5]
β) Το τετράπλευρο ΒΓΔΕ είναι ρόμβος [Μονάδες 5]
γ) Το τρίγωνο ΜΑΓ είναι ισοσκελές [Μονάδες 7]
δ) $M\hat{A}B + \Delta\hat{\Gamma}E = 180°$ [Μονάδες 8]



ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες. Δηλαδή αν $\beta > \gamma$ τότε: $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.

Μονάδες 9

Α2. *Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας τη λέξη* ***΄΄Σωστό΄΄*** *ή* ***΄΄Λάθος΄΄****, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει: $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$, *όπου* $\beta \geq \gamma$.

β. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

γ. Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει μία γωνία ορθή, τότε είναι ορθογώνιο.

δ. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^0$ είναι $2 \cdot A\Gamma = B\Gamma$, τότε $\hat{B} = 60^0$.

Μονάδες 10

Α3. *Στη* ***στήλη Α*** *δίνεται η ιδιότητα που έχουν τα σημεία του επιπέδου και στη* ***στήλη Β*** *δίνεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων αυτών. Να αντιστοιχίσετε κάθε γράμμα της* ***στήλης Α*** *στο σωστό αριθμό της* ***στήλης Β****.*

Στήλη Α	***Στήλη Β***
α. Να απέχουν μία ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.	***1.*** Η μεσοκάθετος του τμήματος
β. Να ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος.	***2.*** Η διχοτόμος της γωνίας
γ. Να ισαπέχουν από τις πλευρές μιας γωνίας.	***3.*** Ο κύκλος

Μονάδες 6

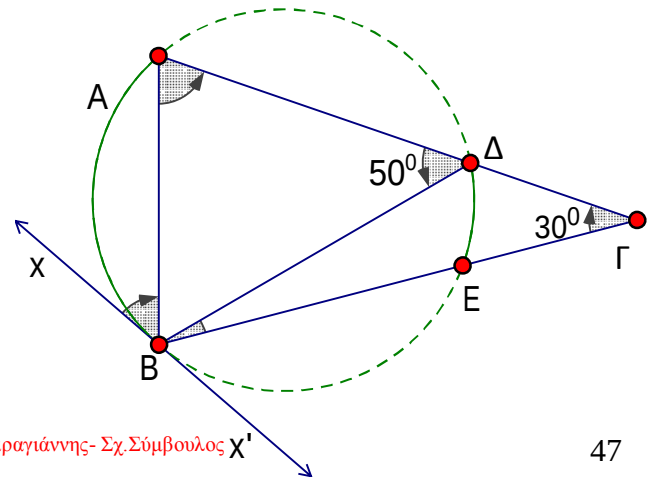
ΘΕΜΑ Β

Στο διπλανό σχήμα η ευθεία x΄x είναι εφαπτομένη στο σημείο Β.
Να βρεθούν, αφού δικαιολογηθούν:

Β1. Το μέτρο της γωνίας $A\hat{B}x$ σε μοίρες.
Μονάδες 7

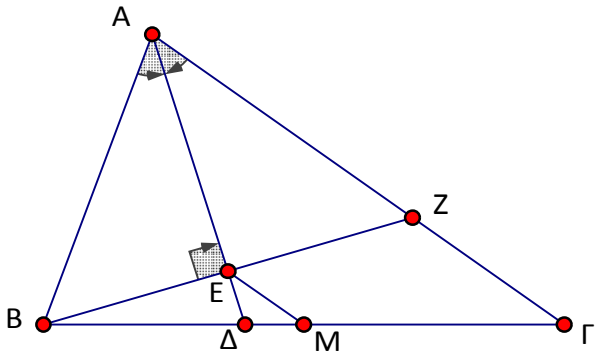
Β2. Το μέτρο της γωνίας $\Delta\hat{B}\Gamma$ σε μοίρες.
Μονάδες 10

Β3. Τα μέτρα των τόξων ΑΒ και ΔΕ σε μοίρες.
Μονάδες 8



ΘΕΜΑ Γ

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma$ φέρνω την διχοτόμο της γωνίας Α. Από την κορυφή Β φέρνω κάθετη προς την διχοτόμο ΑΔ στο σημείο Ε. Η προέκταση της ΒΕ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ζ. Αν Μ μέσο της πλευράς ΒΓ, να δείξετε ότι:



Γ1. *Το τριγ.* ΑΒΖ *είναι ισοσκελές.*

Μονάδες 8

Γ2. $EM \parallel ZΓ$ *και* $EM = \dfrac{\beta - \gamma}{2}$

Μονάδες 10

Γ3. $\Delta\hat{E}M = \dfrac{\hat{A}}{2}$ ***Μονάδες 7***

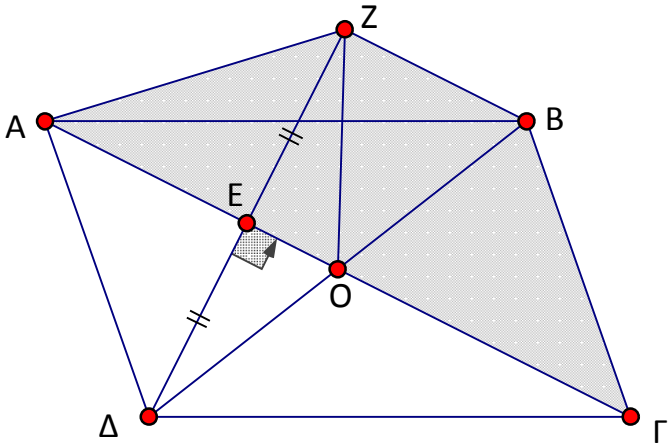
ΘΕΜΑ Δ

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος, οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ο. Από το Δ φέρνω ΔΕ κάθετη στην διαγώνιο ΑΓ και προεκτείνω κατά ίσο τμήμα ΕΖ=ΔΕ. Να δείξετε ότι:

Δ1. ΑΔ=ΑΖ και ΟΔ=ΟΖ
Μονάδες 8

Δ2. Το τρίγωνο ΔΖΒ είναι ορθογώνιο.
Μονάδες 9

Δ3. Το τετράπλευρο ΑΖΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
Μονάδες 8



ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Να αποδείξετε ότι, τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού, είναι ίσα μεταξύ τους.

(Μονάδες 13)

Β. Να δώσετε τον ορισμό της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος και να αναφέρετε μια χαρακτηριστική της ιδιότητα.

(Μονάδες 06)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν δύο κύκλοι με ακτίνες R και ρ αντίστοιχα , τέμνονται ,τότε η διάκεντρος ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους $R + \rho$.

(Μονάδες 01)

β. Δύο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές , όταν έχουν άθροισμα 90° .

(Μονάδες 01)

γ. Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

(Μονάδες 01)

δ. Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, είναι και μεταξύ τους κάθετες

(Μονάδες 01)

ε. Από κάθε σημείο εκτός ευθείας, άγεται μία μόνο κάθετη σε αυτήν.

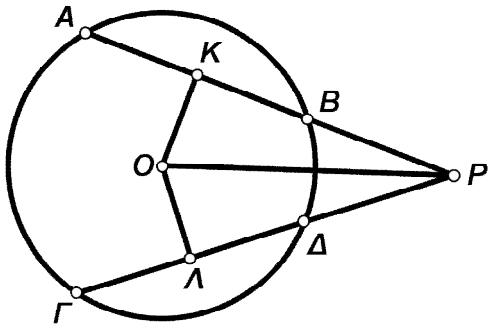
(Μονάδες 01)

ζ. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου , είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου

.

(Μονάδες 01)

ΘΕΜΑ 2^{ο}



Στον διπλανό κύκλο κέντρου O, οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι ίσες και τα σημεία K, Λ είναι τα μέσα τους αντίστοιχα .

α. Να αποδείξετε ότι $OK = O\Lambda$

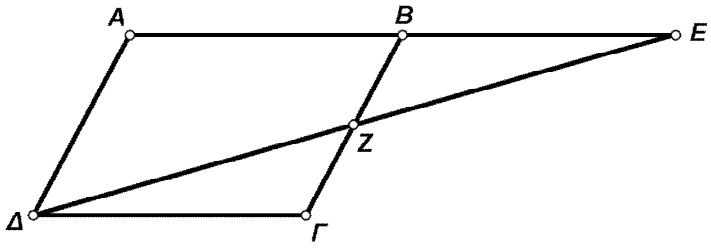
(Μονάδες 13)

β. Να αποδείξετε ότι $PK = P\Lambda$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο *ΑΒΓΔ* είναι παραλληλόγραμμο . Στην προέκταση της πλευράς *ΑΒ*, θεωρούμε το τμήμα *ΒΕ* τέτοιο ώστε, $AB = BE$.



Να αποδείξετε ότι :

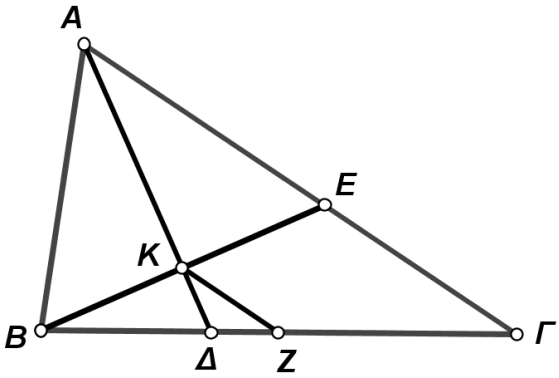
α. Το σημείο *Ζ* είναι μέσον των τμημάτων *ΒΓ* και *ΔΕ*.

(Μονάδες 12)

β. Το τετράπλευρο *ΒΕΓΔ* είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

. **ΘΕΜΑ 4^{ο}**



Στο τρίγωνο *ΑΒΓ* του διπλανού σχήματος, η *ΑΔ* είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, το *ΒΕ* είναι κάθετο στην *ΑΔ* και το *Ζ* είναι *μέσον της ΒΓ*.

Να αποδείξετε ότι :

α. Το τρίγωνο *ΑΒΕ* είναι ισοσκελές

(Μονάδες 06).

β. Το *ΚΖ* εναι παράλληλο στην *ΑΓ*.

(Μονάδες 06)

γ. $\Delta\hat{K}Z = \frac{\hat{A}}{2}$

(Μονάδες 06)

δ. $KZ = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 1ο

α) Να αποδείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30^0, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας. **(Μονάδες 9)**

β) Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο (Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο) **(Μονάδες 6)**

γ) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας συμπληρωμένες τις κάτωθι προτάσεις

1) Το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ……..... και …… .

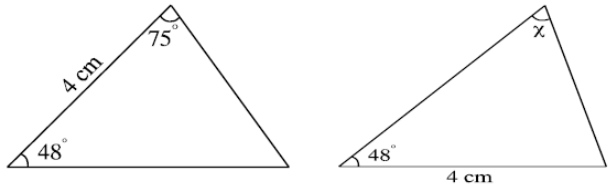
2) Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι …….. ορθές.

3) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δυό …… ……. γωνιών του τριγώνου.

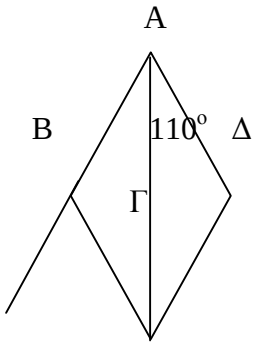
4) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι ……προς την τρίτη πλευρά και …….. **(Μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ 2ο

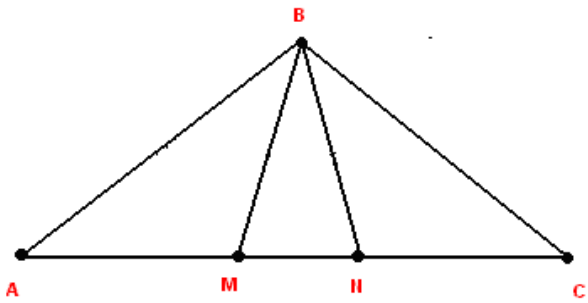
Α. Αν τα παρακάτω τρίγωνα είναι ίσα να υπολογίσετε τη γωνία x
(Μονάδες 8)



Β. Στο ρόμβο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ. **(Μονάδες 8)**

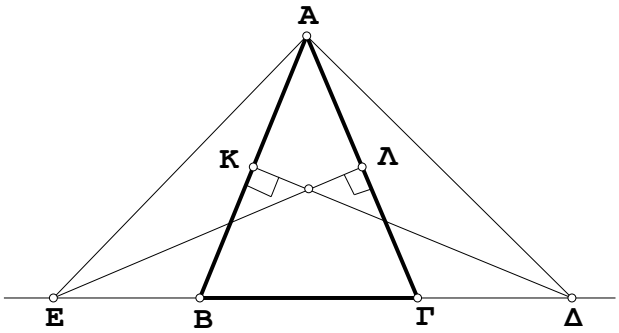


Γ. Αν στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ=ΒΓ και ΑΜ=ΝΓ να αποδείξετε ότι ΒΜ=ΒΝ **(Μονάδες 9)**



ΘΕΜΑ3ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Κ, Λ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στο Κ φέρνουμε κάθετη στην ΑΒ που τέμνει την ευθεία ΒΓ στο Δ και στο Λ φέρνουμε κάθετη στην ΑΓ που τέμνει την ευθεία ΒΓ στο Ε.



Να δείξετε ότι:

α) ΚΔ=ΕΛ. **(Μονάδες 8)**

β) ΕΒ=ΔΓ. **(Μονάδες 9)**

γ) Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. **(Μονάδες 8)**

ΘΕΜΑ4ο

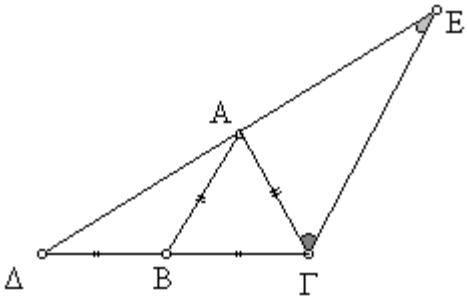
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε τη ΓΒ κατά τμήμα ΒΔ = ΒΓ και τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΕ = ΔΑ.

Να αποδείξετε ότι :

α. Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο. **(Μονάδες 8)**

β. ΑΒ // ΓΕ **(Μονάδες 8)**

γ. Το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές **(Μονάδες 9)**



ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.
(μονάδες 12)

Β. Τι ονομάζουμε ύψος τριγώνου ;
(μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
α. Ένα τετράπλευρο που οι διαγώνιοί του διχοτομούνται είναι παραλληλόγραμμο**.**
β. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία,
τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
γ. Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση ισοσκελούς τριγώνου
είναι διχοτόμος και ύψος
δ. το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.
(μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και να φέρετε μια τυχαία ευθεία (ε) που διέρχεται από το μέσο του. Να φέρετε τις αποστάσεις των Α και Β από την ευθεία (ε)
(μονάδες 10)

Β. Να αποδείξετε ότι τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχουν από την ευθεία (ε) που διέρχεται από το μέσο του.
(μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3ο

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, Δ είναι το μέσο της διαμέσου ΑΜ. Αν η ΒΔ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι $AE = \frac{E\Gamma}{2}$.

(μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε, Ζ, είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
(μονάδες 13)

Β. Αν επιπλέον στο παραπάνω τρίγωνο ΑΒΓ ΑΒ=4 cm και ΒΓ=10 cm και $\hat{B}=60^0$ να βρείτε την περίμετρο του τραπεζίου ΔΕΖΗ.
(μονάδες 12)

Θέμα 1ο

Α. Ποιο τετράπλευρο λέγεται παραλληλόγραμμο; Γράψετε τρεις ιδιότητες του παραλληλογράμμου. *(ΜΟΝ 9)*

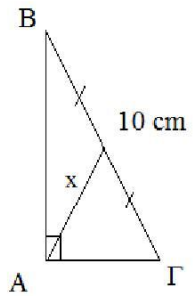
Β. Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να είναι ορθές οι παρακάτω προτάσεις:
α) Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ……
β) Ένα τρίγωνο που έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες λέγεται ……..
γ) Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ……..
δ) Σε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος προς τη βάση του είναι …… και ……
ε) Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι …….. μοίρες. *(ΜΟΝ 2x5=10)*

Γ. Σημειώσατε (**Σ**) δίπλα από κάθε σωστή πρόταση και (**Λ**) δίπλα από κάθε λάθος πρόταση.
α) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος προς την υποτείνουσα ισούται με το $\frac{1}{\ }$ της υποτείνουσας. ☐
γ) Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ισούται με το ημιάθροισμά τους. ☐ ☐
(ΜΟΝ 2x3=6)

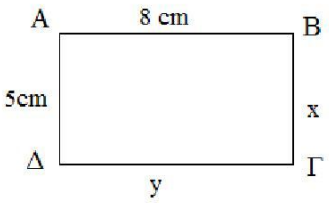
Θέμα 2ο

Να υπολογίσετε τα x και y στα παρακάτω σχήματα:

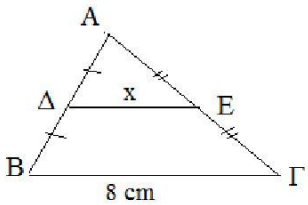
Α)

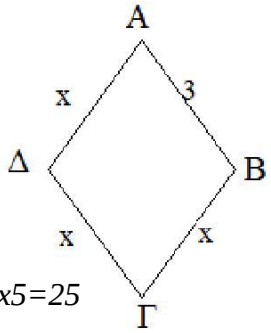


Β)

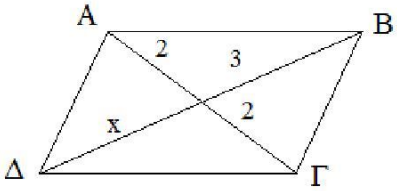


Γ)





Ε)

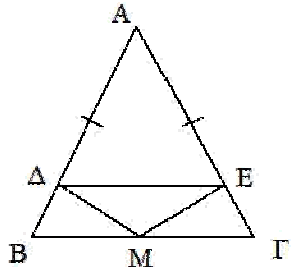


(ΜΟΝ)5x5=25

Θέμα 3ο

Α) Στο διπλανό ισοσκελές τρίγωνο δίνεται ότι το Μ είναι το μέσο του ΒΓ και ΑΔ=ΑΕ. Να συγκρίνετε τα τμήματα ΜΔ και ΜΕ. *(ΜΟΝ 20)*

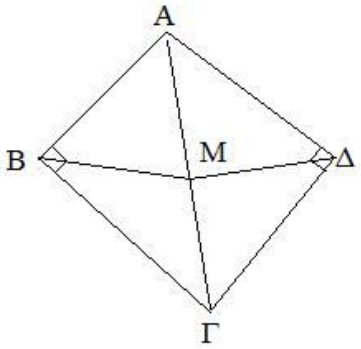
Β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές. *(ΜΟΝ 5)*



Θέμα 4ο

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος οι γωνίες Β και Δ είναι ορθές και Μ το μέσο της διαγωνίου ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι ΒΜ=ΜΔ *(ΜΟΝ25)*



ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να συμπληρώσετε τις προτάσεις:
α) Το παραλληλόγραμμο που έχει ίσες διαγώνιους λέγεται .....
β) Το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος λέγεται .....
γ) Στο τετράγωνο οι διαγώνιοι έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:
i) .....
ii) .....
iii) .....

(Μονάδες 10)

Β) Να σχεδιάσετε ένα τετράγωνο και έναν ρόμβο και να γράψετε δύο ομοιότητες και δύο διαφορές τους.

(Μονάδες 10)

Γ) Να σχεδιάσετε ένα τραπέζιο και να γράψετε τις ιδιότητες της διαμέσου του.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2ο

Α) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

(Μονάδες 12)

Β) Σε ένα ορθογώνιο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) έχουμε ΑΜ διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα και ΑΒ =4 καθώς και $M\hat{A}B = 60^o$. Να υπολογίσετε τα τμήματα ΑΜ και ΓΜ.

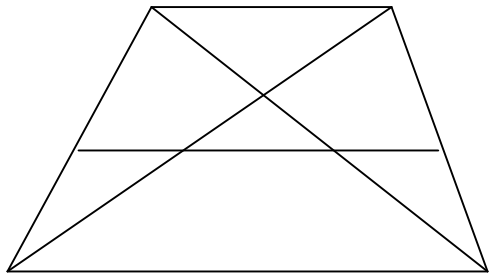
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3ο

Α) Σε ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε : Α=90ο, ΑΔ διχοτόμος της γωνίας Α και φέρνουμε ΔΕ//ΑΒ. Αν $\hat{B} = \hat{\Gamma} + 20^o$ Να υπολογίσετε όλες τις γωνίες του σχήματος.

(Μονάδες 12)

Β) Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ έχουμε ΕΖ διάμεσος και ΔΓ=7, ΛΖ =1.
Να υπολογίσετε τα τμήματα ΔΚ και ΚΛ.



(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Α) Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90^{ο}) και να φέρετε το ύψος ΑΔ, τη διχοτόμο ΒΖ και ονομάστε Ε το σημείο τομής τους.

(Μονάδες 3)

Β) Να δικαιολογήσετε γιατί ισχύουν : $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B$, $\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Delta\hat{B}E = \frac{\hat{B}}{2}$

(Μονάδες 9)

Γ) Να αποδείξετε ότι $\hat{Z} = 90^{o} - \frac{\hat{B}}{2}$ (Μονάδες 6)

Δ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές. ονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Ποιά είναι τα είδη των τριγώνων ως προς τις πλευρές; (Μον. 8)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Δυο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

ii. Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.

iii. Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

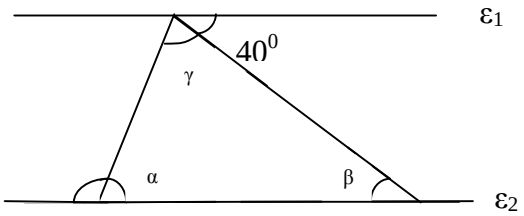
iv. Κάθε επίκεντρη γωνία ισούται με το μισό της εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο. (Μον. 8)

Γ. Να αντιστοιχίσετε κάθε είδος παραλληλογράμμου της στήλης Α με την αντίστοιχη ιδιότητα των διαγωνίων του από τη στήλη Β. (Μον. 9)

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
4. Ορθογώνιο	Α. Οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα
5. Ρόμβος	Β. Οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα και είναι ίσες
6. Τετράγωνο	Γ. Οι διαγώνιοι είναι ίσες

ΘΕΜΑ 2^{ο}

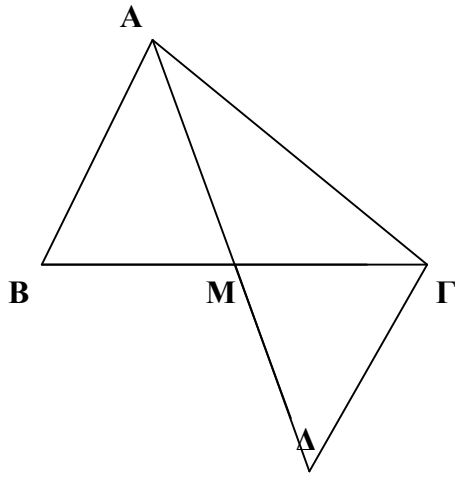
Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Να υπολογίσετε τις γωνίες α, β, γ δικαιολογώντας πλήρως τους συλλογισμούς σας.



(Μον.25)

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΑΜ θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ τέτοιο ώστε ΑΜ = ΜΔ.

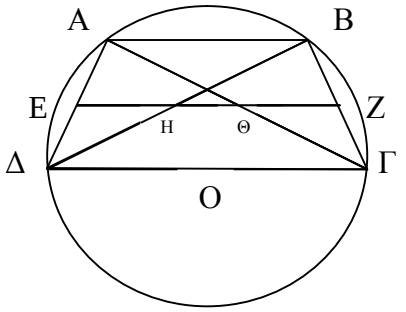


Α. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΜ, ΜΔΓ είναι ίσα (Μον. 15)

Β. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο (Μον. 10)

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 6 που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 5 και τα σημεία Ε , Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΔ , ΒΓ αντίστοιχα.



Α. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΖ , ΗΘ και ΕΗ (Μον. 15)

Β. Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$ δικαιολογώντας την απάντηση σας.

Τί είδος τριγώνου είναι το ΑΔΓ; (Μον. 10)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
Μονάδες 9

Α2. Ποια είναι η σχέση δύο γωνιών που έχουν τις πλευρές τους κάθετες όταν η μία είναι οξεία και η άλλη είναι αμβλεία ; **Μονάδες 2**

Α3. Να δώσετε τον ορισμό του ισοσκελούς τραπεζίου και γράψετε τις ιδιότητες που έχει.
Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα' αυτά μέρη γωνίες ίσες.

β) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

γ) Δύο ίσες γωνίες με κοινή κορυφή λέγονται κατακορυφήν.

δ) Η διάκεντρος δύο κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους.

ε) Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν τα αποστήματα τους είναι ίσα .

Μονάδες 10

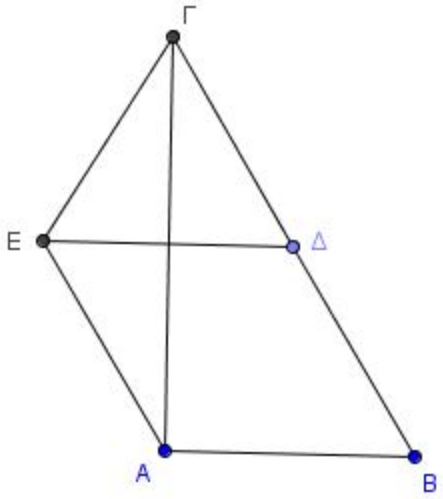
ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ =ΑΓ) με ΒΓ < ΑΒ. Αν το Δ είναι σημείο της προέκτασης της ΒΓ προς το μέρος του Γ τέτοιο ώστε να είναι ΒΔ = ΒΑ και το Ε σημείο της προέκτασης της ΑΒ προς το μέρος του Β τέτοιο ώστε να είναι ΒΕ = ΓΔ .

Β1. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΒΕ **Μονάδες 15**

Β2. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Γ



Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{A} = 90^0, \hat{\Gamma} = 30^0$.
Αν Δ το μέσο της ΒΓ , $\Delta E \perp A\Gamma$ και ΔΕ = ΑΒ ,
τότε να αποδείξετε ότι:

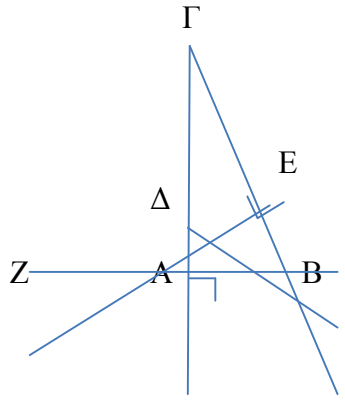
Γ1.. ΑΕ || ΒΓ . **Μονάδες 8**

Γ2. Το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι ρόμβος. **Μονάδες 9**

Γ3. ΕΓ = ΑΒ . **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90º) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε την ΔΕ κάθετη στη ΒΓ που τέμνει την προέκταση της ΒΑ στο Ζ.



Να αποδείξετε ότι :

Δ1. ΑΒ = ΒΕ
Μονάδες 4

Δ2. ΒΓ = ΒΖ
Μονάδες 4

Δ3. ΒΔ κάθετη στη ΓΖ
Μονάδες 6

Δ4. $A\hat{E}B = 90^0 - \frac{\hat{B}}{2}$
Μονάδες 5

Δ5. ΑΕ παράλληλη της ΓΖ
Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν τα αποστήματα δύο χορδών ενός κύκλου είναι ίσα, τότε να αποδείξετε ότι οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες **(Μονάδες 10)**

Α2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

1 Στο ισοσκελές τρίγωνο κάθε διάμεσός του είναι ύψος και διχοτόμος.

2 Δύο παράλληλες ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες παραπληρωματικές

3. Δύο κύκλοι $(Κ,ρ_1)$ και $(Λ,ρ_2)$ εφάπτονται εσωτερικά αν $ΚΛ=ρ_1+ρ_2$

4. Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

5. Τα εφαπτόμενα τμήματα ενός κύκλου που άγονται από σημείο εκτός του κύκλου είναι ίσα μεταξύ τους. **(Μονάδες 10)**

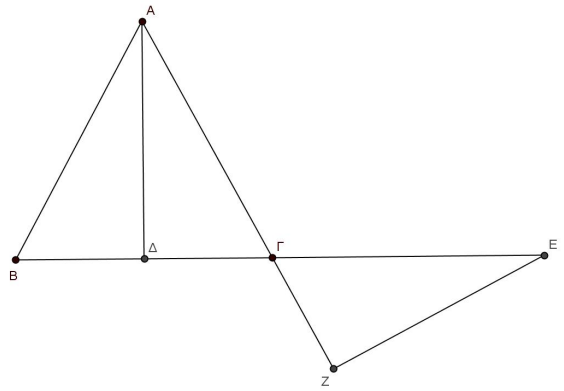
Α3. Πότε ένα τετράπλευρο λέγεται παραλληλόγραμμο. **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ,με ΑΒ=ΑΓ, και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά τμήμα ΓΕ=ΑΓ και φέρνουμε ΕΖ κάθετη στην ΑΓ.
Να αποδείξετε ότι :

Β1. Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΕΓΖ είναι ίσα. **(Μονάδες13)**

Β2. ΒΓ=2ΓΖ **(Μονάδες 12)**

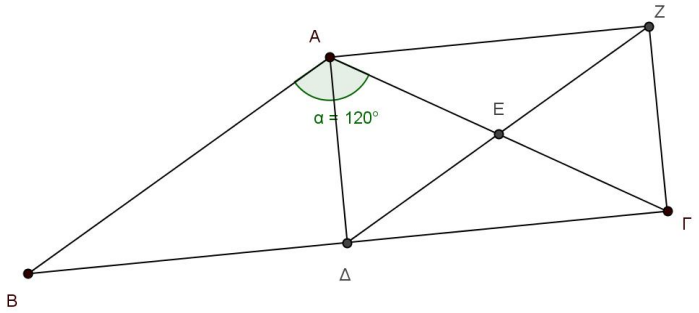


ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με γωνία Α=120^0 και Δ,Ε μέσα των ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ=ΔΕ.

Να αποδείξετε ότι

Γ1.το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι ορθογώνιο



Γ2. $AΔ = \frac{ΔZ}{2}$

Γ3.το τετράπλευρο ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο και να υπολογίσετε τις γωνίες του **(Μονάδες 8+8+9)**

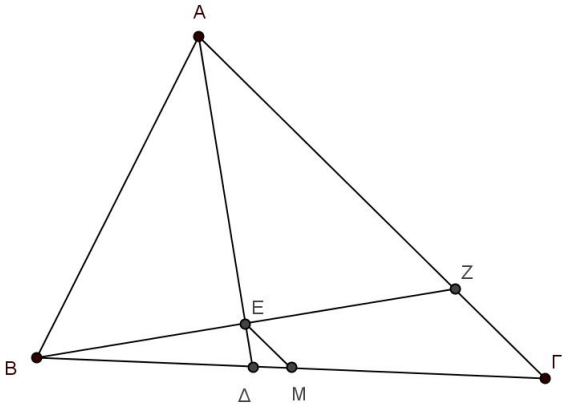
ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ , η διχοτόμος του ΑΔ Και Μ το μέσο της ΒΓ .Αν Ε η προβολή του Β στη διχοτόμο ΑΔ,και Ζ το σημείο τομής της ΒΕ με την ΑΓ να αποδείξετε ότι

Δ1. Το τετράπλευρο ΕΜΓΖ είναι τραπέζιο

Δ2. $EM=\frac{AΓ-AB}{2}$

Δ3. $ΔEM = \frac{A}{2}$ **(Μονάδες 9+8+8)**



ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να δείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι δύο ορθές.
(10 μονάδες)

Β) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες:

1) Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.
(3 μονάδες)

2) Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
(3 μονάδες)

3) Οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου διχοτομούν τις γωνίες του.
(3 μονάδες)

4) Αν δύο ευθείες είναι κάθετες στην ίδια ευθεία τότε τέμνονται.
(3 μονάδες)

5) Οι διαγώνιες ενός ρόμβου τέμνονται κάθετα.
(3 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Α) Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\hat{A} = 2\hat{B}$: και επιπλέον $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 132^o$.
Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.
(12 μονάδες)

Β) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία γωνία είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ της άλλης. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου.
(Υπόδειξη: Να πάρετε δύο περιπτώσεις)
(13 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και Μ το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ.
Προεκτείνουμε την ΑΜ προς το Μ κατά τμήμα ΜΔ έτσι ώστε ΜΔ=ΑΜ. Να δείξετε ότι:

i) Τα τρίγωνα ΜΒΔ, ΑΜΓ είναι ίσα. (10 μονάδες)
ii) ΑΒ=ΓΔ (9 μονάδες)
iii) η ΒΔ είναι κάθετη στη ΓΔ. (6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το κέντρο του.
Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΟΔ, ΟΓ αντιστοίχως να αποδείξετε ότι:

i)Τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΒ είναι ίσα.
(10 μονάδες)

ii)Το ΑΒΛΚ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
(15 μονάδες)

Θέμα 1ο

Α. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α (τετράπλευρα) με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β (ιδιότητες).

ΣΤΗΛΗ Α (τετράπλευρα)	ΣΤΗΛΗ Β (ιδιότητες)
1. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο 2. Τραπέζιο 3. Ρόμβος	α. δύο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και άνισες β. οι διαγώνιοί του είναι ίσες και τέμνονται κάθετα γ. είναι παραλληλόγραμμο και όλες οι πλευρές του είναι ίσες δ. το άθροισμα των γωνιών του είναι 400° ε. οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

(3x4 = 12 μονάδες)

Β. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ, E τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, τότε ισχύει:

α. $\Delta E = \frac{AB}{2}$

β. $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$

γ. $\Delta E = \frac{B\Gamma}{4}$

δ. $B\Gamma = \frac{\Delta E}{2}$

ε. τίποτε από τα προηγούμενα

(5 μονάδες)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σ, αν είναι σωστές ή Λ, αν είναι λανθασμένες.

α. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
β. Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες.
γ. Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μικρότερη από κάθε μία από τις απέναντι εσωτερικές.
δ. Το τετράγωνο είναι ταυτόχρονα ορθογώνιο και ρόμβος.

(2x4 = 8 μονάδες)

Θέμα 2ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^o$ με $B\Gamma = 2\alpha$ και $A\Gamma = \alpha$. Οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE τέμνονται στο σημείο K .

Α. Να υπολογίσετε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $\Gamma\hat{E}A$. (13 μονάδες)

Β. Να υπολογίσετε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $B\hat{K}\Gamma$. (12 μονάδες)

Θέμα 3ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma(AB = A\Gamma)$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που τέμνονται στο σημείο H .

Α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ είναι ίσα. (9 μονάδες)

Β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές. (8 μονάδες)

Γ. Η AH είναι διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ και γιατί; (8 μονάδες)

Θέμα 4ο

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 45^o$ και $\hat{\Gamma} = 15^o$. Στην προέκταση της πλευράς BA προς το μέρος του A παίρνουμε τμήμα $A\Delta = 2(AB$. Έστω ΔE ($A\Gamma$.

Α. Να δείξετε ότι $AB = AE$ (10 μονάδες)

Β. Να δείξετε ότι $E\Delta = EB$ (5 μονάδες)

Γ. Να δείξετε ότι $E\Delta = E\Gamma$ (5 μονάδες)

Δ. Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$. (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Να αποδείξετε ότι :
Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού, είναι ίσα μεταξύ τους .

Β. Πότε ένα παραλληλόγραμμο ονομάζεται ρόμβος;

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λάθος(Λ) :
1) Δύο γωνίες λέγονται συμπληρωματικές αν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία.
2) Κάθε τρίγωνο έχει τουλάχιστον δύο οξείες γωνίες.
3) Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.
4) Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία έχουν ένα κοινό σημείο.
5) Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια κάθετη πλευρά του ισούται με το μισό της υποτείνουσας, τότε η απέναντι γωνία του είναι 30° .

(Μονάδες : 10+5+10)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 144^{\circ}$.

α) Να δείξετε ότι $\hat{\Gamma} = 36^{\circ}$

β) Αν $\hat{A} = 3\hat{B}$, να υπολογισθούν οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$.

γ) Φέρνουμε το ύψος ΑΔ . Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$.

(Μονάδες : 7+11+7)

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ , φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, που τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές .

β) Να δείξετε ότι ΕΓ + ΒΓ = ΑΒ .

γ) Αν $B\hat{A}\Delta = 2A\hat{\Delta}\Gamma$ και Ε μέσο της ΓΔ, να δείξετε ότι $A\Gamma \perp \Delta A$.

(Μονάδες : 9+9+7)

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 30^{\circ}$, φέρνουμε την κάθετο στο μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Δ .

α) Να δείξετε ότι ΜΔ = ΑΔ

β) Να δείξετε ότι ΑΒ = 3ΜΔ

γ) Προεκτείνουμε τη ΓΑ κατά ΑΕ = ΓΑ . Να δείξετε ότι η ΓΔ διχοτομεί τη ΒΕ .

(Μονάδες : 9+9+7)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου, είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Μονάδες 10

Β. Να διατυπώσετε τις ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.
2. Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μικρότερη από κάθε μία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
3. Αν δ η διάκεντρος των κύκλων (Κ,R) και (Λ,ρ) τότε οι κύκλοι αυτοί τέμνονται αν και μόνον αν $\delta = R + \rho$.
4. Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του.
5. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν - γώνου είναι 4 ορθές.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Προεκτείνουμε τη βάση του ΒΓ και εκατέρωθεν αυτής παίρνουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ ώστε ΒΔ=ΓΕ. Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι :

Α. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

Β. Οι κορυφές Β και Γ ισαπέχουν από τις ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.

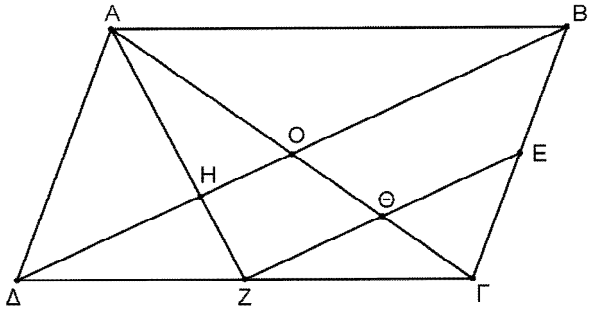
Μονάδες 8

Γ. Το τετράπλευρο ΑΚΛΜ είναι ρόμβος.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με κέντρο το σημείο Ο. Έστω Ζ είναι το μέσο της ΔΓ και Ε το μέσο της ΒΓ. Αν το ΑΖ τέμνει την ΒΔ στο Η και το ΖΕ την ΑΓ στο Θ ,να αποδείξετε ότι :



Α. $\Delta B = 2ZE$

Μονάδες 8

Β. $\Gamma\Theta = \frac{A\Gamma}{4}$

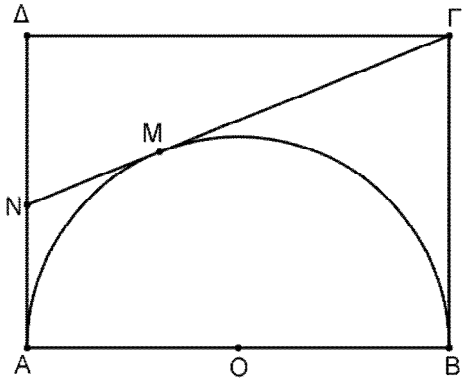
Μονάδες 9

Γ. $OH = \frac{B\Delta}{6}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Στο εσωτερικό ενός ορθογώνιου ΑΒΓΔ, θεωρούμε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ. Από την κορυφή Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΜ στο ημικύκλιο, που η προέκτασή του τέμνει την πλευρά ΑΔ στο Ν, (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα).



Να αποδείξετε ότι :

Α. $AN + B\Gamma = \Gamma N$

Μονάδες 8

Β. $N\hat{O}\Gamma = 90^{\circ}$

Μονάδες 8

Γ. Η προέκταση της ΑΜ διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΔΓ.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

(Μονάδες 12)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου τέμνονται κάθετα.

β) Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες όταν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

γ) Οι διαγώνιες κάθε παραλληλογράμμου είναι ίσες.

δ) Δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά αν $ΚΛ = R + ρ$.

(Μονάδες 08)

Γ. Να διατυπώσετε τον ορισμό του ισοσκελούς τραπεζίου και να γράψετε τις ιδιότητες του.

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 2ο

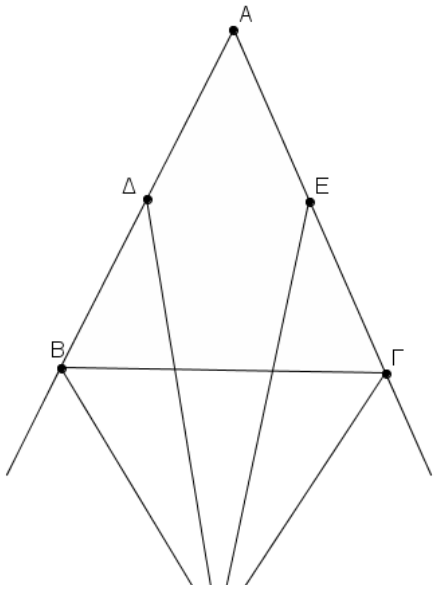
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ και Δ, Ε είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών του $\hat{B}$, $\hat{Γ}$ τέμνονται στο Μ.
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΒΜΔ και ΓΜΕ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται κύκλος (Ο, R) με διάμετρο ΑΒ. Οι ΑΓ, ΒΓ είναι χορδές του κύκλου με ΑΓ= R και Μ, Ν τα μέσα τους αντίστοιχα. Αν η προέκταση της ΟΝ τέμνει τον κύκλο στο Ε να δείξετε ότι:

α) $\widehat{ΑΓΒ} = 90^\circ$ και $\widehat{ΑΒΓ} = 30^\circ$.

(Μονάδες 07)

β) Το τετράπλευρο ΟΜΓΝ είναι ορθογώνιο.

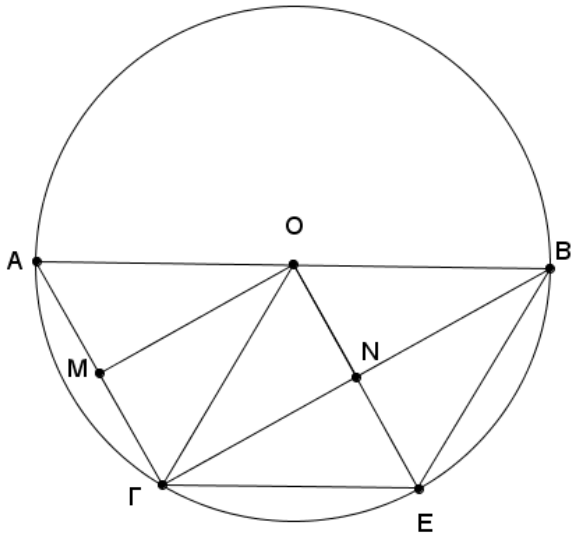
(Μονάδες 06)

γ) Το Ε είναι μέσο του τόξου $ΒΓ$.

(Μονάδες 06)

δ) Το τετράπλευρο ΟΓΕΒ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 06)



ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ, ΔΓ οι βάσεις του) με ΑΒ=ΑΔ και $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^o$.

Αν Κ , Λ είναι τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα και ΚΛ= $\frac{AB}{2}$

να δείξετε ότι:

α) ΔΓ=2ΑΒ **(Μονάδες 08)**

β) η ΒΛ είναι κάθετη στην ΔΓ **(Μονάδες 09)**

γ) $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$ **(Μονάδες 08)**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

Μονάδες 10

Α2. Να διατυπώσετε τον ορισμό του ρόμβου.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Δύο κύκλοι (Κ, ρ) και (Λ, R) με ΚΛ = ρ + R εφάπτονται εσωτερικά.

β. Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου προς την βάση του είναι και διάμεσος.

γ. Κάθε ρόμβος που έχει ίσες διαγώνιες είναι τετράγωνο.

δ. Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών κάθε τριγώνου λέγεται βαρύκεντρο.

ε. Αν ένα τετράπλευρο έχει τρεις ορθές γωνίες τότε είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ και ΒΔ διχοτόμος του. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε.

Β1. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

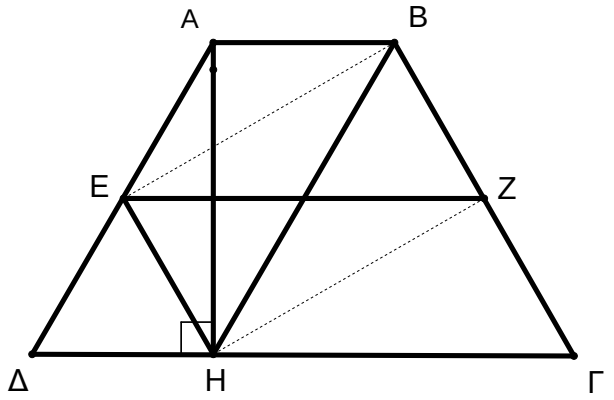
Β2. Αν η παράλληλη από το Ε προς την ΑΓ τέμνει την ΒΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΔΕΖ είναι ρόμβος.

Β3. Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΒΔ και ΓΕ να αποδείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.

Μονάδες 8 + 9 + 8 = 25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ έτσι ώστε ΑΒ = 4, ΑΔ = 8 και $\hat{\Delta} = 60^0$. Αν ΕΖ η διάμεσος του τραπεζίου και ΑΗ το ύψος του, τότε:



Γ1. Να υπολογίσετε την ΔΗ.

Γ2. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΗ είναι ισόπλευρο.

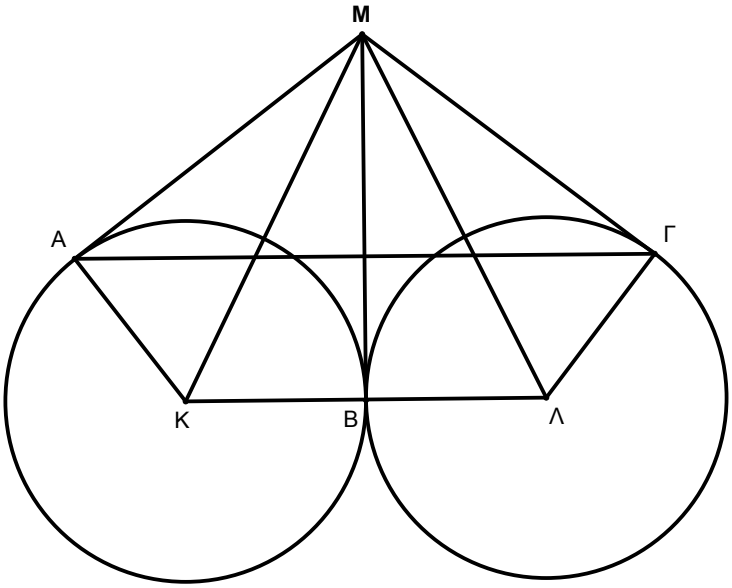
Γ3. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΗΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Γ4. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΗΖΒ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 5 + 6 + 7 + 7 = 25

ΘΕΜΑ Δ

Οι κύκλοι του παρακάτω σχήματος είναι ίσοι και εφάπτονται στο Β. Αν ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ είναι εφαπτόμενα τμήματα στους κύκλους αυτούς, να αποδείξετε ότι:



Δ1. ΜΑ = ΜΓ

Δ2. Το τρίγωνο ΜΚΛ είναι ισοσκελές.

Δ3. Η ΜΒ είναι κάθετη στην ΑΓ.

Δ4. Το τετράπλευρο ΑΚΛΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 7 + 7 + 6 + 5 = 25

ΘΕΜΑ Α

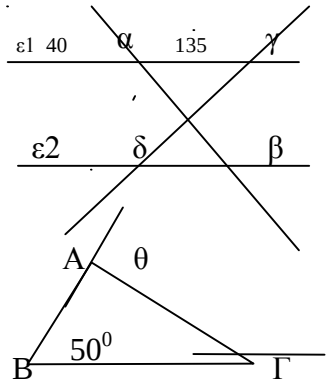
α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.
(Μονάδες 5)

β) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις:
i) το ισόπλευρο τρίγωνο έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
ii) συμπληρωματικές λέγονται οι γωνίες που έχουν άθροισμα 180^0.
iii) οι προσκείμενες στη βάση γωνίες σε ένα ισοσκελές τρίγωνο είναι ίσες.
iv) οξυγώνιο λέγεται το τρίγωνο που έχει μία ορθή γωνία.
(Μονάδες 10)

γ) Ποιο τετράπλευρο λέγεται παραλληλόγραμμο;Ποιες είναι οι ιδιότητες των παραλληλογράμμων; (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

α) Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες ($ε_1 // ε_2$).
i) Πως ονομάζονται οι γωνίες α και β;
ii) Να υπολογίσετε τις γωνίες α,β,γ,δ και ε.
(Μονάδες 10)



β) Να υπολογίσετε την γωνία θ στο διπλανό σχήμα. (Μονάδες 5)

γ) Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και Μ το μέσω της πλευράς ΒΓ.Προεκτείνουμε την διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΚ=ΑΜ

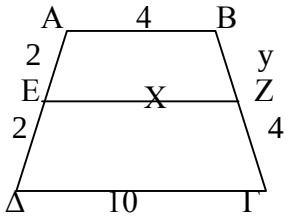
i)Να δείξετε ότι τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΚ είναι ίσα
ii)Να δείξετε ότι ΑΒ=ΚΓ (Μονάδες 10)

Β Μ Γ

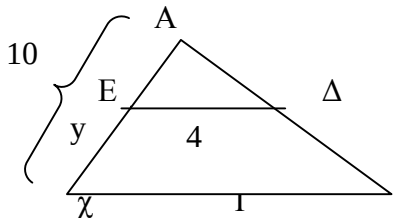
Κ

ΘΕΜΑ Γ

α) Δίνεται το τραπέζιο του διπλανού σχήματος.
Να βρείτε τα ΒΖ και ΕΖ
(Μονάδες 5)



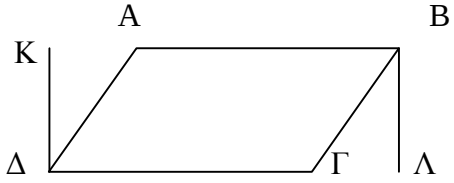
β) Στο διπλανό τρίγωνο ισχύει ότι
Ε μέσω της ΑΒ και ΕΔ// ΒΓ.
Επίσης ΑΒ=10 και ΕΔ=4
Να βρείτε τα τμήματα ΒΓ και ΕΒ
(Μονάδες 10)



γ) Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος. Φέρνουμε την ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και την ΒΛ κάθετη στην πλευρά ΔΓ.

i)Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΚ και ΒΓΛ είναι ίσα. (Μονάδες 5)

ii)Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΒΛΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)



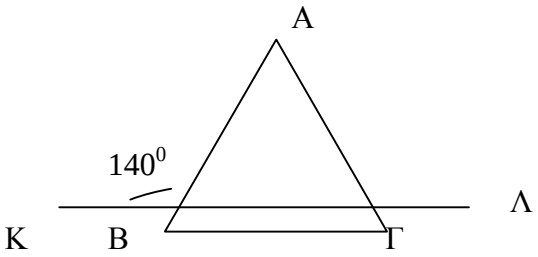
ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ=ΑΓ) του παρακάτω σχήματος.
Στην ευθεία του τμήματος ΒΓ παίρνουμε τμήματα ΒΚ=ΓΛ.

i)Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΓΛ. (Μονάδες 10)

ii)Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΚ και ΑΛ. (Μονάδες 10)

iii)Αν η γωνία $\hat{B}_{εξ}=140^0$ να υπολογίσετε την γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες)



ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε ένα παραλληλόγραμμο λέγεται ορθογώνιο; Να αναφέρετε δύο κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο.

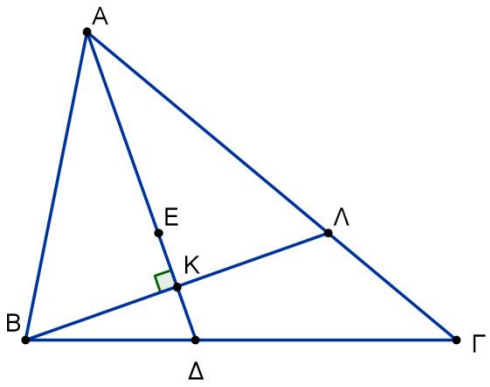
Α2. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι ορθογωνίου είναι ίσες.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1.Η κοινή χορδή δύο ίσων τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.
2.Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.
3.Αν τα αποστήματα δύο χορδών ενός κύκλου είναι άνισα, τότε και οι χορδές αυτές είναι άνισες.
4.Η διάμεσος ενός τραπεζίου είναι ίση με την ημιδιαφορά των βάσεων του.
5.Κάθε σημείο στο εσωτερικό γωνίας το οποίο ισαπέχει από τις πλευρές της, βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της.
ΜΟΝΑΔΕΣ: 8 + 7 + 10 = 25

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος του. Από την κορυφή Β φέρνουμε κάθετη στην ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΔ στο Κ και την ΑΓ στο Λ. Να δείξετε ότι:



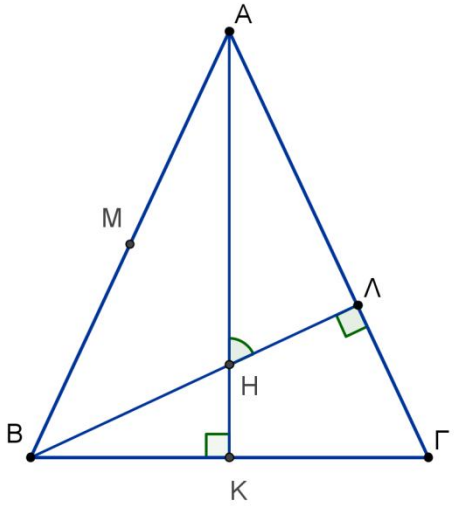
Β1. το τρίγωνο ΑΒΛ είναι ισοσκελές

Β2. το τρίγωνο ΒΔΛ είναι ισοσκελές

Β3. τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΛΔ είναι ίσα

Β4. αν Ε σημείο της ΑΔ τέτοιο ώστε το Κ να είναι το μέσο του ΕΔ, τότε το τετράπλευρο ΒΔΛΕ είναι ρόμβος.
ΜΟΝΑΔΕΣ: 6 + 7 + 6 + 6 = 25

ΘΕΜΑ Γ
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ, Μ το μέσο της ΑΒ και ΑΚ, ΒΛ ύψη. Αν Η το σημείο τομής των ΑΚ, ΒΛ και ισχύει $\widehat{ΑΗΛ} = 65^o$, τότε:



Γ1. να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{ΗΑΛ}$, $\widehat{ΗΒΚ}$

Γ2. να δείξετε ότι ΜΒΛ ισοσκελές

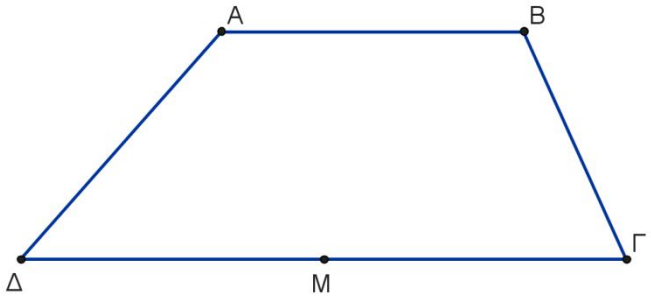
Γ3. να δείξετε ότι ΜΚ // ΑΓ

Γ4. να δείξετε ότι η ΜΚ είναι μεσοκάθετος του ΒΛ.

ΜΟΝΑΔΕΣ: 6 + 6 + 6 + 7 = 25

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΓΔ = 2ΑΒ = 2ΑΔ. Αν Μ το μέσο του ΓΔ, τότε να αποδείξετε ότι:



Δ1. ΑΔ=ΒΜ,

Δ2. ΑΜ⊥ ΒΔ και ότι η ΔΒ διχοτομεί τη γωνία Δ,

Δ3. $\widehat{\Delta B\Gamma} = 90^o$.

Δ4. Αν επιπλέον η γωνία Γ είναι ίση με 60°,

να αποδείξετε ότι το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές.

ΜΟΝΑΔΕΣ: 6 + 6 + 6 + 7 = 25

ΘΕΜΑ 1ο

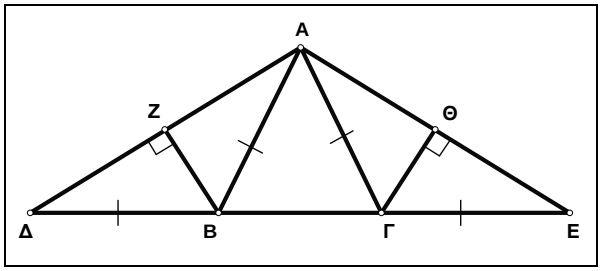
Α) Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:
α) Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες (Μονάδες 7)
β) Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος. (Μονάδες 6)

Β) Να χαρακτηρίσετε Σ ή Λ τις παρακάτω προτάσεις:
α) Το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος είναι τετράγωνο Σ Λ
β) Η διάμεσος ορθογωνίου είναι το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί Σ Λ
γ) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία τότε τα τρίγωνα είναι ίσα Σ Λ
δ) Η διάμεσος ενός τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις και ισούται με το ημιάθροισμά τους. Σ Λ

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = A\Gamma = B\Delta = \Gamma E$, η BZ είναι κάθετη στην $A\Delta$ και $\Gamma\Theta$ είναι κάθετη στην AE.



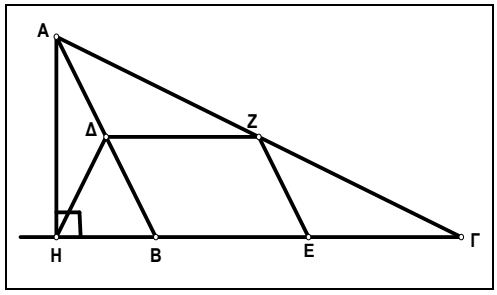
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα. ***(Μονάδες 10)***

β) Να αποδείξετε ότι $BZ = \Gamma\Theta$ ***(Μονάδες 5)***

γ) Αν η γωνία $A\Delta B$ είναι ίση με 33^0 να υπολογίσετε σε μοίρες τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

ΘΕΜΑ 3ο

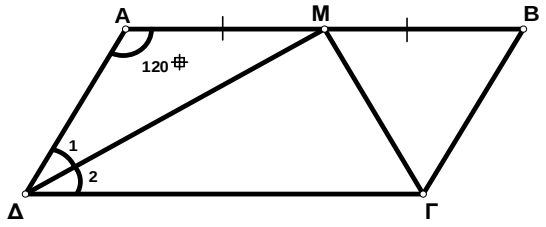
Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma A$ αντίστοιχα. Αν το AH είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΔΖΕΒ είναι παραλληλόγραμμο ***(Μον. 10)***
β) $H\Delta = ZE$ ***(Μον.10)***
γ) Το τετράπλευρο $H\Delta ZE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. ***(Μον 5)***

ΘΕΜΑ 4^{Ο}

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ στο οποίο $\hat{A}=120^0$ και η διχοτόμος



της γωνίας $\hat{A}$ διέρχεται από το μέσο $Μ$ της $ΑΒ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΜΔ$ είναι ισοσκελές.
(Μονάδες 7)

β) Το τρίγωνο $ΜΒΓ$ είναι ισόπλευρο
(Μονάδες 8)

γ) Αν $ΑΗ$ είναι το κάθετο τμήμα προς τη $ΔΓ$ να αποδείξετε ότι: $ΑΗ=\frac{ΔΜ}{2}$

(Μονάδες 10)

Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Ά λ γ ε β ρ α

(19 Διαγωνίσματα)

ΘΕΜΑ 1ο.

α. Τα πολυώνυμα $P(x)= \alpha_\mu x^\mu + \dots \alpha_1 x + \alpha_o$ και $q(x)= \beta_\nu x^\nu + \dots \beta_1 x + \beta_o$ με $\mu > \nu$ πότε λέμε ότι είναι ίσα;

β. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x-ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ. Είναι δηλαδή υ= P(ρ). Είναι σωστός αυτός ο ισχυρισμός;

γ. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} \dots \alpha_1 x + \alpha_o=0$ με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0. Είναι σωστός αυτός ο ισχυρισμός;

δ. Τα πολυώνυμα $P(x)= x^3 -\beta x + 5$ και $q(x)= x^3 + \beta x^2 + 5-\beta$, $\beta \times \mathbb{R}$ είναι ίσα όταν ο β ισούται με:
α. -1 β. 0 γ. 1 δ. 5 ε. -5

ε. Η εξίσωση $x^3-5x^2+\kappa x+2=0$, $\kappa \times \mathbb{Z}$, αποκλείεται να έχει ρίζα τον αριθμό:
α. -1 β. 1 γ. -2 δ. 2 ε. 3

25 μονάδες

ΘΕΜΑ 2ο .

Να βρείτε τα α και β ώστε τα πολυώνυμα x-1 και x+2 να είναι παράγοντες του πολυωνύμου
$P(x)= (2\alpha-\beta)x^3+3\alpha x^2-(5\beta-2\alpha)x + \alpha + \beta + 1$

25 μονάδες

ΘΕΜΑ 3ο .

Α. Να βρεθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικοί αριθμοί:
α. συν330ο = ……
β. συν (-300ο) = ……
γ. συν (-210ο) = ……
δ. συν240ο = ……

Β. 1. Από τις παρακάτω τιμές δεν μπορεί να είναι ημίτονο γωνίας η:

α. $\frac{1}{2}$ β $-\frac{3}{2}$. γ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ δ. $-\frac{1}{2}$ ε. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Για οποιαδήποτε γωνία x:
α. συνx <-1 , β. συνx >1 , γ. -1≤ συνx ≤ 1 , δ. το συνx δεν ορίζεται , ε. δεν ισχύει κανένα από τα προηγούμενα.

3. Να λύσετε την εξίσωση $ημ^2x + 5συν^2x=4$

25 μονάδες

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=2x^2-4x-6$

α. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1	ο	1	2	3	4
φ(x)							

β. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση φ(x) είναι άρτια ή περιττή.

γ. Να επιλύσετε αλγεβρικά τις φ(x)=0 και της φ(x)>0.

δ. Να γράψετε σε ποια διαστήματα είναι γνησίως αύξουσα και σε ποια γνησίως φθίνουσα.

ε. Για ποια τιμή του x η φ έχει ελάχιστη τιμή και ποια είναι αυτή;

στ. Έχει η γραφική παράσταση άξονα συμμετρίας; Ποιος είναι αυτός;

25 μονάδες

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει ότι $\beta = \frac{a+\gamma}{2}$ (10 μονάδες)

Β) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **σωστές (Σ)** ή **λανθασμένες (Λ)**:

α) Μια ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία 90°.

β) Η κλίση της ευθείας y = αx+β είναι ίση με το συντελεστή του x.

γ) Η ευθεία y=αx δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Τα σημεία του άξονα y΄y έχουν τεταγμένη ίση με το μηδέν.

ε) Η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

(15 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Οι αριθμοί 4x-1 , x+2 και 2x-3 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι x=2. (10 μονάδες)

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου (α_ν). (4 μονάδες)

γ) Αν ο αριθμός 2x-3 είναι ο $6^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου, να βρείτε:

i) τον πρώτο όρο της προόδου. (5 μονάδες)

ii) το άθροισμα S_6 των 6 πρώτων όρων της προόδου. (6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)= \sqrt{x+1} +\alpha$ και το σημείο M(3, 5) που ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

i) Να βρείτε την τιμή του α . (8 μονάδες)

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (7 μονάδες)

iii) Για α=3 , να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης f με τους άξονες x΄x και y΄y . (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται η παραβολή με εξίσωση $f(x) = 2x^2 -3x -2$ και η ευθεία (ε) με εξίσωση y = - 5x - 3. Να βρείτε:

α) Τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της παραβολής. (4 μονάδες)

β) Την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της παραβολής . (6 μονάδες)

γ) Τα σημεία τομής της παραβολής και της ευθείας (ε). (8 μονάδες)

δ) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία (ε). (7 μονάδες)

ΘΕΜΑ 1

Α. Αν α > 0 με α ≠ 0,τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$, να αποδείξετε ότι

$$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$$

[Μονάδες 12]

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

[Μονάδες 5]

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σωστές (Σ) ή λάθος(Λ).

1. Για α > 0 , α ≠ 1 και θ > 0 ισχύει $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$
2. Για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει $\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = -\text{συνω}$
3. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
4. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με 0 < α < 1 είναι γνησίως φθίνουσα στο R

[Μονάδες 8]

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$, όπου x πραγματικός αριθμός.

Α) Αν η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου P(x) για x = 3 είναι ίση με 30 και το x−1 είναι παράγοντας του P(x), να αποδείξετε ότι α = −1 και β = −7

[Μονάδες 13]

Β) Κατόπιν αφού αντικαταστήσετε τα α, β που βρήκατε στο ερώτημα Α), να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$

[Μονάδες 12]

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha + \ln(e^x - 2)$, όπου α πραγματικός αριθμός.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

[Μονάδες 8]

Β) Να βρείτε το α ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο A(ln3,1) [Μονάδες 9]

Γ) Για α = −1 να λύσετε την εξίσωση f(x) = 0

[Μονάδες 8]

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)\cdot x^3 + (\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta)\cdot x + \eta\mu\theta$,

όπου $\theta \in [0,\pi]$.

Α) Αν το P(x) έχει ρίζα το 1, να βρείτε το θ. [Μονάδες 12]

Β) Αν $\theta = \pi$ να λυθεί η ανίσωση $\frac{1}{x-3} \geq P(-1)$, για $x \neq 3$ [Μονάδες 13]

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να αποδείξετε ότι : ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

(Μονάδες 07)

Β) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **¨Σωστό¨** αν η πρόταση είναι **σωστή** και **¨Λάθος¨** αν η πρόταση είναι **λάθος** , δίπλα στο **γράμμα** που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\eta\mu x=\frac{3}{5}$ τότε $\sigma\upsilon\nu x=\frac{4}{5}$ για $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

β. $\sigma\upsilon\nu(180^o-\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$.

γ. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

δ. Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=a^x$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε α>0 .

ε. Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{1}{e}\right)^x$ παίρνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θετικές τιμές.

στ. Το υπόλοιπο της διαίρεσης υ ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι το $\upsilon=P(\rho)$.

(Μονάδες 12)

Γ) Να συμπληρώσετε στην κόλλα σας τις ισότητες

α. Αν $\eta\mu x$ = ημα τότε x=……ή …… $k\in\mathbb{Z}$
β. Αν $\varepsilon\varphi x$ = εφα τότε x=…… . $k\in\mathbb{Z}$
γ. Αν $\sigma\upsilon\nu x$ = συνα τότε x=……ή…… $k\in\mathbb{Z}$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ (1)

α. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου P(x) για x =-1.

(Μονάδες 06)

β. Να δείξετε ότι το x+2, είναι παράγοντας του P(x).

(Μονάδες 06)

γ. Να λύσετε την εξίσωση : P(x)=0

(Μονάδες 07)

δ. Να λύσετε την ανίσωση : P(x) ≥ 0

(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{a+3}{3-a}\right)^{x}$

α. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 08)

β. Να βρείτε τις τιμές του α ,ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 08)

γ. Για **α=2** να λύσετε την εξίσωση : $f(x+1)=f(x)+4$

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P(x)}=\mathrm{x}^4+(\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta)\cdot\mathrm{x}^3-3\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}-1$

Αν το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ τότε :

α. Να υπολογίσετε την τιμή του **θ** $\in(0,\pi]$

(Μονάδες 15)

β. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο : $Q(x)=\mathrm{P}(2x-7)$ διαιρείται με το x 4.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x – ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x = ρ, είναι δηλαδή: υ = P(ρ)
Μονάδες 15

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας **Σωστό** ή **Λάθος**.

(i). Αν για την ορίζουσα D ενός γραμμικού συστήματος 2x2 ισχύει ότι $D \neq 0$ τότε το σύστημα είναι είτε Αδύνατο είτε Αόριστο

(ii). Αν $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ τότε $\varepsilon\varphi\omega < 0$

(iii). Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = 2$ είναι Αδύνατη

(iv). Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0

(v). Το x + 1 είναι παράγοντας του P(x) αν και μόνο αν P(1) = 0

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το σύστημα (Σ): $\begin{cases} (\lambda-1)x + 2y = \lambda - 2 \\ (\lambda-1)x + \lambda y = 3(\lambda-2) \end{cases}$ $\lambda \in$ R

Β1. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες D, D_x, D_y
Μονάδες 9

Β2. Να διερευνήσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του λ
Μονάδες 16

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $(1+\sigma\varphi x)^2 + (1-\sigma\varphi x)^2 = \frac{2}{\eta\mu^2 x}$
Μονάδες 13

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση: $(1+\sigma\varphi x)^2 + (1-\sigma\varphi x)^2 = 4$
Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 20$, $\alpha, \beta \in$ R

Δ1. Αν το P(x) έχει παράγοντα το x + 2 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x + 1 είναι ίσο με –16 να δείξετε ότι: α = 12 και β = 6
Μονάδες 10

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση: P(x) = 0
Μονάδες 10

Δ3. Για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x ;
Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 1ο

1. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει: $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$ **(Μον. 10)**
2. Έστω $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$. Τι ονομάζουμε **λογάριθμο** του αριθμού θ ως προς βάση α ; **(Μον. 5)**
3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
   α) Αν $0<\alpha \neq 1$ τότε για κάθε $\theta>0$ ισχύει: $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \alpha$.
   β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x-ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ. Δηλαδή υ=P(ρ).
   γ) Η συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$ με $\alpha>1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$
   δ) Αν $0<\alpha \neq 1$ τότε $\log_\alpha \alpha = 1$
   ε) Αν $0<\alpha \neq 1$ και $\theta_1, \theta_2 > 0$ τότε $\log_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\log_a \vartheta_1}{\log_\alpha \theta_2}$ **(Μον. 5· 2=10)**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 5(\psi - 1) = (2-\lambda)\chi \\ \chi - 5 = -(\lambda+2)\psi \end{cases}$

1. Να αποδείξετε ότι για $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$ το σύστημα έχει μοναδική λύση και να βρεθεί αυτή η λύση. **(Μον.12)**
2. Να αποδείξετε ότι για λ=-3 το σύστημα είναι αδύνατο. **(Μον. 6)**
3. Να αποδείξετε ότι για λ=3 το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και να βρεθούν ποιάς μορφής είναι οι λύσεις αυτές. **(Μον. 7)**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο P(x)= $2\chi^3 - \kappa\chi^2 - 4\chi + 3$ όπου $\kappa \in R$ το οποίο έχει παράγοντα το **χ+1.**

1. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού **κ**. **(Μον. 8)**

2. Αν **κ = 5** τότε:
   α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x): (x+2) . **(Μον. 8)**
   β) Να λύσετε την ανίσωση P(x) > 0 . **(Μον. 9)**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x$, $x \in R$

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. **(Μον. 3)**
2. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση. **(Μον. 3)**
3. Να λύσετε την εξίσωση: $2f(2x) - 5f(x) + 2 = 0$ **(Μον. 10)**
4. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2+x-2) < 1$ **(Μον. 9)**

.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots\ldots \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος ρ≠0 είναι ρίζα της εξίσωσης , τότε να δειχθεί ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0. (Μονάδες 9)

Α2. Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της πρώτης στήλης του διπλανού πίνακα με τις λύσεις της που βρίσκονται στη δεύτερη στήλη του πίνακα.

ΕΞΙΣΩΣΗ	ΛΥΣΕΙΣ
α) ημx=ημθ	**1)** x=κπ+θ , κ∈Z
β) συνx=συνθ	**2)** $\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases}, \kappa \in Z$ Ψ
γ) εφx=εφθ	**3)** $\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \kappa \in Z$ Ψ

(Μονάδες 6)

Α3. Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη **Σωστό** ή τη λέξη **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση: **α)** Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.
β) Η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο π .
γ) Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-ρ αν και μόνο αν P(ρ)=0 .
δ) Η συνάρτηση f(x)= α^x με α>1 είναι γνησίως φθίνουσα.
ε) Αν α>0 με α≠1, τότε για οποιαδήποτε θ_1 , θ_2>0 ισχύει:

$$\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$$

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ Β

Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, τότε:

Β1. Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad. (Μονάδες 8)

Β2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \frac{10\sigma\upsilon\nu x - 12\varepsilon\varphi x}{5\eta\mu x}$. (Μονάδες 4)

Β3. Να λύσετε την εξίσωση : $(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = \frac{2}{5}K - 2\eta\mu^2\omega$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο P(x)=$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$ όπου α,β∈R.
Γ1. Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του P(x) και P(3)=12 , να αποδείξετε ότι α=0 και β=-7.
(Μονάδες 10)
Γ2. Για α=0 και β=-7 να λύσετε την ανίσωση P(x)>0 . (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνετε η συνάρτηση $f(x)=\ln(3x-5)$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
(Μονάδες 5)

Δ2. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα x'x
(Μονάδες 8)

Δ3. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x.
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
1) $f(x) = ημx$ 2) $g(x)=συνx$ 3) $h(x)=lnx$ 4) $t(x)= e^x$

(Μονάδες 10)

Β) Για τις προηγούμενες συναρτήσεις να συμπληρώσετε τις παρακάτω τιμές:
1) $f(0) = ……$ 2) $g(\pi) = ……$ 3) $h(e) = …..$ 4) $t(0) =…..$ 5) $h(1) =….$

(Μονάδες 5)

Γ) Να λύσετε τις εξισώσεις :

1) $f(x) = \frac{1}{2}$, $x \in [0, 2\pi)$ 2) $h(x^2+1)= g(0)$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2ο

Α) Αν θ_1 , θ_2 πραγματικοί αριθμοί, με $\theta_1 >0$ και $\theta_2 >0$, να αποδείξετε ότι:

$$\ln(\theta_1.\theta_2) = \ln\theta_1 + \ln\theta_2$$

(Μονάδες 10)

Β) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις :

1) Οι συναρτήσεις $f(x) =e^x$ και $g(x)= lnx$, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία:
α) άξονας x΄x β) άξονας y΄y γ) y=1 δ) y=x ε) y = -x

2) Η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=e^x$ είναι η ευθεία:
α) άξονας x΄x β) άξονας y΄y γ) y=1 δ) y=x ε) y = -x

3) Η ασύμπτωτη γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)= lnx$, είναι η ευθεία:
α) άξονας x΄x β) άξονας y΄y γ) y=1 δ) y=x ε) y = -x

4) Η συνάρτηση $g(x)=lnx$, έχει πεδίο ορισμού το σύνολο:
α) $(0, +\infty)$ β) $(-\infty , 0)$ γ) R δ) (0, 1) ε) $(1, +\infty)$

5) Η συνάρτηση $f(x) =e^x$ έχει σύνολο τιμών:
α) το R επειδή $e^x >0$ για κάθε $x \in R$
β) το $(0, +\infty)$ επειδή $x>0$
γ) το $(0, +\infty)$ επειδή $e^x >0$ για κάθε $x \times R$
δ) το $(0, +\infty)$ επειδή $e^x >0$, αφού $x>0$

(Μονάδες 5x2 =10)

Γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - e)$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3ο

Α) Δίνεται ένα σύστημα (Σ_1) με $D = \lambda^2 - 1$, $D_x = \lambda+1$ και $D_y = \lambda-1$. Να εξετάστε αν το σύστημα (Σ_1) έχει άπειρες λύσεις.

(Μονάδες 5)

Β) Δίνεται το σύστημα (Σ) : $\begin{cases} ax - y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

1) Να υπολογίσετε τις ορίζουσες D, D_x, D_y του συστήματος (Σ).

(Μονάδες 9)

2) Για ποιες τιμές του α το σύστημα έχει μοναδική λύση;

(Μονάδες 2)

3) Να βρείτε τη μοναδική λύση (x_0, y_0), για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α.

(Μονάδες 4)

4) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου α, ώστε για τη λύση (x_0, y_0) του συστήματος να ισχύει:
$3x_0 + y_0 = 1$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = 6x^3 - \lambda x^2 - 4x + 4$, $\lambda \in R$.

Α) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο x+1 είναι -9, να αποδείξετε ότι λ=11.
(Μονάδες 7)

Β) Να λύσετε την εξίσωση P(x) =0.
(Μονάδες 9)

Γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.
(Μονάδες 9**)**

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Αν α>0 και $\alpha \neq 1$,τότε για οποιουσδήποτε θ_1, θ_2 >0 να δείξετε ότι $\log_\alpha(\theta_1.\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$

(Μον. 8)

Β. Να συμπληρώσετε τις ισότητες :
$\log_\alpha\alpha^\chi$=……. $\log_\alpha 1$=……. $\log_\alpha(\theta_1 : \theta_2)$= …… $\alpha^{\log_\alpha \theta}$ =……

(Μον. 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i) Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το χ-ρ αν και μόνο αν $P(\rho) \neq 0$

ii) Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0,+\infty)$

iii)Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ είναι γνησίως αύξουσα για 0<α<1

iv)Ισχύει $\log\frac{\theta_1}{\theta_2} = \log\theta_1 - \log\theta_2$ όπου $\theta_1,\theta_2>0$

(Μον. 12)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Α. Να λυθεί η εξίσωση $(2\sigma\upsilon\nu\chi - 1)(2\eta\mu x - \sqrt{2}) = 0$ (Μον.13)

Β. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός x
i) $3^x - 27 = 0$ ii) $\log x = 4$ iii) $\ln 2 + \ln x = \ln 14$ (Μον. 12)

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

Α. Να βρείτε τις τιμές του πολυωνύμου P(0) και P(1) και δικαιολογήστε ποιος αριθμός από τους 0 και 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) (Μον. 8)

Β. Να βρεθεί το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ (Μον. 8)

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$ (Μον. 9)

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(9^x - 3)$

Α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της (Μον. 7)

Β. Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες ισχύει: $\log 6 + 2\log a = f(1)$ (Μον. 8)

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \log 2 + \log 3^x$ (Μον. 10)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν α>0 και α$\neq$ 1,τότε για οποιουσδήποτε θ_1, θ_2 >0 να δείξετε ότι
$\log_\alpha(\theta_1 . \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$ **(μονάδες10)**

Α2.Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση **(μονάδες10)**

1. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f(x) = συνx είναι το [- 1, 1]

2. Ισχύει ότι $\log_a 1 = 1$ (α>0, α$\neq$ 1)

3. Αν εφx=θ τότε x=κπ+θ

4 .Η συνάρτηση f(x)=lnx , έχει πεδίο ορισμού το R

5 .Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0

Α3. Τι ονομάζουμε εκθετική συνάρτηση με βάση το α (α>0)
(μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - ax^2 + \beta x - 6$. Αν το P(x) έχει παράγοντα το x-1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι -24 τότε:

Β1. Να βρεθούν οι τιμές των α και β **(μονάδες 13)**

Β2.Αν α=6 και β=11 να λυθεί η εξίσωση P(x)=0 **(μονάδες 12)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παράσταση $A = \dfrac{\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

Γ1. Να δείξετε ότι A=1+$\sigma\upsilon\nu x$ **(μονάδες 10)**

Γ2. Αν $\eta\mu x = \dfrac{4}{5}$ $\mu\varepsilon$ $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης Α
(μονάδες 7)

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $A - \sigma\upsilon\nu 5x = 1$ **(μονάδες 8)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)= $\ln(e^{2x} - 2e^x - 3)$ και g(x)= $\ln(e^x + 1)$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f(x) και g(x)
(μονάδες 10)

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση f(x)=g(x) **(μονάδες 15)**

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Αν $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει :

$$\log(\theta_1\theta_2) = \log\theta_1 + \log\theta_2$$

(15 μονάδες)

Β) Να απαντήσετε στην κόλλα σας αν οι παρακάτω προτάσεις είναι μαθηματικά σωστές γράφοντας **(Σ)** ή μαθηματικά λανθασμένες γράφοντας **(Λ)**:

i) Ισχύει για κάθε γωνία ω πως $ημ^2\omega + συν^2\omega = 1$:.

ii) Η εξίσωση ημx=2 είναι αδύνατη.

iii)Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=lnx,x>0 τέμνει τον άξονα χ'χ στο σημείο (1,0).

iv)Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

v)Για κάθε θετικό αριθμό θ ισχύει η ισοδυναμία: $\log\theta = x \Leftrightarrow \theta = 10^x$.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Α) Να λύσετε τις παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις:

i) $ημ\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ **(8 μονάδες)**

ii) $2 - συνx = 2ημ^2x$ **(12 μονάδες)**

Β) Να διαπιστώσετε αν ο αριθμός $x = \frac{\pi}{2}$ επαληθεύει και τις δύο παραπάνω εξισώσεις.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο αριθμός $\Lambda = \dfrac{\log 5 + \log 2 + \log 4 - 1}{2(\log 5 + \log 2) + \log 8 - 2}$

και το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ x + y = 3\Lambda + 3 \end{cases}, \lambda \in R$

i) Να δείξετε ότι: $\Lambda = \frac{2}{3}$. **(7 μονάδες)**

ii) Για $\Lambda = \frac{2}{3}$ να υπολογίσετε τις ορίζουσες του συστήματος D, D_x, D_y

(6 μονάδες)

iii) Για $\Lambda = \frac{2}{3}$ να επιλύσετε για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ το σύστημα.

(12 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3x - ax - 3$ καθώς και η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log(2^x - a)$, όπου α πραγματικός αριθμός.

Αν είναι γνωστό πως το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το x=1, τότε:

i) Να δείξετε ότι α=1.

(4 μονάδες)

ii) Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0 για x πραγματικό αριθμό.

(7 μονάδες)

iii) Να λύσετε την ανίσωση: P(x)<0.

(7 μονάδες)

iv) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως f.

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν $0 < \alpha \neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2 .$$ (ΜΟΝΑΔΕΣ10)

Α2. Πότε ένας αριθμός ρ λέγεται ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$;

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η συνάρτηση $f(x) = \rho$ ημωx είναι περιοδική με περίοδο 2π.
2. Για κάθε $\theta > 0$ και $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει ότι $\alpha^{\log_\alpha(\theta)} = \log_\alpha\left(\alpha^\theta\right)$.
3. Η διαίρεση ενός πολυωνύμου P(x) με το x-ρ μπορεί να δώσει υπόλοιπο, ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού.
4. Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.
5. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 2x5)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 4x + \alpha,\ x \in [0,\pi]$

Β1. Να βρείτε την τιμή του α, αν $f(\pi) = 5$ (ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

Για την τιμή α = 3:

Β2. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f και ποια η περίοδος της;

(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

Β3. Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 4 (ΜΟΝΑΔΕΣ 13)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - x - 3$, $\alpha, \beta \in R$.

Γ1. Να βρείτε τις τιμές των α, $\beta \in R$ ώστε το x – 1 να είναι παράγοντας του πολυωνύμου και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το x + 2 να είναι 3 (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Αν α = 1 και β = 3 τότε

Γ2. να λυθεί η εξίσωση: P(x) = 0 (ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

Γ3. να βρείτε τις τιμές του $x \in R$ για τις οποίες η γραφική παράσταση του πολυώνυμου Q(x) = P(x) $- 8x^2 + 7x + 3$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x + ln(e^x – 5).

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Δ2. Να αποδείξετε ότι f(ln6) < f(ln10). (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{e^{\ln x}+\ln 3-f(x)}$.

Δ3.Βρείτε το πεδίο ορισμού της g (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

Δ4. Υπάρχει τιμή του α για την οποία η γραφική παράσταση της g περνά από το σημείο Ν(α,0);(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας) (ΜΟΝΑΔΕΣ 4)

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Να αποδείξετε ότι :
Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν P(ρ) = 0.

Β. Τι ονομάζουμε λογάριθμο του θ ως προς βάση α; (θ>0, 0<α≠1)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ) :
1) Για $\theta_1, \theta_2>0$ και $0<\alpha\neq1$ ισχύει : $\log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$
2) Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$
3) Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.
4) ημ(180° - ω) = συνω, για κάθε γωνία ω.
5) Το σύστημα $\begin{cases}\alpha\chi+\beta\psi=\gamma\\ \alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'\end{cases}$ έχει μοναδική λύση όταν D=0 .

(Μονάδες : 10+5+10)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Α. Να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων των παρακάτω συστημάτων, **χωρίς** να τα λύσετε :

i) $\begin{cases}2\chi-3\psi=30\\ 4\chi-6\psi=40\end{cases}$ ii) $\begin{cases}2\chi-5\psi=12\\ 3\chi+4\psi=41\end{cases}$

Β. Σε έναν αγώνα το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 2,5 € και το εισιτήριο ενός ενήλικα 6 € . Τον αγώνα παρακολούθησαν 1.400 άτομα και εισπράχθηκαν 5.600 €. Να βρείτε πόσα ήταν τα παιδιά και πόσοι οι ενήλικες που παρακολούθησαν τον αγώνα.

(Μονάδες : 10 + 15)

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Α. α) Να μετατρέψετε σε μοίρες τις γωνίες :
i) $\frac{7\pi}{6}$ rad ii) $\frac{5\pi}{4}$ rad iii) $\frac{4\pi}{3}$ rad
β) Να μετατρέψετε σε rad τις γωνίες :
i) 120° ii) 135° iii) 150°

(Μονάδες : 3 + 3)

Β. Να λύσετε τις εξισώσεις :
α) $(1+\eta\mu\chi)\cdot(\varepsilon\varphi\chi+\sqrt{3})=0$ β) $4\sigma\upsilon\nu^2\chi-4\sigma\upsilon\nu\chi-3=0$

(Μονάδες : 8 + 11)

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\log_3 81+\log_5 1-\log_4 4$ και $\beta=2\log_2 3+\log_2 6-\log_2 27$ και το πολυώνυμο $P(x)=-2\alpha x^3+(3\alpha+2\beta)x^2-5x+1$.
α) Να δείξετε ότι α =3 και β =1
β) Για α =3 και β =1 , να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x) **:** (2x +1) είναι 7 και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
γ) Να λύσετε την ανίσωση P(x) > 7
δ) Να λύσετε την εξίσωση $P[-(\sqrt{8})^x]=7$

(Μονάδες : 5+8+8+4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω , ισχύει $ημ^2\omega + συν^2\omega = 1$.

Μονάδες 10

Β. Πότε ο αριθμός ρ λέγεται ρίζα του πολυωνύμου P(x);

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ τότε $P(\rho)=0$.

2. Αν $0<\alpha\neq 1$ και $\theta>0$ ισχύει $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa\cdot\log_\alpha \theta$.

3. Ισχύε $\ln e = 0$.

4. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

5. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ με $0<\alpha<1$ είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Το πολυώνυμο $P(x)=x^3+3x+\alpha x-3$,όπου $\alpha\in R$ έχει ρίζα το 1.

Α. Να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 8

Β. Για $\alpha=-1$,

i) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

Μονάδες 9

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-2$

Μονάδες 4

iii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 2013 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η παράσταση

$$\text{K}=\frac{εφ(\pi-\omega)\cdot συν(2\pi+\omega)\cdot συν\left(\frac{7\pi}{2}-\omega\right)}{ημ(13\pi+\omega)\cdot συν(-\omega)\cdot σφ\left(\frac{21\pi}{2}-\omega\right)}$$

και η εξίσωση

$$2ημ^2x-συν x+\text{K}=0 \quad \textbf{(1)}$$

Α. Να υπολογίσετε την παράσταση K .

Μονάδες 12

Β. Για $\text{K}=-1$, να λύσετε την εξίσωση **(1).**

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\log(2x)$ και $g(x)=\log\left(4^x-2^{x-1}\right)$.

Α. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες 6

Β. Να λυθεί η ανίσωση $g(x)<f\left(\frac{1}{4}\right)$.

Μονάδες 7

Γ. i) Να αποδείξετε ότι $\log 5=1-\log 2$

Μονάδες 4

ii) Να λυθεί η εξίσωση

$$x^{f(x)}=5,\quad \text{με } x>0$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει : $ημ^2ω+συν^2ω=1$.

(Μονάδες 11)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) $e^{\ln x}=x$ με $x>0$.

β) Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=α^x$ με $α>1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$.

δ) Αν $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$ και $\theta_1,\theta_2>0$ ισχύει: $\dfrac{\log_\alpha \theta_1}{\log_\alpha \theta_2}=\log_\alpha \theta_1-\log_\alpha \theta_2$

(Μονάδες 08)

Γ. Να μεταφέρεται στο γραπτό σας και να συμπληρώσετε κατάλληλα τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α) συν(-ω)= …..

β) εφ(90°-ω)=……

γ) ημ(π-ω)= ……..

(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 2ο

Δ ίνονται οι παραστάσεις: A=1-2ημx και $B=1-2συν^2x$

α. Να αποδείξετε ότι:

$$A^2-2B=3-4ημx$$

(Μονάδες 12)

β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$B=0$$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3Ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+(2α+1)x^2-(α+β)x-9$ όπου α, β $\in \mathbb{R}$.

Α. Αν το -3 είναι ρίζα του P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) δια το x+1 είναι -8,τότε να βρείτε τις τιμές των α και β.

(Μονάδες 08)

Β. Αν α=2 και β= -5 τότε:

α) Να λύσετε την εξίσωση: P(x)=0 **(Μονάδες 08)**

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{P(x)}{x+2} \geq 0$ **(Μονάδες 09)**

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = \ln(3-x) - \ln(3+x)}$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . **(Μονάδες 06)**

Β. Να λύσετε την ανίσωση: $\mathbf{f(x) < f(1)}$ **(Μονάδες 09)**

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(2^x) + f(-1)) = \left[f(0) - f(1)\right] \cdot x$. **(Μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν α > 0 και α ≠ 1, τότε για οποιοδήποτε θ > 0 και $\kappa \in R$, να αποδείξετε ότι $\log_a \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_a \theta$

Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται περιττή αν για κάθε $x \times A,$ *ισχύει* :

-$x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$.

β. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με α > 1 είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

γ. Η εξίσωση συνx = συνθ , έχει λύσεις x = 2κπ + θ ή x = 2κπ – θ με $\kappa \in Z$.

δ. Κάθε σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

ε. Για κάθε α >0 και α ≠ 1 ισχύει $\log_a a = 1$.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο το οποίο έχει παράγοντα το $x-2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$.

Β2. Να κάνετε την διαίρεση του $P(x)$ με το x^2+2x+1 και να γράψετε την ταυτότητα της.

Β3. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

Μονάδες 8 + 8 + 9 = 25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\frac{x-1}{x-2}$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

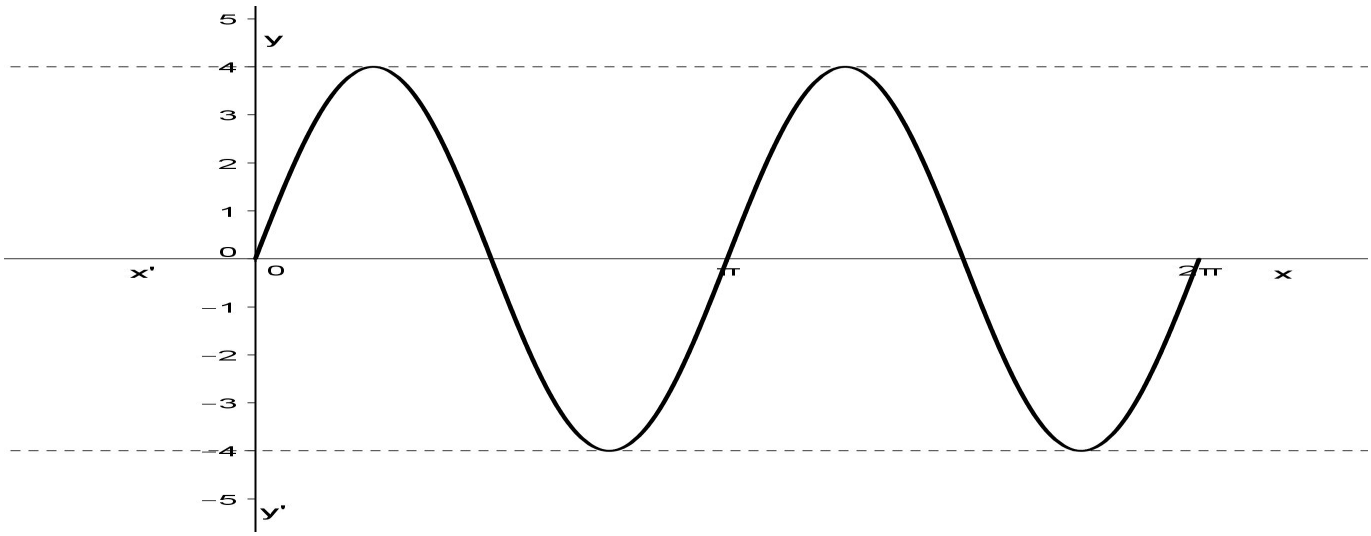
Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(3) + f(4) + f(\frac{1}{2}) = 0$.

Γ3. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + \ln(x-2) = e^{\ln 2} + \ln 1$.

Μονάδες 8 + 8 + 9 = 25

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$, $\mu\varepsilon$ $\rho > 0$, $\omega > 0$ και πεδίο ορισμού Α = [0, 2π], που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δ1. Με βάση το σχήμα να βρείτε τα ακρότατα της $f(x)$ και τις τιμές του x για τις οποίες παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή της.

Δ2. Να υπολογίσετε την περίοδο Τ της συνάρτησης $f(x)$ καθώς και τα ρ, ω.

Δ3. Αν $f(x) = 4\eta\mu(2x)$ να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 2$ στο διάστημα [0,π].

Δ4. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\frac{\pi}{9})$, $f(\frac{\pi}{7})$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 8 + 6 + 6 + 5 = 25

ΘΕΜΑ Α

α) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή(Σ) ή λάθος (Λ),καθεμια από τις παρακάτω προτάσεις

i) Ένα σύστημα εξισώσεων που δεν έχει καμία λύση λέγεται αδύνατο.

ii) $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2$

iii) το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται μηδενικό πολυώνυμο.

iv) $\eta\mu 30^0 = 1$

(μονάδες 10)

β) Να αντιστοιχίσετε τις παρακάτω εξισώσεις με τις λύσεις τους

εξίσωση	λύσεις
1) $\eta\mu x = \eta\mu\theta$	i) $x = \kappa\pi + \theta$
2) $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta$	ii) $x = 2\kappa\pi + \theta$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \theta$
3) $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta$	iii) $x = 2\kappa\pi \pm \theta$

(μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$. (μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Β

α) Να υπολογιστούν οι ορίζουσες

i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ ii) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$ (μονάδες 8)

β) Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 9 & x \end{vmatrix} = 0$ ii) $\begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 8 & x \end{vmatrix} = 0$ (μονάδες 10)

γ) Να λυθεί το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές του κ με την βοήθεια οριζουσών

$$\begin{cases} 2x \;\; 3y = 5 \\ 4x + \kappa y = 8 \end{cases}, \quad \kappa \in R$$

(μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

α) Να βρεθεί η αριθμιτική τιμή του πολυωνύμου $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 4$ για x = 0 και για x = 2 (μονάδες 5)

β) Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση με την βοήθεια του σχήματος Horner

$x^3 \; 4x^2 + 5x - 2 = 0$ (μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το πρόσημο του παρακάτω γινομένου για τις διάφορες τιμές του χ

$Q(x) = (x - 3)(x^2 - 6x + 8)$ (μονάδες 5)

δ) Να βρεθεί το κ ώστε το πολυώνυμο $\Pi(\chi) = \kappa^2\chi^2 - 4\kappa\chi + 3$ να έχει ρίζα τον αριθμό 1 δηλαδή να ισχύει $\Pi(1) = 0$. (μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2^x = 2^4$ ii) $3^x = 27$ iii) $2^{3x-2} = 16$ (μονάδες 9)

β) Να λύσετε τις ανισώσεις

i) $3^{5x-2} < 3^{4x+1}$ ii) $2^{x^2-4x+3} < 1$ (μονάδες 8)

γ) Να λύσετε τις λογαριθμικές εξισώσεις

i) $\ln(x+1) + \ln 2 = \ln 10$

ii) $\ln x - \ln 5 = \ln 4$ (μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να δώσετε τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης με βάση ένα θετικό αριθμό α.

Α2. Πότε δύο συστήματα εξισώσεων λέγονται ισοδύναμα;

Α3. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο υ της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το (x – ρ) είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x = ρ, δηλαδή υ = P(ρ).

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεων σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος,** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Ισχύει ότι $συν(\frac{\pi}{2}+\omega)=ημω$, για κάθε γωνία ω.
2. Η συνάρτηση f(x) = ρημ(ωx) είναι περιοδική, με περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}$ (ω>0).
3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ημ(2x+\frac{\pi}{3})$ προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της καμπύλης y= ημ2x κατά $\frac{\pi}{3}$ μονάδες προς τα αριστερά.
4. Η συνάρτηση f(x) = $α^x$, με 0 < α < 1 είναι γνησίως αύξουσα.
5. Ο αριθμός $\log_5 125$ είναι ίσος με $\frac{1}{5}$.

Μονάδες 5+4+6+10=25

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f(x)= (λ – κ)·ημ[(3λ + 4κ)·x] με κ, λ ∈ IR ,(3λ + 4κ) > 0 και (λ – κ) > 0. Η f έχει μέγιστη τιμή το 3 και περίοδο T = π.

Β1. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ.
Αν κ = -1 και λ = 2, τότε:

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f στο διάστημα [0, π] και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα [0, π].

Β3. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=-\frac{3}{2}$.

Μονάδες 8+10+7=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 5x + \beta$, με $\alpha, \beta \in IR$.

Γ1. Αν το P(x) έχει παράγοντες το x – 1 και το x + 3, να βρείτε τις τιμές των α και β.
Αν α = 1 και β = 3

Γ2. να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0.

Γ3. να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης P(x): $(x^2 + 3x + 4)$.

Γ4. να λύσετε την ανίσωση: P(x) · Q(x) > 0, αν $Q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$

Μονάδες 6+5+6+8=25

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\dfrac{2^{x+1} + 2^{x+2} - 24}{2^{2x+2} - 3 \cdot 2^x - 1}\right)$

Δ1. Να λυθούν οι εξισώσεις: $2^{x+1} + 2^{x+2} - 24 = 0$ και $2^{2x+2} - 3 \cdot 2^x - 1 = 0$.

Δ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Δ3. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση f(x) = ln3 – (x + 1)·ln2.

Μονάδες 8+5+5+7=25

ΘΕΜΑ Α

A_1) Να αποδειχθεί ότι για κάθε γωνία ω ισχύει ότι: **συν^{2}ω+ημ^{2}ω=1** **(μονάδες 11)**

A_2) Να απαντήσετε με **Σωστό ή Λάθος** στα παρακάτω:

α) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^4$

β) συν(-ω)=-συνω

γ) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το χ-ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου P(x) για χ=ρ

δ) $\log(\theta_1\theta_2)=\log\theta_1\log\theta_2$ **(μονάδες 4)**

A_3) Να συμπληρώσετε τα κενά:

α) εφx=εφθ ⇔x= …… β) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων y=logx και $y=10^x$ είναι συμμετρικές ως προς ……

γ) $\log_\alpha \alpha^x$=….. δ) $\alpha^{\log_\alpha \theta}$ = …….. ε) $\log_\alpha 1$=….. **(μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ Β

B_1) Να λυθεί η εξίσωση: **συνx=-$\frac{1}{2}$ για x×R** **(μονάδες 15)**

B_2) Να λυθεί η ίδια εξίσωση για **x×[0,2π]** **(μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ Γ

$Γ_1$) Να λυθεί η εξίσωση: **$x^3+3x^2-x-3=0$** **(μονάδες 15)**

$Γ_1$) Να λυθεί η ανίσωση: **$x^3+3x^2-x-3>0$** **(μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ Δ

$Δ_1$) Να αποδείξετε ότι για κάθε x>0 ισχύει:**$x^{\ln 2}=2^{\ln x}$** **(μονάδες 5)**

$Δ_2$) Να λύσετε την εξίσωση: **$6x^{\ln 2}-3=3\cdot 2^{\ln x}$** **(μονάδες 20)**

Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Γεωμετρία
(17 Διαγωνίσματα)

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να αποδείξετε ότι σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

(15 μονάδες)

Β) Να απαντήσετε στην κόλλα σας αν οι παρακάτω προτάσεις είναι μαθηματικά σωστές βάζοντας ένα (Σ) ή μαθηματικά λανθασμένες βάζοντας ένα (Λ):

1.Αν $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ τότε η γωνία $\hat{A}$ είναι αμβλεία.

2.Σε κάθε τρίγωνο ισχύει η σχέση: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$.

3.Το εμβαδόν Ε κυκλικού δίσκου ακτίνας R δίνεται από τον τύπο: $E = \pi R^2$.

4.Η πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,R) είναι $\lambda_6 = R\sqrt{3}$.

5.Το εμβαδόν τριγώνου με πλευρές α,β,γ εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,R) είναι ίσο με $E = \dfrac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4R}$.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Αν είναι γνωστό ότι ΒΓ=10cm και ΑΓ=6cm, τότε:

Α) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΒ.

(5 μονάδες)

Β) Να υπολογίσετε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ΒΔ,ΔΓ και ΑΔ.

(15 μονάδες)

Γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=5cm, ΑΓ=7cm και ΒΓ=6cm. Αν ΑΔ είναι το ύψος του και ΑΜ η διάμεσος του, να βρείτε:

Α) Το είδος του τριγώνου ως προς τι γωνίες του.

(7 μονάδες)

Β) Να δείξετε ότι. $AM = 2\sqrt{7}cm$

(6 μονάδες)

Γ) Να δείξετε ότι το μήκος της προβολής ΜΔ της διαμέσου ΑΜ επάνω στην πλευρά ΒΓ είναι 2cm.

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Σε έναν κύκλο (Κ,R) είναι εγγεγραμμένο ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς $a = \sqrt{3}cm$. Να υπολογίσετε:

Α) Την ακτίνα R του κύκλου.

(6 μονάδες)

Β) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

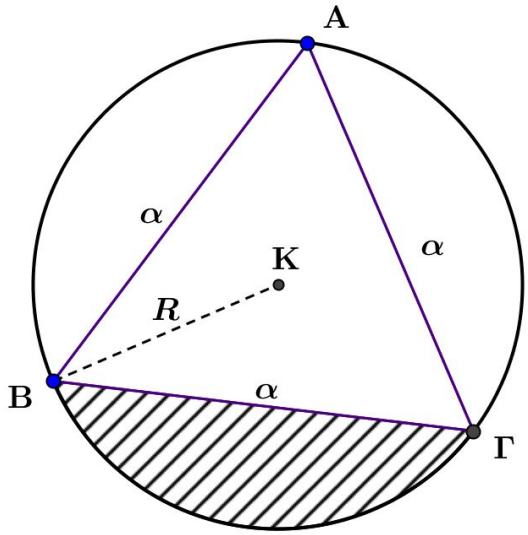
(6 μονάδες)

Γ) Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (Κ,R).

(6 μονάδες)

Δ) Το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τη χορδή ΒΓ, το τόξο ΒΓ και δεν έχει κοινά σημεία με το τρίγωνο ΑΒΓ.

(7 μονάδες)



ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να δώσετε τον ορισμό του ρόμβου. (5 μονάδες)

Β) Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες. (10 μονάδες)

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **σωστές (Σ)** ή **λανθασμένες (Λ)**:

α) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά.

β) Η διάμεσος του τραπεζίου, είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ισούται με το ημιάθροισμά τους.

γ) Οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι ίσες.

δ) Ένας ρόμβος με μια ορθή γωνία είναι τετράγωνο.

ε) Η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

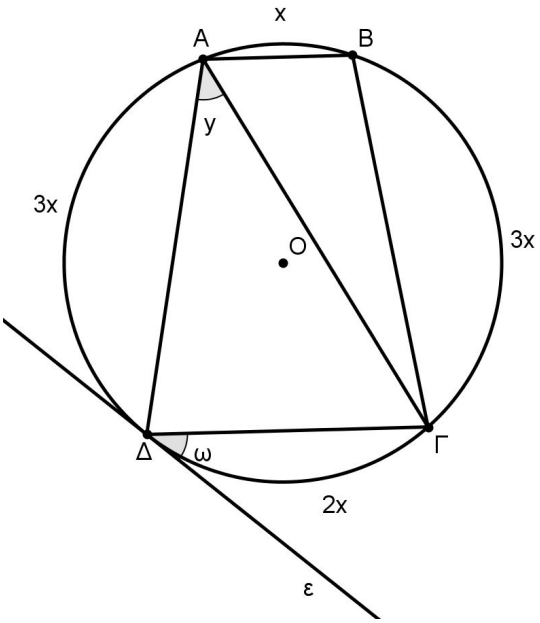
Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε είναι εφαπτομένη του κύκλου.

α) Να αποδείξετε ότι x=40.
(8 μονάδες)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία y.
(8 μονάδες)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ω.
(5 μονάδες)

δ) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^o$.
(4 μονάδες)



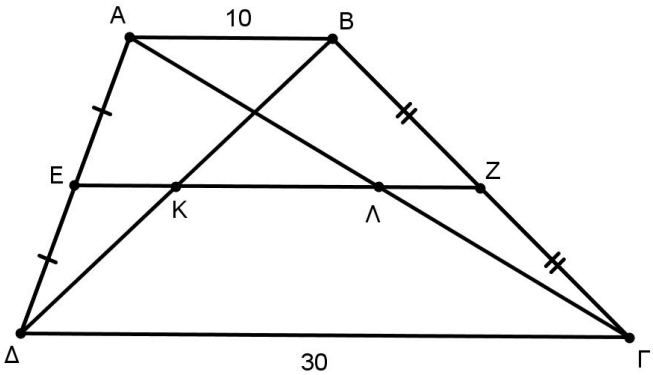
ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ=10 και ΓΔ = 30. Αν Ε και Ζ τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του ΑΔ και ΒΓ και Κ και Λ τα μέσα των διαγωνίων του ΒΔ και ΑΓ τότε:

α) Να δείξετε ότι ΕΖ = 20

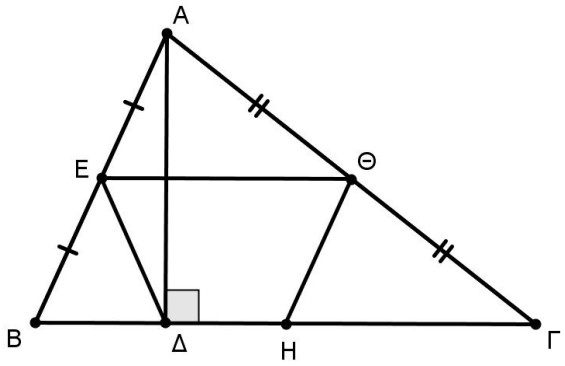
β) Να δείξετε ότι ΚΛ =ΑΒ.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.



(8+9+ 8 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο



Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Ε, Θ και Η είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα και ΑΔ ύψος του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E = \frac{AB}{2}$ (8 μονάδες)

β) ΔΕ = ΘΗ (9 μονάδες)

γ) ΕΘΗΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(8 μονάδες)

ΘΕΜΑ 1

Α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των δυο κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

[Μονάδες 13]

Β. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας που αφορά στα κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R.

Κανονικά πολύγωνα	**Πλευρά λ_ν**	**Απόστημα α_ν**
Ισόπλευρο τρίγωνο		
Κανονικό εξάγωνο		
Τετράγωνο		

[Μονάδες 12]

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών α = 8, β = 6, γ = 5.

Α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο. [Μονάδες 6]

Β) Να υπολογίσετε την προβολή της ΑΒ στην ΑΓ. [Μονάδες 10]

Γ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο μ_β [Μονάδες 9]

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΒΓ = 7 , ΑΓ = 6, ΑΒ = 5.

Να αποδείξετε ότι:

Α) Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $6\sqrt{6}$ [Μονάδες 6]

Β) Να βρεθεί το ύψος υ_β [Μονάδες 6]

Γ) Να βρείτε τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου.

[Μονάδες 7]

Δ) Αν προεκτείνω την πλευρά ΓΑ προς το Α κατά ευθύγραμμο τμήμα $\text{ΑΔ} = \frac{1}{3}\text{ΑΓ}$ να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών $\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΒΔ})}$ [Μονάδες 6]

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε κύκλο (Κ,ρ) και δυο κάθετες ακτίνες ΚΑ, ΚΒ αυτού.

Επίσης θεωρούμε κύκλο (Α,ρ) ο οποίος τέμνει το τόξο ΑΒ στο σημείο Γ.

Α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΓ είναι ισόπλευρο. [Μονάδες 6]

Β) Να βρείτε τα μήκη των τόξων ΒΓ,ΚΓ [Μονάδες 6]

Γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΚΓΜ. [Μονάδες 7]

Δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΚΒΓ. [Μονάδες 6]

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του, είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

(Μονάδες 9)

Β. Ποιο πολύγωνο ονομάζεται κανονικό ; **(Μονάδες 4)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος ,** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α,β,γ ισχύει : $\alpha^2 > \beta^2 - \gamma^2$ τότε $\hat{B} < 90°$.

(Μονάδες 2)

2. Το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β , γ ισούται με $\frac{\alpha\beta\gamma}{4\rho}$ όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ . **(Μονάδες 2)**

3. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ισχύει η σχέση: $\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$, όπου α_ν το απόστημα, λ_ν η πλευρά του κανονικού ν-γωνου και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

(Μονάδες 2)

4. Η πλευρά ενός κανονικού τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, R) ισούται με $\lambda_4 = R\sqrt{3}$.

(Μονάδες 2)

5. Το απόστημα τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) ειναι: $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 2)

6. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R η κεντρική γωνία ω_ν υπολογίζεται με την σχέση $\omega_\nu = \frac{\nu}{360^0}$.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = α , ΑΓ = 2α και $\hat{A} = 135°$.
Να εκφράσετε συναρτήσει του α:

i. το μήκος της πλευράς ΒΓ. **(Μονάδες 10)**

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. **(Μονάδες 10)**

iii. την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου. **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 4 cm , ΒΓ = 5 cm και ΑΓ = 6 cm.

i. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 5)

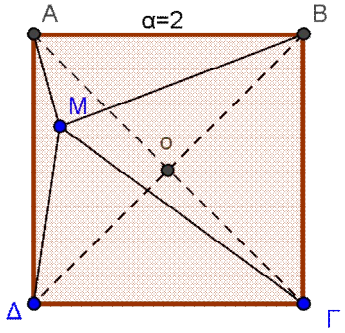
ii. Να υπολογιστεί η προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στη πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ .

(Μονάδες 10)

iii. Να υπολογιστεί το ύψος υ_α που φέρεται απο την κορυφή Α.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4°



Έστω ΑΒΓΔ τετράγωνο πλευράς α=2 και Μ εσωτερικό σημείο του τετραγώνου τέτοιο ώστε: ΜΑ=1 ,ΜΒ=$\sqrt{3}$, ΜΓ=2 όπως φαίνεται στο σχήμα:

1. Να αποδείξετε ότι : $MA^2 + M\Gamma^2 = MB^2 + M\Delta^2$ **(Μονάδες 10)**

2. Να υπολογίσετε: **α)** Το μήκος του ΜΔ **(Μονάδες 07)**

β) Το μήκος του ΜΟ **(Μονάδες 08)**

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του . (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Β) Να αντιστοιχίσετε τις τιμές της δύναμης του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο,R) , της στήλης Α , με την θέση του σημείου Ρ , ως προς τον κύκλο (Ο,R) , της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
Α. $\Delta^{P}_{(O,R)} = -R^2$	1.Το σημείο Ρ είναι εσωτερικό του κύκλου (Ο ,R)
Β. $\Delta^{P}_{(O,R)} > 0$	2. Το σημείο Ρ ταυτίζεται με το κέντρο του κύκλου (Ο ,R)
Γ. $\Delta^{P}_{(O,R)} = 0$	3. Το σημείο Ρ είναι εξωτερικό του κύκλου (Ο ,R)
Δ. $\Delta^{P}_{(O,R)} < 0$	4. Το σημείο Ρ ανήκει στον κύκλο (Ο ,R)

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με τις λέξεις ***Σωστό(Σ)*** ή ***Λάθος(Λ):***

α) Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A}>1\angle$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε: $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2-2\beta\cdot A\Delta$

β) Σε κάθε τρίγωνο ισχύει η ισοδυναμία $\alpha^2 > \beta^2+\gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A}<1\angle$.

γ) Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

δ) Για την κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου ισχύει $\omega_\nu = 180^0 + \frac{360^0}{\nu}$.

ε) Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R ισχύει η σχέση :

$$\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών α=7, β=3, γ=5.

Α) Να εξετάσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Β) Να υπολογίσετε την διάμεσο του μ_α. (ΜΟΝΑΔΕΣ 15)

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα R =10 cm και απόστημα $\alpha_\nu = 5\sqrt{3}$ cm. Να βρεθεί :

Α) η πλευρά λ_ν (ΜΟΝΑΔΕΣ15)

Β) το εμβαδόν του E_ν (ΜΟΝΑΔΕΣ10)

ΘΕΜΑ4^{ο}

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90^0) με ΑΒ=6 και ΑΓ=8. Να βρείτε

Α) το εμβαδόν (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Β) το ύψος $υ_α$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Γ) την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου. (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

ΘΕΜΑ 1ο

1.Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.
(Μον. 10)

2. Τι ονομάζεται δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο,R) και πώς συμβολίζεται.
(Μον. 5)

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Σε κάθε τρίγωνο ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ αν και μόνο αν $\hat{A} > 1$ L .

β) Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} < 1$ L και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στην β τότε: $a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta$ ΑΔ

γ) Το εμβαδό Ε κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο Ε = $\frac{1}{2}$ α β συνΓ

δ) Η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο,R) είναι πάντα θετική.

ε) Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

(Μον. 5· 2=10)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=5cm, ΑΓ=7cm, ΒΓ=3cm.

1. Να δείξετε ότι η γωνία Β είναι αμβλεία.
(Μον. 8)

2. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ πάνω στην ΑΓ.
(Μον. 9)

3. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου μ_α .
(Μον.8)

ΘΕΜΑ 3ο

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδό 120 m^2. Έστω Δ εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε ΒΔ= $\frac{2}{3}$ ΒΓ.

1. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΔ. **(Μον. 12)**

2. Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΖ. **(Μον. 13)**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=6, ΑΓ=8 και εμβαδό (ΑΒΓ)=$12\sqrt{3}$

1. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 60^o$. **(Μον. 10)**

2. Να υπολογίσετε το ύψος υ_α . **(Μον. 8)**

3. Να υπολογίσετε το ύψος υ_β . **(Μον. 7)**

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α) Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα. Δηλαδή να δείξετε ότι $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$ ή $ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΓΔ$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Β) Στην στήλη Α βρίσκονται οι πλευρές ενός τριγώνου και στην στήλη Β αναγράφεται το είδος του τριγώνου. Να γίνει η αντιστοίχιση.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
Α. $\alpha = 6$ $\beta = 3$ $\gamma = 4$	
Β. $\alpha = 6$ $\beta = 8$ $\gamma = 12$	1. Οξυγώνιο
Γ. $\alpha = 5$ $\beta = 12$ $\gamma = 13$	2. Αμβλυγώνιο
Δ. $\alpha = 4$ $\beta = 5$ $\gamma = 6$	3. Ορθογώνιο
Ε. $\alpha = 4$ $\beta = 5$ $\gamma = 7$	

Α	Β	Γ	Δ	Ε

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Γ) Σε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν να σημειώσετε το Σ αν είναι σωστή ή το Λ αν είναι λανθασμένη.

α. Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου και η κεντρική του γωνία είναι παραπληρωματικές.

β. Ο τύπος $4 \cdot \alpha_\nu^2 = 4 \cdot R^2 - \lambda_\nu^2$ συνδέει την πλευρά λ_ν, το απόστημα α_ν και την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου κανονικού ν – γώνου.

γ. Ένα κυρτό πολύγωνο που έχει όλες του τις γωνίες ίσες είναι κανονικό.

α	β	γ

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με την γωνία Α ορθή. Αν ΑΓ = 20 και ΒΓ = 25 , να υπολογιστούν

Α) Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

Β) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΓ και ΔΒ (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Γ) Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ. (ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 15$ $\beta = 14$ και $\gamma = 13$.Να βρεθούν :

Α) Το μήκος της διαμέσου μ_α (ΜΟΝΑΔΕΣ 15)

Β) Την προβολή της διαμέσου μ_α στην πλευρά ΒΓ. (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι $\gamma = 4$, $\beta = 6$ και η γωνία $A = 30^\circ$. Να υπολογιστούν :

Α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

Β) Το ύψος υ_β του τριγώνου. (ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

Γ) Την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου ρ (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Δ) Την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου R. (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Δίνεται ότι $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ 1ο

Α) 1ο Θεώρημα Διαμέσων :
Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

1) Να γράψετε την πρόταση αυτή για ένα τρίγωνο ΑΒΓ με μαθηματικά σύμβολα.
(Μονάδες 3)

2) Να αποδείξετε την πρόταση αυτή. (Μονάδες 16)

Β) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ και ΑΔ ύψος, να σημειώσετε το Σωστό ή το Λάθος

1) $ΑΓ^2 = ΔΒ.\ ΒΓ$ Σ Λ

2) $ΑΔ^2 = ΔΒ.\ ΔΓ$ Σ Λ

3) $ΑΓ^2 = ΔΓ^2 + ΔΓ^2$ Σ Λ

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2ο

Α) Να αντιστοιχίστε τις πλευρές και τα αποστήματα των εγγεγραμμένων σχημάτων της στήλης Α με τους τύπους της στήλης Β

Στήλη Α	Στήλη Β
α) πλευρά εξαγώνου $λ_6$	1) $R\sqrt{2}$
β) πλευρά τετραγώνου $λ_4$	2) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$
γ) πλευρά ισόπλευρου τριγώνου $λ_3$	3) R
δ) απόστημα εξαγώνου $α_6$	4) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$
ε) απόστημα τετραγώνου $α_4$	5) $\frac{R}{2}$
ζ) απόστημα ισόπλευρου τριγώνου $α_3$	6) $R\sqrt{3}$

(Μονάδες 12)

Β) Σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α γράφουμε τόξα στο εσωτερικό του, με κέντρα τις κορυφές Α, Β, Γ και Δ και ακτίνα ίση με $R=\frac{a}{2}$. Να βρείτε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου καμπυλόγραμμου τετραπλεύρου.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3ο

Α) Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει γωνία Γ=60ο, β=12 και α=3. Να βρείτε το μήκος της πλευράς α ισοπλεύρου τριγώνου που είναι ισοδύναμο με το ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)

Β) Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε β=7, γ=6 και α=11. Να υπολογίσετε τη διάμεσο μ_α

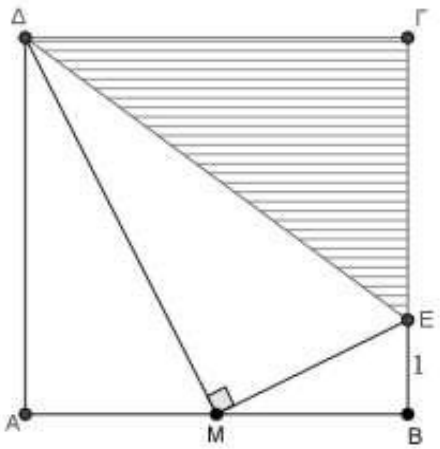
(Μονάδες 9)

Γ) Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές α=6, β=5 και γ=4. Να βρείτε το είδος του τριγώνου (ορθογώνιο, οξυγώνιο ή αμβλυγώνιο)

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4ο

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ του σχήματος έχει πλευρά 4, το Μ είναι μέσο του ΑΒ, και το Ε σημείο της πλευράς ΒΓ ώστε ΒΕ=1



Α) Να υπολογίστε τα μήκη των τμημάτων ΜΕ, ΔΜ και ΔΕ

(Μονάδες 12)

Β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο

(Μονάδες 4)

Γ) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τριγώνων ΔΜΕ και ΔΓΕ

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία $a^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90°$

ii. Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων σε κάθε τρίγωνο ισχύει $a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$

iii. Αν δύο τρίγωνα έχουν το ίδιο ύψος τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των βάσεων τους

iv. Η κεντρική γωνία ενός κανονικού ν-γώνου δίνεται από τον τύπο $\omega_\nu = \dfrac{360^0}{\nu}$

(Μον.12)

Β. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με την αντίστοιχη τιμή του από τη στήλη Β (Μον.6)

Στήλη Α	Στήλη Β
1.Πλευρά κανονικού εξαγώνου	α. $\frac{R}{2}$
2.Απόστημα κανονικού εξαγώνου	β. $R\sqrt{2}$
3.Πλευρά τετραγώνου	γ. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$
4.Απόστημα τετραγώνου	δ. R
5.Πλευρά ισόπλευρου τριγώνου	ε. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$
6.Απόστημα ισόπλευρου τριγώνου	στ. $R\sqrt{3}$

Γ. Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

1. Το εμβαδόν τραπεζίου δίνεται από τον τύπο

α) $B \cdot \upsilon$ β) $\dfrac{\beta \cdot \upsilon}{2}$ γ $\dfrac{(B+\beta)\upsilon}{2}$) δ) $\dfrac{B \cdot \beta \cdot \upsilon}{2}$ (Μον.2)

2. Το εμβαδόν τριγώνου ,με R την ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου δίνεται από τον τύπο

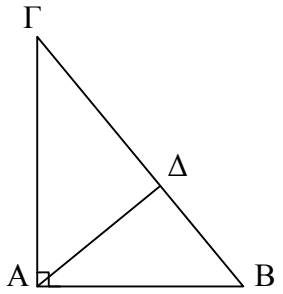
α) $\dfrac{a\beta\gamma}{3R}$ β) $\dfrac{a\beta\gamma}{4R}$ γ) $\dfrac{a+\beta+\gamma}{4R}$ δ) $\dfrac{a\beta\gamma}{2R}$ (Μον.2)

3. Το εμβαδόν κυκλικού τομέα μ^0 δίνεται από τον τύπο

α) $\dfrac{\pi \cdot \rho \cdot \mu}{180^0}$ β) $\dfrac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu}{180^0}$ γ) $\dfrac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu}{360^0}$ δ) $\dfrac{\pi \cdot \rho \cdot \mu}{360^0}$ (Μον.3)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90°$) με πλευρές ΑΒ=3 και ΑΓ=4. Αν ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα τότε:



Α. Να υπολογίσετε την πλευρά ΒΓ (Μον.9)

Β. Να υπολογίσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΒ (Μον.9)

Γ. Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ (Μον.7)

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $\alpha = 7$, $\beta = 4$, $\gamma = 9$

Α. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του (Μον.8)

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου (Μον.10)

Γ. Να υπολογίσετε τη διάμεσο μ_β (Μον.7)

ΘΕΜΑ 4ο

Σε κύκλο κέντρου Κ και ακτίνας R=4 εγγράφουμε τετράγωνο

Α. Να βρεθεί το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου (Μον.8)

Β. Να βρεθεί η πλευρά λ_4 και το απόστημα α_4 του τετραγώνου (Μον.8)

Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που είναι εσωτερικό του κύκλου και εξωτερικό του τετραγώνου (Μον.9)

ΘΕΜΑ Α

Α1 .Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα. **(μονάδες 10)**

Α2.Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** **(μονάδες 10)**

1. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ τότε το τρίγωνο είναι πάντα οξυγώνιο

2. Η κεντρική γωνία κανονικού ν-γώνου είναι $\omega = \frac{\nu}{360}$

3. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 + \frac{\mu_\alpha}{2}$ όπου α, β, γ οι πλευρές του και μ_a η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρα α

4 .Το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από τη σχέση $E = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A$

5. Η πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι $\lambda_3 = R\sqrt{3}$

Α3. Πότε ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό **(μονάδες 5)**

.

ΘΕΜΑ Β

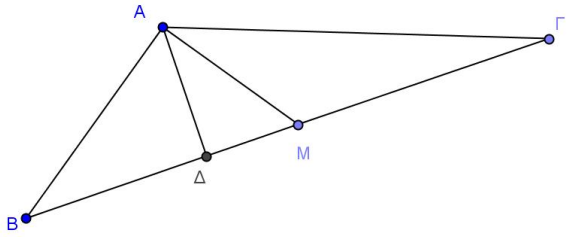
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ .Η διάμεσος του ΑΜ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΒ. Αν ΑΒ=4, ΑΜ=3, να υπολογίσετε :

Β1. Την πλευρά ΒΓ **(μονάδες 8)**

Β2. Την πλευρά ΑΓ **((μονάδες 9)**

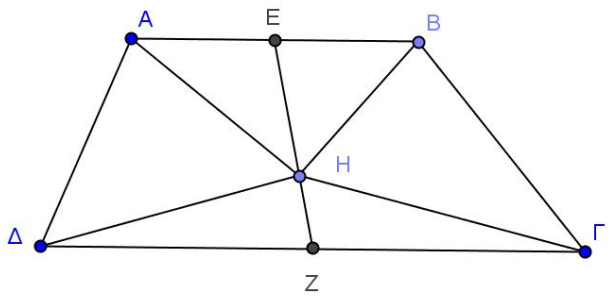
Β3. Την προβολή της διαμέσου ΑΜ πάνω στη ΒΓ

(μονάδες 8)



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ)
Αν Ε , Ζ είναι αντίστοιχα τα μέσα των βάσεων ΑΒ και ΓΔ , να αποδείξετε ότι:

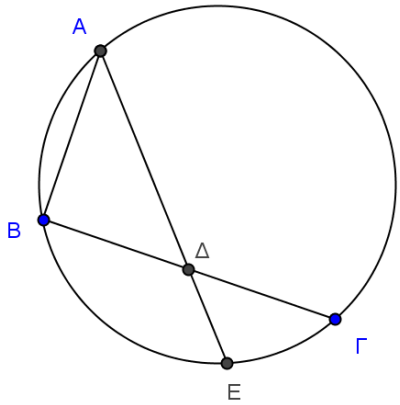


Γ1. (ΑΕΖΔ)=(ΕΒΓΖ) **(μονάδες 12)**

Γ2. Αν Η είναι ένα τυχαίο σημείο της ΕΖ τότε ισχύει: (ΗΑΔ)=(ΗΒΓ).
(μονάδες 13) .

ΘΕΜΑ Δ

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος με ακτίνα R.
Αν ΑΒ=λ_6 και ΒΓ=λ_3 και Δ είναι το μέσο της ΒΓ.
Να αποδείξετε ότι:



Δ1. Β=90^0 **(μονάδες 10)**

Δ2. ΑΔ=$\frac{R\sqrt{7}}{2}$ και ΔΕ= $\frac{3R\sqrt{7}}{14}$
(μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να αποδείξετε ότι σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

(15 μονάδες)

Β) Να απαντήσετε στην κόλλα σας αν οι παρακάτω προτάσεις είναι μαθηματικά σωστές βάζοντας ένα (Σ) ή μαθηματικά λανθασμένες βάζοντας ένα (Λ):

1.Αν $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ τότε η γωνία $\hat{A}$ είναι αμβλεία.

2.Σε κάθε τρίγωνο ισχύει η σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$:.

3.Το εμβαδόν Ε κυκλικού δίσκου ακτίνας R δίνεται από τον τύπο: $E = \pi R^2$.

4.Η πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,R) είναι $\lambda_6 = R\sqrt{3}$.

5.Το εμβαδόν τριγώνου με πλευρές α,β,γ εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,R) είναι ίσο με $E = \dfrac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4R}$.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Αν είναι γνωστό ότι ΒΓ=10cm και ΑΓ=6cm, τότε:

Α) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΒ.

(5 μονάδες)

Β) Να υπολογίσετε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ΒΔ,ΔΓ και ΑΔ.

(15 μονάδες)

Γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=5cm, ΑΓ=7cm και ΒΓ=6cm. Αν ΑΔ είναι το ύψος του και ΑΜ η διάμεσος του, να βρείτε:

Α) Το είδος του τριγώνου ως προς τι γωνίες του.

(7 μονάδες)

Β) Να δείξετε ότι $AM = 2\sqrt{7}cm$.

(6 μονάδες)

Γ) Να δείξετε ότι το μήκος της προβολής ΜΔ της διαμέσου ΑΜ επάνω στην πλευρά ΒΓ είναι 2cm.

(6 μονάδες)

Δ) Το μήκος του ύψους ΑΔ.

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Σε έναν κύκλο (Κ,R) είναι εγγεγραμμένο ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς $a = \sqrt{3}cm$. Να υπολογίσετε:

Α) Την ακτίνα R του κύκλου.

(6 μονάδες)

Β) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

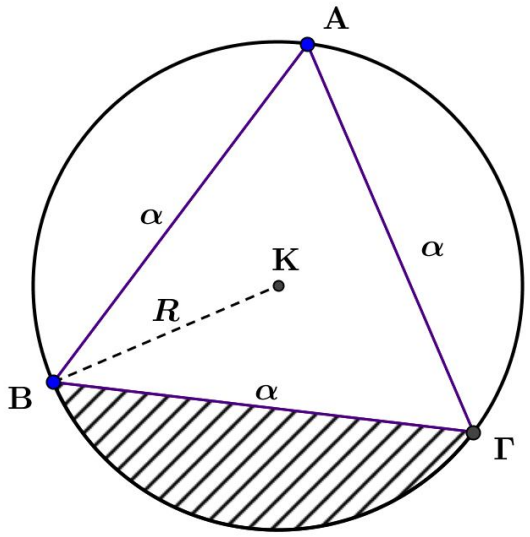
(6 μονάδες)

Γ) Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (Κ,R).

(6 μονάδες)

Δ) Το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τη χορδή ΒΓ, το τόξο ΒΓ και δεν έχει κοινά σημεία με το τρίγωνο ΑΒΓ.

(7 μονάδες)



ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το $1^{ο}$ θεώρημα διαμέσων.

Μονάδες 5

Α2. Σε κύκλο (Ο,R) να εγγράψετε ισόπλευρο τρίγωνο και να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R την πλευρά του λ_3 και το απόστημά του α_3.

Μονάδες 8

Α3. Να γράψετε τους τύπους μέσω των οποίων υπολογίζουμε α) το εμβαδό του κυκλικού τομέα β) το μήκος του τόξου ΑΒ

Μονάδες 2

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη **Σ**(σωστό) ή **Λ**(λάθος).

α) Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΜ διάμεσο ισχύει ότι $\beta^2+\gamma^2=2AM^2+\frac{\alpha^2}{2}$

β) Αν λ_6 είναι η πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμένου σε κύκλο (Ο,R) ισχύει ότι $\lambda_6=R\sqrt{3}$

γ) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία $\alpha^2>\beta^2+\gamma^2$ αν και μόνο αν $\hat{A} < 1^L$

δ) Το εμβαδό τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων επί το ύψος του.

ε)Το εμβαδό Ε κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E=\frac{1}{2}$αβημΒ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β.

Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ έχουν μήκη ΑΒ=9cm, ΒΓ=7cm, ΑΓ=12cm.

Β1. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες.
Μονάδες 8

Β2. Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ να υπολογιστεί το μήκος της.
Μονάδες 8

Β3. Να υπολογιστεί η προβολή της διαμέσου ΑΜ πάνω στην πλευρά ΒΓ.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=6cm και $\hat{A}=120^0$.

Γ1. Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.
Μονάδες 5

Γ2. Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου ΑΔΓ.
Μονάδες 5

Γ3. Αν Ε είναι σημείο της ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΕ=$\frac{1}{3}$ ΑΓ τότε να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου ΔΕΓ.

Μονάδες 8

Γ 4. Αν η παράλληλη από το Α προς την ΒΓ τέμνει την προέκταση της ΔΕ στο Ζ να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΖ.
Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ.
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=60^o$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Με διάμετρο ΒΓ κατασκευάζουμε το ημικύκλιο όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R:

Δ1. Το μήκος των ΑΒ και ΒΓ.
Μονάδες 5

Δ2. Το εμβαδό του κύκλου διαμέτρου ΑΓ.
Μονάδες 5

Δ3. Το εμβαδό του ημικυκλίου διαμέτρου ΒΓ.
Μονάδες 7

Δ4. Το εμβαδό του σχηματιζόμενου μηνίσκου μ.
Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Να αποδείξετε ότι :
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας .

Β. Να γράψετε τους τύπους που δίνουν το μήκος ℓ τόξου μ° και το εμβαδόν (OAB) κυκλικού τομέα μ° σε κύκλο ακτίνας R.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ) :

1) Για την πλευρά λ_3 ισοπλεύρου τριγώνου και το απόστημα α_6 κανονικού εξαγώνου, εγγεγραμμένων σε κύκλο (O,R) ισχύει : $2\lambda_3 = \alpha_6$

2) Για την κεντρική γωνία ω_ν κανονικού ν-γώνου ισχύει : $\omega_\nu = \dfrac{360^{\circ}}{\nu}$

3) Για την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ισχύει : $\rho = \dfrac{E}{\tau}$,
όπου τ η ημιπερίμετρος και Ε το εμβαδόν του τριγώνου .

4) Αν από εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΡΕ και μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α και Β, τότε $PE^2 = PA \cdot PB$.

5) Για τη διάμεσο μ_γ και τις πλευρές α,β,γ τριγώνου ΑΒΓ ισχύει :
$\mu_\gamma^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2$

(Μονάδες : 9+6+10)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Η γωνία φ_ν κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, R) είναι $\varphi_\nu = 150^{\circ}$.
Να δείξετε ότι :

α) η κεντρική γωνία είναι $\omega_\nu = 30^{\circ}$

β) ν = 12

γ) $\lambda_{12}^2 = R^2(2-\sqrt{3})$

δ) το εμβαδόν του πολυγώνου είναι $E = 3R^2$

(Δίνεται ότι $\eta\mu 30^{\circ} = \dfrac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu 30^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$)

(Μονάδες :5+6+7+7)

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε α = 13, β = 14, γ = 15 .

α) Να βρείτε το είδος του του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

β) Να δείξετε ότι (ΑΒΓ) = 84 .

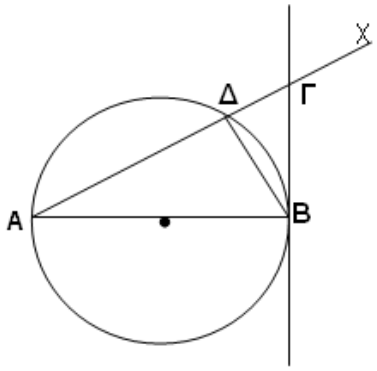
γ) Να υπολογίσετε το μήκος του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου .

δ) Να βρείτε το μήκος της προβολής της διαμέσου μ_α στην πλευρά ΒΓ .

(Μονάδες : 6+6+6+7)

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Σε κύκλο (Ο,R) η ΑΒ είναι διάμετρος.
Φέρνουμε ημιευθεία Αχ , ώστε $B\hat{A}\chi = 30^\circ$.
Η Αχ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ
και η εφαπτομένη του κύκλου στο Β τέμνει
την Αχ στο Γ (όπως στο διπλανό σχήμα).



α) Να αποδείξετε ότι:
i) ΒΔ = R και ΑΔ=R$\sqrt{3}$.
ii) (ΓΑΒ) = 4(ΒΓΔ) .
ιιι) 3ΒΓ = 2 R$\sqrt{3}$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του
μικτόγραμμου τριγώνου ΓΔΒ ως συνάρτηση του R.

(Μονάδες : 6+6+6+7) .

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του. Δηλαδή,

$$E = \frac{(B+\beta)}{2}\cdot\upsilon$$

όπου B, β οι βάσεις του τραπεζίου και υ το ύψος του.

Μονάδες 9

Β. Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του.

Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Δύο ισεμβαδικά τρίγωνα είναι πάντα και ίσα.

2. Η κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου ω_ν είναι ίση με $\frac{360^\circ}{\nu}$.

3. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ τότε η γωνία Α είναι οξεία.

4. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{2R}$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

5. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Οι πλευρές ενός τριγώνου $AB\Gamma$ έχουν μήκη $\alpha = 7cm$, $\beta = 12cm$ και $\gamma = 9cm$.

Α. Να εξεταστεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

Μονάδες 8

Β. Να αποδείξετε ότι η προβολή της α πάνω στην γ έχει μήκος $\frac{7}{9}cm$.

Μονάδες 9

Γ. Να αποδείξετε ότι $\text{συν}\hat{B} = -\frac{1}{9}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Σε κύκλο (Ο,10cm) παίρνουμε τις χορδές ΑΒ=10cm, ΒΓ=$10\sqrt{3}$ cm και ΓΔ=$10\sqrt{2}$ cm.

Α. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $(O\hat{A}B)$.

Μονάδες 6

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΓ.

Μονάδες 6

Γ. Να υπολογίσετε το μήκος του κυρτού τόξου ΓΔ.

Μονάδες 6

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ $(\text{ΑΒ} < \text{ΑΓ})$ με $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$, το ύψος του ΑΗ και η διάμεσος ΑΜ που τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Δ. Αν Ε είναι η προβολή του σημείου Μ στην ΑΓ, να αποδείξετε ότι :

Α. $\hat{\text{Α}} < 90^\circ$

Μονάδες 4

Β. $\text{ΑΜ} = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

Γ. $\text{ΜΔ} = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{6}$

Μονάδες 6

Μονάδες 6

Δ. $\alpha \cdot \text{ΑΗ} = 2\beta \cdot \text{ΜΕ}$

Μονάδες 5

Ε. $\beta^2 - \alpha^2 = \alpha \cdot \text{ΗΜ}$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι αν δυο χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου τέμνονται σε σημείο Ρ, τότε ισχύει: $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$

(Μονάδες 10)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Το μήκος τόξου μ^o σε κύκλο ακτίνας R δίνεται από την σχέση $l = \frac{\pi\rho\mu}{180}$.

β) Η πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με ακτίνα R δίνεται από τον τύπο $\lambda_6 = R\sqrt{3}$

γ) Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου ΑΒΓ εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R) δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{R}$ όπου α, β και γ τα μήκη των πλευρών του.

δ) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

ε) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ αν και μόνο αν $\hat{A} < 1$ L.

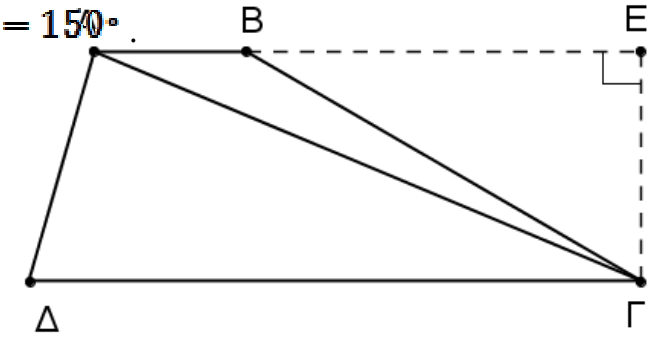
(Μονάδες 10)

Γ. Να γράψετε τον ορισμό του κανονικού πολυγώνου.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με πλευρές $AB = 2$, $B\Gamma = 6$, $\Gamma\Delta = 8$ και γωνία $\hat{B} = 150°$.



Να υπολογίσετε:

α) Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)

β) Το ύψος ΓΕ του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στη βάση ΑΒ.

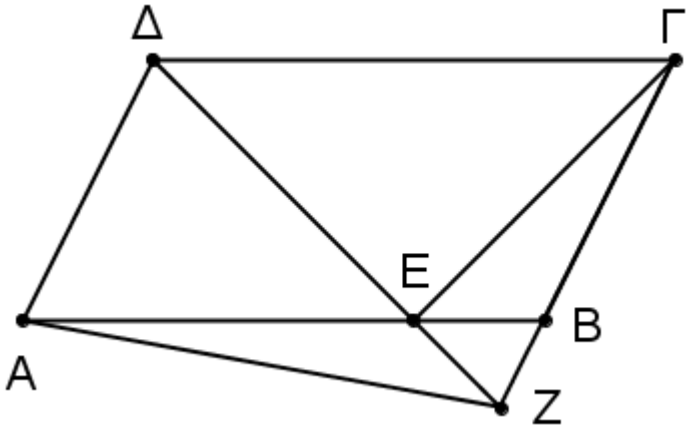
(Μονάδες 8)

γ) Το εμβαδό του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της πλευράς ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΕ=3ΕΒ. Η προέκταση της ΔΕ τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Ζ.
Να αποδείξετε ότι:



α) (ΑΔΕ)=3(ΕΒΓ)

(Μονάδες 8)

β) (ΑΕΖ)=3(ΒΕΖ)

(Μονάδες 8)

γ) Αν (ΓΕΖ)=4 τετραγωνικές μονάδες να υπολογίσετε το (ΑΔΖ).

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) με πλευρές $AB = \lambda_4$ και $B\Gamma = R\sqrt{3}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ

και να αποδείξετε ότι: $A\Gamma = \dfrac{R(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$

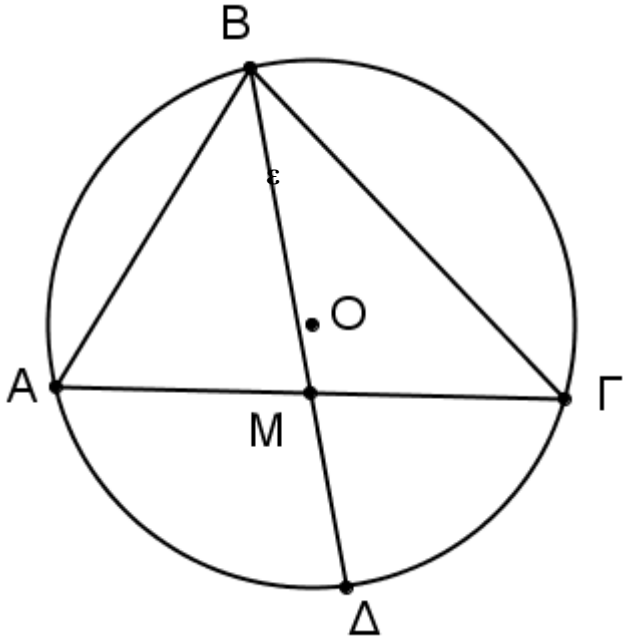
(Μονάδες 8)

β) Αν η προέκταση της διάμεσου ΒΜ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον κύκλο στο Δ, να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΒΜ και ΜΔ συναρτήσει της ακτίνας R.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό **ε** του (γραμμοσκιασμένου) κυκλικού τμήματος .

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

Μονάδες 9

Α2. Να γράψετε τους τύπους που δίνουν την πλευρά λ_3 και το απόστημα α_3 ενός ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R.

Μονάδες 6

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu\text{Α}$.

β. Σε τρίγωνο ΑΒΓ αν ισχύει $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\hat{\text{Α}} > 90^0$.

γ. Δύο οποιαδήποτε ισοδύναμα πολυγωνικά χωρία είναι ίσα.

δ. Το μήκος l, ενός τόξου μ^0 κύκλου ακτίνας R δίνεται από τον τύπο $l = \frac{\pi R\mu}{180}$.

ε. Αν ω_ν η κεντρική γωνία και φ_ν η γωνία ενός κανονικού ν–γώνου τότε ισχύει $\omega_\nu + \varphi_\nu = 90^0$.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β

Έστω κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές, εγγεγραμμένο σε κύκλο μήκους L = 20π. Το απόστημα του κανονικού πολυγώνου είνα $a_\nu = 5\sqrt{3}$ ι.

Β1. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου και το εμβαδόν Ε του κυκλικού δίσκου.

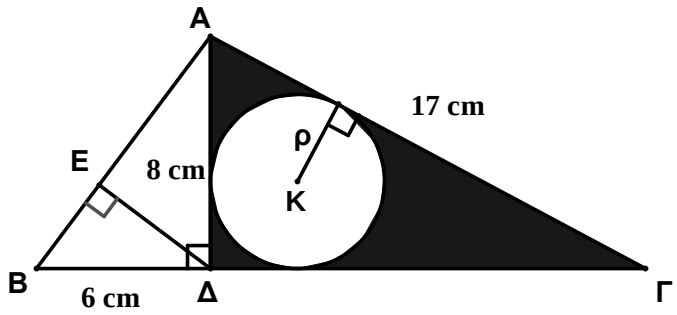
Β2. Να βρείτε το πλήθος των πλευρών ν του πολυγώνου και την πλευρά του λ_ν.

Β3. Να υπολογίσετε την κεντρική γωνία ω_ν και την γωνία φ_ν του πολυγώνου.

Μονάδες 9 + 8 + 8 = 25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ = 17 cm, ύψος ΑΔ = 8 cm και ΒΔ = 6 cm. Αν $\Delta E \perp AB$ και (Κ, ρ) ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΔΓ, τότε:



Να υπολογίσετε:

Γ1. Τα μήκη των τμημάτων ΑΒ και ΔΓ.

Γ2. Το μήκος του τμήματος ΔΕ.

Γ3. Την ακτίνα ρ του κύκλου (Κ, ρ).

Γ4. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του σχήματος.

Μονάδες 10 + 5 + 5 + 5 = 25

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α = 8, β = 9 και γ = 11. Προεκτείνουμε την ΓΒ κατά τμήμα ΒΔ = 4. Αν Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα τότε:

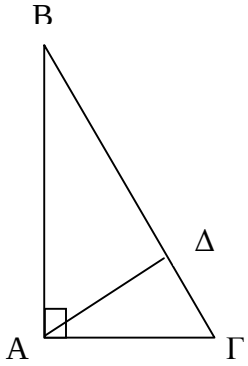
Δ1. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του.

Δ2. Να αποδείξετε ότι 4(ΔΒΕ) = (ΑΒΓ).

Δ3. Να αποδείξετε ότι (ΓΔΕΖ) = (ΑΒΓ).

Μονάδες 8 + 8 + 9 = 25

ΘΕΜΑ Α



Α1. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, ΑΔ είναι το ύψος του.

Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών του.

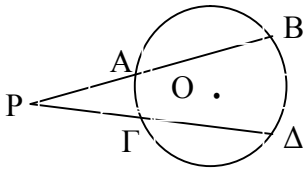
Α2. Να διατυπώσετε το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων τριγώνου.

Α3. Να ελέγξετε αν είναι Σωστή ή Λανθασμένη καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεών σας τη λέξη Σωστή ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ισχύει ότι $\frac{\lambda_\nu^2}{4} + \alpha_\nu^2 = R^2$.

2. Η δύναμη ενός σημείου ως προς κύκλο είναι θετικός αριθμός αν και μόνο αν το σημείο αυτό είναι εσωτερικό του κύκλου.

3. Το εμβαδόν ενός ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.

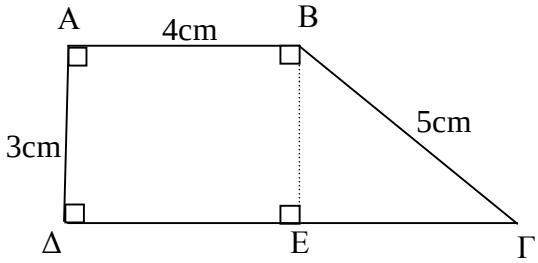


4. Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

5. Το μήκος κύκλου ακτίνας R δίνεται από τη σχέση $L = 2\pi R$.

Μονάδες: 10 + 5 + 10 = 25

ΘΕΜΑ Β



Έστω ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $AB < \Gamma\Delta$. Αν $AB = 4cm$, $A\Delta = 3cm$ και $B\Gamma = 5cm$. Θεωρούμε το ύψος ΒΕ του τραπεζίου.

Β1. Να αποδείξετε ότι το μήκος του τμήματος $E\Gamma = 4cm$.

Β2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

Β3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΕ.

Μονάδες: 9 + 8 + 8 = 25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} > 90^\circ$ και με μήκη πλευρών $AB = 5cm$, $A\Gamma = 3cm$ και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(AB\Gamma) = \frac{15\sqrt{3}}{4} cm^2$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A} = 120^\circ$.

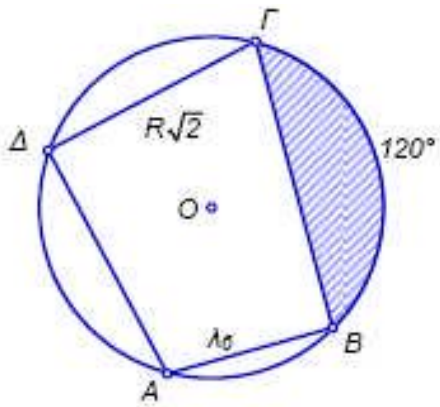
Γ2. Να αποδείξετε ότι η $B\Gamma = 7cm$.

Γ3. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

Γ4. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου και ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες: 7 + 7 + 7 + (2 + 2) = 25

ΘΕΜΑ Δ



Έστω κύκλος (O,R) και τα διαδοχικά του σημεία Α, Β, Γ και Δ για τα οποία ισχύουν $AB = \lambda_6$, $\overset{\frown}{B\Gamma} = 120^\circ$ και $\Gamma\Delta = R\sqrt{2}$

Δ1.Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = R\sqrt{3}$ και $A\Delta = R\sqrt{2}$

Δ2. Έστω το τμήμα $OK \perp A\Delta$. Αν $OK = \sqrt{2}$, να βρεθεί η ακτίνα R του κύκλου (O,R).

Δ3. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΓ είναι ορθογώνια.

Δ4. Έστω ότ $R = 2cm$ ι. Να υπολογισθεί το εμβαδό του σκιασμένου κυκλικού τμήματος που αντιστοιχεί στο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$.

Μονάδες: (3+3) + 4 + (4+4) + 7 = 25

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση
(18 Διαγωνίσματα)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να γράψετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Β. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνθήκη από τη στήλη Α με τη σωστή ιδιότητα από τη στήλη Β.

1.	$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$	Α.	$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$
2.	$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$	Β.	$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert$
3.	$\vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$	Γ.	$\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$
4.	$\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}$	Δ.	$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert$
5.	$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=60^o$	Ε.	$2\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert$

Μεταφέρετε στην κόλλα αναφοράς τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο.

1.	2.	3.	4.	5.

Γ. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ).

1. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

2. Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$.

3. Η εξίσωση $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=r^2$ με $r\in\mathbb{R}$ είναι πάντοτε εξίσωση κύκλου.

4. Η εξίσωση $x^2-y^2=1$ παριστάνει ισοσκελή υπερβολή.

5. Τα σημεία $M(x,y)$ με $x=\beta\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=\alpha\eta\mu\theta$ με $\theta\in[0,2\pi)$, ανήκουν στην έλλειψη

$$C:\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1.$$

Μονάδες 5+10+10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-3)$ και $\vec{\beta}=(-1,2)$.

Α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+5\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

Β. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\nu}=(3,2)$ ως γραμμικό συνδιασμό των $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$.

Μονάδες 10+15

ΘΕΜΑ 3ο

Οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = (a-4)x + a$ και $\varepsilon_2 : y = (14-2a)x - a - 2$ είναι παράλληλες.
Να βρείτε :

Α. Τον αριθμό α.

Β. Τα σημεία τομής των ε_1 και ε_2 με τους άξονες.
Μονάδες 10+15

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται κύκλος με εξίσωση : $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$.

Α. Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου.

Β. Να εξετάσετε ποια από τα σημεία Μ(3,0), Ν(0,-4), Ρ(3,-7) και Σ(1,1) είναι σημεία του κύκλου.

Γ. Να εξετάσετε αν το σημείο Ο (0,0) είναι εσωτερικό ή εξωτερικό σημείο του κύκλου.
Μονάδες 10+5+10

Απαντάτε σε όλα τα θέματα.
Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες.

ΘΕΜΑ 1

Α) Αν $\vec{\alpha} = (x_1 , y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2 , y_2)$ αποδείξτε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, όπου λ_1 και λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ εφόσον αυτά δεν είναι παράλληλα στον άξονα y΄y. [Μονάδες 10]

Β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α) Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ομόρροπα διανύσματα τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

β) Η ευθεία με εξίσωση Ax +By + Γ= 0 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B,A)$

γ) Μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0,y_0)$ και είναι παράλληλη στον x΄x έχει εξίσωση $y = y_0$.

δ) Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$ έχει εστία $E(\frac{p}{2} , 0)$

ε) Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες Ε΄(− γ,0) και Ε(γ,0) και μήκος μεγάλου άξονα 2α>2γ είναι $\frac{x^2}{\beta^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ με $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ [Μονάδες 10]

Γ) Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης με εστίες τα σταθερά σημεία Ε΄ και Ε του επιπέδου. [Μονάδες 5]

ΘΕΜΑ 2

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{4}$.

Έστω επίσης το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

Α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ [Μονάδες 5]

Β) Να βρείτε το $|\vec{v}|$ [Μονάδες 7]

Γ) Να βρείτε το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{v}$ [Μονάδες 6]

Δ) Να αποδείξετε ότι συν$(\vec{\alpha},\vec{v})=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ [Μονάδες 7]

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι συντεταγμένες των κορυφών του Α(6,1) και Γ(2,3).

Αν το ύψος του ΑΔ έχει εξίσωση x− 2y − 4 = 0 και η διάμεσός του ΒΛ έχει εξίσωση y = − x + 6, να βρεθούν:

Α) η εξίσωση της πλευράς ΒΓ [Μονάδες 7]

Β) η εξίσωση της πλευράς ΑΓ [Μονάδες 7]

Γ) οι συντεταγμένες της κορυφής Β [Μονάδες 5]

Δ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΛ, όπου Λ το μέσο της ΑΓ [Μονάδες 6]

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda^2 x - 4\lambda y + \lambda^2 = 0$ (1) όπου $\lambda \in R^*$.

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in R^*$, του οποίου να προσδιοριστεί το κέντρο και η ακτίνα του. [Μονάδες 5]

Β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε παραβολή από την οποία εξαιρείται η κορυφή της.

[Μονάδες 8]

Γ) Να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα της παραβολής του ερώτημα Β).

[Μονάδες 5]

Δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 2$

[Μονάδες 7]

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

(Μονάδες 05)

Β. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ, να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

(Μονάδες 12)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στη κόλλα σας τη λέξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

β. Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$ είναι παράλληλο στην ευθεία $\varepsilon : Ax + By + \Gamma = 0$.

γ. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xy + x_1y_1 = \rho^2$

.

. **δ.** Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει : Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ τότε $\vec{\alpha} = 0$ ή $\vec{\beta} = 0$.

(Μονάδες 4Χ1=4)

Δ. Να συμπληρώσετε στην κόλλα σας τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α. Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση ……

β. Η ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda \in R$ και διέρχεται από το σημείο $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση ……

γ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο αν ισχύει ……

δ. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου τότε $det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) =$ ……

(Μονάδες 4Χ1=4)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=60^{0}$.Δίνονται επίσης τα διανύσματα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε :

α. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. **(Μονάδες 13)**

β. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$. **(Μονάδες 12)**

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Δίνεται το σημείο $A(2,1)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία OA, έχει εξίσωση $y=\frac{1}{2}x$. **(Μονάδες 08)**

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην ευθεία OA, έχει εξίσωση $y=-2x+5$. **(Μονάδες 08)**

γ. Αν η ευθεία (ε) του ερωτήματος (β) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B, να βρείτε τον εμβαδόν του τριγώνου OAB . **(Μονάδες 09)**

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Δίνεται ο κύκλος $C_1: x^2+y^2-4x+1=0$ και η παραβολή $C_2: y^2=2px$.

Έστω ότι το σημείο $A(1,\lambda)$ με $\lambda>0$ είναι κοινό σημείο των C_1 και C_2. Τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $\lambda=\sqrt{2}$ και $p=1$

. **(Μονάδες 06)**

β. Να αποδείξετε ότι το κέντρο K και η ακτίνα ρ του κύκλου C_1 είναι: $K(2,0)$ και $\rho=\sqrt{3}$. **(Μονάδες 06)**

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της παραβολής C_2 στο σημείο A έχει εξίσωση $\varepsilon: x-\sqrt{2}y+1=0$. **(Μονάδες 06)**

δ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) του ερωτήματος (γ), είναι εφαπτομένη και του κύκλου C_1 . **(Μονάδες 07)**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνονται τα σημεία $A(x_1,\psi_1)$ και $B(x_2,\psi_2)$. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες x, ψ του μέσου $M(x,\psi)$ το ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ και: $\psi=\frac{\psi_1+\psi_2}{2}$

Μονάδες 10

Α2. Ποιός τύπος εκφράζει την απόσταση $d(M_0,\varepsilon)$ του σημείου $M_0(x_0,\psi_0)$ από την ευθεία ε: $Ax + B\psi + \Gamma = 0$;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

(i). Ισχύει: $|\vec{\alpha}|^2=\vec{\alpha}^2$

(ii). Αν $\lambda\cdot\vec{\alpha}=\lambda\cdot\vec{\beta}$ και $\lambda\in R$ τότε οπωσδήποτε: $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

(iii). Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,\psi_1)$ είναι: $xx_1+yy_1+\rho^2=0$

(iv). Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή

(v). Το σημείο (1,-1) ανήκει στον κύκλο: $x^2+y^2=1$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία: Α(1,-2) , Β(-3,0) και Γ(2,5)

Β1. Να βρείτε το μέσο $M(x,\psi)$ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ

Μονάδες 7

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ

Μονάδες 9

Β3. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Σε ορθογώνιο τρίγωνο *ΑΒΓ*, ($\hat{B}=90^\circ$), έχουμε: $\overrightarrow{AB}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Gamma}=3\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=3$

Γ1. Να εκφράσετε το $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές
Μονάδες 10

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η εξίσωση $C: x^2+\psi^2+2x-\psi-3+\lambda(x+\psi-2)=0$ (1) , $\lambda \in \mathrm{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathrm{R}$
Μονάδες 9

Δ2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων
Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι της (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία και να βρείτε την κοινή χορδή τους
Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ είναι η $C: x^2 + y^2 = \rho^2$.

Μονάδες 7

Α2. *Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας τη λέξη ΄΄**Σωστό**΄΄ ή ΄΄**Λάθος**΄΄, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν $B \neq 0$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι: $-\frac{A}{B}$.

β. Αν $A^2 + B^2 - \Gamma > 0$, τότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο.

γ. Ο άξονας $y'y$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής: $y^2 = 2px$.

δ. Το εμβαδό τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|$.

Μονάδες 10

Α3. *Στη **στήλη Α** δίνονται οι εξισώσεις κωνικών τομών και στη **στήλη Β** οι εξισώσεις των εφαπτομένων των αντίστοιχων κωνικών τομών, στο σημείο επαφής (x_1,y_1). Να αντιστοιχίσετε κάθε γράμμα της **στήλης Α** στο σωστό αριθμό της **στήλης Β**.*

Στήλη Α		***Στήλη Β***	
α.	$x^2 + y^2 = \rho^2$	***1.***	$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$
β.	$y^2 = 2px$	***2.***	$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$
γ.	$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	***3.***	$x_1x + y_1y = \rho^2$
δ.	$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	***4.***	$yy_1 = p(x + x_1)$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ *με* $|\vec{\alpha}| = 1$ *και* $|\vec{\beta}| = 2$.

Αν τα διανύσματα $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ *και* $\vec{u} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, είναι κάθετα, τότε:

Β1. Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

Μονάδες 8

Β2. Να βρεθεί το μέτρο της γωνίας $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$ σε μοίρες.

Μονάδες 7

Β3. Να δείξετε ότι: $|\vec{v}| = \sqrt{3}|\vec{u}|$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραβολή $C:\ y^2 = 4x$. Να βρείτε:

Γ1. Την εστία Ε και την διευθετούσα δ της παραβολής C.

Μονάδες 7

Γ2. Τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 που διέρχονται από την εστία Ε και απέχουν από την αρχή των αξόνων Ο(0,0) απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Μονάδες 10

Γ3. Την εξίσωση της υπερβολής που η μία κορυφή της είναι η εστία της παραβολής C και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{1}{2}x$ και $y = -\frac{1}{2}x$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1:\ x + 2y + 1 = 0$ *και* $\varepsilon_2:\ x + 2y + 6 = 0$. Να βρείτε:

Δ1. Την απόστασή τους $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Μονάδες 7

Δ2. Την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ε_1 με τον άξονα $x'x$ και αποκόπτει από την ευθεία ε_2 χορδή ΑΒ μήκους $(\mathrm{AB}) = 4$.

Μονάδες 10

Δ3. Την εξίσωση της έλλειψης που η μία εστία της είναι το σημείο τομής της ευθείας ε_2 με τον άξονα $y'y$ και έχει εκκεντρότητα ίση με $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 1ο

1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου C: $\chi^2 + \psi^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(\chi_1,\psi_1)$ είναι η ευθεία ε:$\chi\chi_1+\psi\psi_1 = \rho^2$. **(Μον. 10)**
2. Να γράψετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων. **(Μον. 5)**
3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
   α) Η ευθεία με εξίσωση $A\chi+B\psi+\Gamma=0$ με $A\neq 0$ ή $B\neq 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n}=(B,-A)$.
   β) Η εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 +A\chi+B\psi+\Gamma= 0$ παριστάνει κύκλο αν ισχύει $A^2 + B^2 +4\Gamma > 0$.
   γ) Αν $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\beta}\neq 0$, τότε $\vec{a}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a}=\lambda\vec{\beta}$, $\lambda\in\mathbf{R}$.
   δ) Η εξίσωση της κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(\chi_0,\psi_0)$ είναι η $\chi = \chi_0$.
   ε) Αν $\vec{a}=(\chi_1,\psi_1)$ και $\vec{\beta}=(\chi_2,\psi_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου Οχψ τότε ισχύει: $\vec{a}\bullet\vec{\beta}=\chi_1\psi_1+\chi_2\psi_2$. **(Μον. 5· 2=10)**

ΘΕΜΑ 2ο

Για τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{u}$, $\vec{\nu}$ δίνονται ότι:

$|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| =3$ και $(\vec{a} \wedge \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$, $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \kappa\vec{a} +2\vec{\beta}$

1. Να δείξετε ότι: $\vec{a}\bullet\vec{\beta} = 3$ **(Μον. 7)**
2. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $3\vec{a}\bullet(3\vec{a} - \vec{\beta})$ **(Μον. 8)**
3. Να υπολογίσετε τον $\kappa\in R$, ώστε $\vec{u}\perp\vec{\nu}$ **(Μον. 10)**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία A(1,3), B(-1,2) και Γ(3,-2) του καρτεσιανού επιπέδου.

1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου **(Μον.6)**
2. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ **(Μον.6)**
3. Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ από την πλευρά του ΒΓ . **(Μον.6)**
4. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. **(Μον.7)**

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τον κύκλο C: $\chi^2 + \psi^2 = 4$ και το σημείο P(0,4).

1. Να δείξετε ότι το σημείο P είναι εξωτερικό του κύκλου. **(Μον.5)**

2. Από το σημείο P(0,4) φέρνουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου C και ονομάζουμε A και B τα σημεία επαφής.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων PA και PB του κύκλου C. **(Μον.10)**

β) Να βρείτε την οξεία γωνία την οποία σχηματίζουν οι εφαπτόμενες PA και PB του κύκλου C. **(Μον.10)**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Ο(0,0) και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ (Μονάδες 10)

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής. (Μονάδες 5)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή , ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν Α($x_1 1, y_1 1$) και Β($x_1 2, y_1 2$) τότε (ΑΒ) =$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

β) Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε $\vec{\alpha}\ \vec{\beta} = x_1 y_1 + x_2 y_2$

γ) Η απόσταση του σημείου $M(x_o, y_o)$ από τη ευθεία ε: Ax+Βy+Γ=0 δίνετε από τον τύπο $d(M,\varepsilon) = \dfrac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

δ) Η εξίσωση $(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 = \rho^2$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(x_o, y_o)$ και ακτίνα ρ .

ε) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες: $y = \dfrac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\dfrac{\beta}{\alpha}x$

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(1 ,2) , Β(-2 , 5) , Γ(5 , 6).

Β1. Να αποδείξετε ότι η γωνία Α του τριγώνου είναι ορθή.
(Μονάδες 7)

Β2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
(Μονάδες 8)

Β3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από την κορυφή Α του τριγώνου και είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνετε ο κύκλος C_1: $x^2 + y^2 = 5^2$

Γ1. Να δείξετε ότι το σημείο Μ(4 , 3) ανήκει στον παραπάνω κύκλο.
(Μονάδες 4)

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) του παραπάνω κύκλου στο σημείο του Μ(4 , 3).
(Μονάδες 8)

Γ3. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και του κύκλου
C_2: $(x-10)^2+(y-5)^2=6^2$
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση: $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$

Δ1. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών, των εστιών καθώς επίσης και τη εκκεντρότητα της έλλειψης.
(Μονάδες 10)

Δ2. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία (η): x-y+2=0.
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα τα οποία δεν είναι παράλληλα με τον άξονα y΄y. Να αποδείξετε την ισοδυναμία: $\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2$. **Μονάδες 7**

Α2. Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_0,y_0)$ ένα σημείο του επιπέδου.

α) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α και για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης. **Μονάδες 2**

β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0,y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα x΄x. **Μονάδες 2**

Α3. Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία δ. **Μονάδες 4**

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ και αντιστρόφως.

β) Κάθε εξίσωση της μορφής Ax+By+Γ=0 παριστάνει πάντα ευθεία.

γ) Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή Ο των αξόνων και ακτίνα ρ είναι $x^2+y^2=\rho^2$.

δ) Η έλλειψη με εξίσωση: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\alpha>\beta$ έχει εστίες τα σημεία Ε΄(-γ,0) και Ε (γ,0) όπου $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$.

ε) Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=120^0$

Β1. Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\frac{1}{2}$ **Μονάδες 5**

Β2. Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$ είναι $|\vec{u}|=\sqrt{3}$ **Μονάδες 6**

Β3. Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{u}$. **Μονάδες 9**

Β4. Το βρείτε $\lambda\in\mathbb{R}$ αν $\vec{\alpha}\perp(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα σημεία Α(3,4) , Β(1,3) , Γ(-1, 7).

Γ1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β και Γ δεν είναι συνευθειακά.
Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β και να βρείτε το εμβαδό του
Μονάδες 10

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ. **Μονάδες 5**

Γ4. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι ορθογώνιο. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\lambda-2)x + (\lambda+2)y + \frac{\lambda^2}{2} = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει ίσους κύκλους . **Μονάδες 7**

Δ2. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων είναι σημεία της ευθείας (ε) με εξίσωση : $x-y-2=0$. **Μονάδες 6**

Δ3. Έστω η παραβολή (C): $x^2=2py$ και η ευθεία (ε) του ερωτήματος **Δ2.** Αν η (ε) είναι εφαπτομένη της παραβολής, να βρείτε

i. την παράμετρο p, την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

ii. Την εφαπτομένη (η) της παραβολής, η οποία είναι κάθετη στην (ε).

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και $M(x,y)$ το μέσο του ΑΒ να αποδείξετε ότι: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ και $y=\frac{y_1+y_2}{2}$

Μονάδες 10

Α2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

1. Αν $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

2. Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$ με $A\neq 0$ ή $B\neq 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή.

3. Δύο διανύσματα λέγονται αντίθετα όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση.

4. Το διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$ είναι παράλληλο στην ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$

5. Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο

Μονάδες 10

Α3. Τι ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}=(x,y)$ με $x\neq 0$;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία Α(2,3) και Β(6,-3)

Β1 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ και τα σημεία τομής της Μ ,Ν με τους άξονες χ΄χ και y΄y αντίστοιχα

μονάδες 10

Β2 Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσον του ΑΒ

μονάδες 8

Β3. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ

μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται η έλλειψη C_1: $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ και ο κύκλος C_2: $x^2+y^2+2x-9=0$

Γ1. Να βρείτε τις εστίες και την εκκεντρότητα της έλλειψης C_1.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_2

Μονάδες 6

Γ3. Αν ε_1 και ε_2 είναι οι εφαπτόμενες των C_1 και C_2 αντίστοιχα που διέρχονται από το σημείο Α(2,1) να βρείτε τις εξισώσεις των ε_1 και ε_2 και την οξεία γωνία που σχηματίζουν.
μονάδες 13

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$|\vec{\alpha}| = 1 \, , 0 < |\vec{\beta}| \neq 1$ *και* $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

Δ1 Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.
Μονάδες 8

Δ2 Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ αν $(\vec{x} - \vec{\alpha}) \, // \, \vec{\beta}$ και $(\vec{x} + \vec{\beta}) \, // \, (\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})$
Μονάδες 10

Δ3 Αν $\vec{x} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ να βρείτε το μέτρο του $\vec{x}$ **.**
Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. α) Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία Ε΄(-γ,0) και Ε(γ,0) και σταθερό άθροισμα 2α .

β) Τι ονομάζουμε εκκεντρότητα ε της έλλειψης και τι συμβαίνει όταν αυτή τείνει στο μηδέν;

Β. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου C : $x^2 + \psi^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(\chi_1, \psi_1)$ έχει εξίσωση ε : $\chi\,\chi_1 + \psi\,\psi_1 = \rho^2$.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Έστω $A(\chi_1, \psi_1)$ και $B(\chi_2, \psi_2)$ δύο σημεία του επιπέδου ,

1) Αν $M(\chi,\psi)$ είναι το μέσο του ΑΒ , τότε $\chi = \chi_2 - \chi_1$ και $\psi = \psi_2 - \psi_1$.

2) Η απόσταση των Α,Β είναι (ΑΒ) = $\sqrt{(\chi_1+\chi_2)^2+(\psi_1+\psi_2)^2}$.

β) Έστω η παραβολή $\psi^2 = 2p\chi$,

1) Η απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα είναι $|2p|$.

2) Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $M(\chi_1, \psi_1)$, $\psi_1 \neq 0$, διέρχεται από το σημείο $N(-\chi_1, -\psi_1)$

(Μονάδες 7+10+8)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Δίνονται τα σημεία Α(1,3) και Β(3,5) .

α) Να δείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι λ = 1 και να βρείτε την εξίσωση της .

β) Να αποδείξετε ότι η κάθετη ευθεία στην ΑΒ στο σημείο Α έχει εξίσωση ε : $\psi = -\chi+4$ και να βρείτε το σημείο Γ στο οποίο η ε τέμνει τον χ΄χ.

γ) Αν Γ(4,0) , να βρείτε την απόσταση του Γ από την ΑΒ και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8+8+9)

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2,2)$ και $\vec{\beta} = (-3,0)$.
Να βρείτε :

α) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και τα $|\vec{a}|$ και $|\vec{\beta}|$

β) Τη γωνία των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$

γ) Τον αριθμό κ , ώστε $(\kappa\cdot\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp\vec{\beta}$

δ) Την προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{a}$

(Μονάδες 6+6+6+7)

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με γωνία ω = $\frac{\pi}{3}$ και η εξίσωση

$x^2 + \psi^2 - 2|\vec{a}|\chi - 6|\vec{\beta}|\psi + 6\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$ (1).

Α. Να δείξετε ότι :

α) $\vec{a} \neq 3\vec{\beta}$

β) η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με ακτίνα ρ = $|\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|$

Β. Αν Κ(2,3) το κέντρο του παραπάνω κύκλου ,

α) να δείξετε ότι $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και ρ = $\sqrt{7}$

β) Από το σημείο Γ(-2,3) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΓΑ και ΓΒ προς τον κύκλο. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

(Μονάδες 2+8+8+7)

Θέμα 1ο:

Α. Δίνονται τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\boldsymbol{\beta}=(x_2, y_2)$, τα οποία δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα y'y και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$.

(Μονάδες 10)

Β. Πότε η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο του κύκλου και ποια η ακτίνα του;

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στην κόλλα των απαντήσεών σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

1. Αν $\det(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία : $\boldsymbol{\alpha} // \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \det(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=1$.
2. Αν $\boldsymbol{\alpha} // \boldsymbol{\beta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = -|\boldsymbol{\alpha}| \cdot |\boldsymbol{\beta}|$.
3. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι : $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.
4. Στην παραβολή $y^2 = 2px$, η εξίσωση της διευθετούσας είναι $x = \frac{p}{2}$.
5. Η εφαπτομένη της έλλειψης C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 2ο:

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής Α των ευθειών ε_1 : $3x+4y-11=0$ και ε_2 : $2x-3y+21=0$ και :

i) είναι παράλληλη προς την ευθεία $x+2y+1=0$.

ii) είναι κάθετη προς την ευθεία $3x-y+5=0$.

iii) σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 10 τ.μ..

(Μονάδες 8+8+9)

Θέμα 3ο:

Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{u} = (-6, 8)$ και $\mathbf{v} = (9, -12)$.

i) Να δείξετε ότι είναι αντίρροπα.

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, η οποία έχει ημιάξονες με μήκη τα μέτρα των διανυσμάτων **u, v** και τις εστίες στον άξονα x'x. Να αποδείξετε ότι οι εστίες της έλλειψης είναι $E'(-5\sqrt{5}, 0)$ και $E(5\sqrt{5}, 0)$.

iii) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της υπερβολής, η οποία έχεις τις ίδιες εστίες με τις εστίες της έλλειψης του ερωτήματος (ii) και σταθερή διαφορά 2α = 20.

(Μονάδες 8+9+8)

<u>Θέμα 4ο:</u>

Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = \alpha x$ διέρχεται από το σημείο Α(3, 6) όπου α πραγματικός αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο Ε(3, 0)

ii) Έστω Ε' το συμμετρικό της εστίας Ε ως προς τον άξονα y'y. Αν Μ(x, y) είναι ένα οποιοδήποτε σημείο για το οποίο ισχύει

$\mathbf{ME}^2 = \mathbf{ME} \cdot \mathbf{E'E}$, να αποδείξετε ότι το σημείο Μ(x, y) ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο(0, 0) και ακτίνα 3.

iii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του παραπάνω κύκλου που διέρχονται από το σημείο Α.

(Μονάδες 8+8+9)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επίπεδου.. Αν $M(x_M, y_M)$ το μέσο του ΑΒ να αποδείξετε ότι: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

(Μονάδες 12)

Β. Να γράψετε τον ορισμό της παραβολής.

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη

Σωστό ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν ε είναι η εκκεντρότητα μιας έλλειψης τότε ε>1.

β) Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερή διαφορά 2α είναι

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 .$$

γ) Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως

δ) Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$ είναι κάθετο στην ευθεία ε: $Ax + By + \Gamma = 0$
$A \neq 0, B \neq 0$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τρία διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 4)$, $\vec{\beta} = (1, -1)$ και $\vec{\gamma} = (-3, \kappa)$ $\kappa \in R$. Να βρείτε:

α) Τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

(Μονάδες 8)

β) Το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. .

(Μονάδες 8)

γ) Την τιμή του του κ ώστε το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 9)

Θ Ε Μ Α 3ο

Δίνονται τα σημεία $A(-2,\frac{a-2}{a+1})$ και $B(-\frac{1}{a},-1)$ με α>1

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία Α και Β έχουν , για τις διάφορες τιμές του α , την μορφή $\alpha x+(\alpha+1)y+\alpha+2=0$

(Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες του (α) ερωτ. διέρχονται από σταθερό σημείο

(Μονάδες 9)

γ) Αν (ε) είναι η ευθεία που προκύπτει για α=3, να αποδείξετε ότι η (ε) εφάπτεται του κύκλου C: $(x-3)^2+(y+1)^2=4$

(Μονάδες 7)

Θ Ε Μ Α 4ο

Δίνεται η εξίσωση $C: x^2+y^2-2\lambda x+2(\lambda+2)y+4\lambda+4=0$, με $\lambda\in R^*$

α) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\neq 0$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα συναρτήσει του λ.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε ευθεία της οποίας να βρείτετην εξίσωση.

(Μονάδες 7)

γ) Για $\lambda=-2$,

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της έλλειψης η οποία έχει εστίες τα σημεία στα οποία ο κύκλος τέμνει τον άξονα $y'y$ και το μήκος του μικρού άξονα ισούται με το μήκος της διαμέτρου του κύκλου C είναι $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{12}=1$

(Μονάδες 5)

ιι) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με, εστίες στον $y'y$, ασύμπτωτη παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v}=(-4,-2)$ και εστιακή απόσταση ίση με το μεγάλο άξονα της έλλειψης του υποερωτήματος γ(i)

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω λ_1 , λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αντίστοιχα με $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ $\not\parallel$ y'y . Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

Μονάδες 10

Α2. Έστω δύο σημεία Ε, Ε΄ του επιπέδου. Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία Ε, Ε΄.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

β. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.

γ. Η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 2py$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.

δ. Η ευθεία με εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$.

ε. Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ είναι κάθετο στην ευθεία Ax + By + Γ = 0 με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β

Έστω το σημείο Α(-1, 2) και τα διανύσματα

$\overrightarrow{AB} = (3, -3)$, $\vec{v} = (20, 13)$, $\vec{u} = (\mu - 1, 2)$.

Β1. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Β.

Β2. Να υπολογίσετε την γωνία του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ με τον άξονα x΄x.

Β3. Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα.

Β4. Να υπολογίσετε το μ ώστε $\overrightarrow{AB} \,//\, \vec{u}$.

Μονάδες 5 + 7+ 6 + 7 = 25

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η εξίσωση $(\kappa-1)\cdot x^2-(2\kappa-5)\cdot y^2-(2\kappa+4)\cdot x=3\cdot(\kappa-2)\cdot(\kappa-1)$, (1) με $\kappa\in R$.

Γ1. Αν κ = 2 , να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Γ2. Αν κ = 1 , να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει παραβολή και να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της.

Γ3. Αν κ = - 2 , να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει υπερβολή και να βρείτε τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της.

Μονάδες 8+7+10=25

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα σημεία $M(4\kappa+3,3\kappa-1)$ με $\kappa\in R$, $A(7,\ -3)$ και $B(3,-6)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ ανήκουν σε ευθεία ε και να προσδιορίσετε την εξίσωση της.

Δ2. Να προσδιορίσετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Α και εφάπτεται στην ευθεία ε του προηγούμενου ερωτήματος.

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ και να αποδείξετε ότι είναι παράλληλη στην ευθεία ε.

Δ4. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ είναι σταθερό για κάθε $\kappa\in R$.

Μονάδες 6 + 6 + 6 + 7 = 25

ΘΕΜΑ Α

α) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή(Σ) ή λάθος (Λ),καθεμια από τις παρακάτω προτάσεις

i) Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα.
Αν $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$ τότε $\lambda_1=\lambda_2$.

ii) ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$=(x,y) είναι $\lambda=\frac{x}{y}$.

iii) το εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι
$\vec{a}\cdot\vec{\beta}=|\vec{a}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi$ όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

iv) Αν $\vec{\alpha}$=(x,y) τότε $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x+y}$ (μονάδες 10)

β) Να αντιστοιχίσετε τα σωστά

εξίσωση	κωνική
1) $x^2+y^2=9$	i)έλλειψη
2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$	ii)κύκλος
3) $y^2=8x$	iii)υπερβολή
4) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$	iv) παραβολή

(μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου δίνεται από την σχέση $\chi^2+y^2=\rho^2$.
(μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Β

α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(3,4) και $\vec{\beta}$=(6,8).

i)να βρεθούν τα διανύσματα $2\vec{\alpha}$, $3\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$. (μονάδες 5)

ii)να βρείτε τα $|(\alpha|)^{\rightarrow}$ και $|\overrightarrow{3\beta}|$. (μονάδες 5)

iii)να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. (μονάδες 5)

β) Έστω διανύσματα $\vec{x}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{y}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{x}\cdot\vec{y}$.
(μονάδες 5)

γ) Έστω διανύσματα $\vec{\gamma}$=(κ-2 ,2) και $\vec{\delta}$=(6,4) να βρεθεί το κ ώστε $\vec{\gamma}//\vec{\delta}$.
(μονάδες5)

ΘΕΜΑ Γ

α) Δίνονται τα σημεία Α(2,3) και Β(3,5)

i)να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης λ_{AB} της ευθείας που περνά από τα Α και Β. (μονάδες 5)

ii) να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β. (μονάδες 5)

β) Δίνεται επίσης το σημείο Γ(6,8)

i) να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (μονάδες 5)

ii) να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου που ορίζουν τα σημεία Α,Β ,Γ. (μονάδες 5)

γ) να βρεθεί η απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία δ: 8x+6y+5=0. (μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

α) Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

i)να βρείτε τις εστίες της έλλειψης Ε και Ε΄,τον μεγάλο άξονα ΑΑ΄ και τον μικρό άξονα ΒΒ΄.

(μονάδες 10)

ii)να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο Γ(3,4)

(μονάδες 5)

β) Δίνεται ο κύκλος $(x-2)^2+(y-3)^2 = 25$

i)να βρεθεί το κέντρο Κ και η ακτίνα ρ του κύκλου.

(μονάδες 5)

ii)να βρεθεί η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Δ(5,7).

(μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ και $A(x_1,\psi_1)$ σημείο του κύκλου. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο A δίνεται από τη σχέση $x\cdot x_1+\psi\cdot\psi_1=\rho^2$

Α2. Τι ονομάζεται παραβολή με εστία E και διευθετούσα δ;

Α3. Να ελέγξετε αν είναι Σωστή ή Λανθασμένη καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεών σας τη λέξη Σωστή ή Λανθασμένη δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Το μέτρο ενός διανύσματος $\vec{a}=(x_1,-\psi_1)$ είναι $|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2-\psi_1^2}$.
2. Η σχέση $Ax+B\psi+\Gamma=0$ με $A\neq 0$ ή $B\neq 0$ παριστάνει ευθεία.
3. Το εμβαδό τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από της σχέση $E=\frac{1}{2}\cdot\left|\det\left(\vec{AB},\vec{B\Gamma}\right)\right|$.
4. Η παραβολή $\psi^2=2px$ έχει άξονα συμμετρίας τον ψ'ψ.
5. Η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha>\beta>0$, έχει τις εστίες της πάνω στον άξονα x'x.

Μονάδες: 10 + 5 + 10 = 25

ΘΕΜΑ Β

Έστω τα διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{a}|=1$ και $|\vec{\beta}|=2$ και $\left(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{a}-2\vec{\beta}$.

Β1. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a}\cdot\vec{\beta}$.

Β2. Να υπολογίσετε τα $|2\vec{a}+3\vec{\beta}|$ κα $|\vec{a}-2\vec{\beta}|$

Β3. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Β4. Να βρείτε το είδος της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Μονάδες: 4 + 10 + 6 + 5 = 25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα σημεία $A(-1,-2)$ και $B(5,1)$ και $\Gamma(-3,2)$.

Γ1. Αν $M(x,\psi)$ σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύε $\vec{MA}^2+\vec{\Gamma M}\cdot\vec{A\Gamma}=8\psi-3\psi^2-8$ ι, να δείξετε ότι το σημείο Μ κινείται στην έλλειψη $C_1: x^2+4\psi^2=1$.

Γ2. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α, Α', Β, Β' και τις συντεταγμένες των εστιών Ε, Ε' της έλλειψης C_1.

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2 ο οποίος έχει κέντρο το κέντρο συμμετρίας της έλλειψης, και ακτίνα τον μικρό ημιάξονα ΟΒ της έλλειψης C_1.

Γ4. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C_2 που διέρχονται από το σημείο τομής της έλλειψης C_1 με τον θετικό ημιάξονα Ox.

Μονάδες: 8 + 6 + 5 + 6 = 25

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η γραμμή $C: x^2+\psi^2-4\lambda x-2\lambda\psi+4\lambda^2-3=0$ (1) με λ∈IR.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η C παριστάνει κύκλο για κάθε λ∈IR, και στη συνέχεια να δείξετε ότι το κέντρο του είναι το $K(2\lambda,\lambda)$ και η ακτίνα του η $p=\sqrt{\lambda^2+3}$.

Δ2. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την (1).

Δ3. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε ένας κύκλος που παριστάνεται από την (1) να έχει ελάχιστη ακτίνα.

Δ4. Για λ = 1, να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $A(0,-3)$.

Δ5. Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση που μπορεί να απέχει ένα σημείο του κύκλου από το σημείο $A(0,-3)$.

Μονάδες: (4 + 2 + 2) + 4 + 2 + 6 + 5 = 25

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Τι ονομάζεται παραβολή; (Ορισμός) (Μονάδες 7)

Β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής και την εστία της αν έχει διευθετούσα δ: $x = -1$

(Μονάδες 6)

Γ) Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιο σας και να τον συμπληρώσετε

εξίσωση κωνικής	**γραφή της κωνικής στην κανονική της μορφή**	**χαρακτηρισμός κωνικής (κύκλος, παραβολή, έλλειψη, υπερβολή)**
α) $4x^2 = 36 + 9y^2$		
β) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$		
γ) $9x^2 = 100 - 25y^2$		
δ) $y^2 - 12x = 0$		

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2ο

Α) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής:
$Ax+By+\Gamma=0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ **(1)**
και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία.

(Μονάδες 18)

Β) Δίνεται η εξίσωση $\left(\lambda^2+2\lambda+2\right)x+\left(2\lambda^2+3\lambda+3\right)y-2\lambda^2-\lambda+1=0$ με $\lambda \in \Re$.

1. Να αποδείξετε ότι παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \Re$
2. Για ποιες τιμές του λ η παραπάνω ευθεία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία Α(1, 2), Β(-3, 8) και Γ(5, -6)

Α) Να αποδείξετε ότι δεν είναι συνευθειακά (Μονάδες 5)

Β) Να βρείτε τα μέσα Μ και Ν των τμημάτων ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα (Μονάδες 4)

Γ) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΜΝ (Μονάδες 4)

Δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε που είναι παράλληλες στην ΜΝ και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση d=2

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4ο

Α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$=(y-2, x) και $\vec{\beta}$=(y+2, x+2), με x, y$\in\Re$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο C_1 των σημείων M(x, y) του επιπέδου για τα οποία είναι $\vec{a}\perp\vec{\beta}$

(Μονάδες 7)

Β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος C_1 είναι κύκλος, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 8)

Γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο A(0, 5).

(Μονάδες 10)

Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής
Γενικής Παιδείας
(Ενδοσχολικά εξεταζόμενο)
(15 Διαγωνίσματα)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Απαντήστε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος). Όπου συμπληρώσατε Λ, βάλτε δίπλα ακριβώς τη σωστή ισότητα.

$(c)' = 1$	
$(x)' = 1$	
$(x^\rho)' = \rho x^\rho$	
$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	
$(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu\, x$	
$(e^x)' = e^x$	
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	

Β. Να αποδείξετε την παράγωγο της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$.

Μονάδες15+10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάσρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Β. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

Γ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.

Μονάδες 10+5+10

ΘΕΜΑ 3ο

Η επίδοση ενός μαθητή της Γ λυκείου σε πέντε μαθήματα είναι 12, 10, 16, 18, 14.

Α. Να βρείτε τη διάμεσο.

Β. Να βρείτε τη μέση επίδοση.

Γ. Αν τα μαθήματα είχαν συντελεστές στάθμισης 2, 3, 1, 1 και 3 αντίστοιχα, ποια θα ήταν η μέση επίδοση; Σε ποια μαθήματα έπρεπε να δώσει ιδιαίτερη προσοχή ο μαθητής;

Μονάδες 5+10+10

ΘΕΜΑ 4ο

Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματοχώρου Ω έχουμεP(A)=1/2, P(B)=1/3 και P(A∩ B)=1/6, να βρείτε τις πιθανότητες :

Α. Να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα Α και Β.

Β. Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β.

Γ. Να πραγματοποιηθεί μόνο το Α.

Δ. Ναπραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β.

Μονάδες 5+5+7+8

ΘΕΜΑ 1

Α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης f(x)=c είναι f'(x)=0
[Μονάδες 5]

Β) Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις της στήλης Ι με τις παραγώγους τους στη στήλη ΙΙ

ΣΤΗΛΗ Ι (Συνάρτηση f)	ΣΤΗΛΗ ΙΙ (Παράγωγος f')
1. e^x	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
2. συνx	$\frac{1}{x}$
3 $\sqrt{x}$	e^x
4.lnx	-ημx
5.ημx	συνx

[Μονάδες 10]

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας της λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται στην απεικόνιση στατιστικής έρευνας μόνο για ποιοτικές μεταβλητές

β) Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α και $x_1 \in$ Α. Αν $f(x) \geq f(x_1)$, για κάθε x σε μια περιοχή του x_1, τότε το $f(x_1)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

γ) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει f'(x)>0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

δ) Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός.

[Μονάδες 10]

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
[Μονάδες 7]

Β) Να δειχθεί ότι η f μπορεί να πάρει τη μορφή $f(x) = x - 3$
[Μονάδες 9]

Γ) Να υπολογίσετε το όριο
$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$
[Μονάδες 9]

ΘΕΜΑ 3

Εξετάσαμε ένα δείγμα 20 φοιτητών ως προς τη βαθμολογία τους στο μάθημα της Αστρονομίας και τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα

Βαθμολογία x_i	Αριθμός φοιτητών ν_i	f_i%	N_i	$x_i\nu_i$	x_i^2	$x_i^2\nu_i$
2	6					
3	7					
5	3					
8	4					
ΣΥΝΟΛΟ			////////		/////	

Α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε [Μονάδες 12]

Β) Να δειχθεί ότι η μέση βαθμολογία των φοιτητών είναι $\bar{x} = 4$

[Μονάδες 4]

Γ) Να βρεθεί η τυπική απόκλιση s του δείγματος

(Δίνεται $s^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \left\{ \sum x_i^2 \cdot \nu_i - \frac{(\sum x_i \cdot \nu_i)^2}{\nu} \right\}$) [Μονάδες 9]

ΘΕΜΑ 4

Σε μία στατιστική έρευνα παίρνουμε τις παρακάτω παρατηρήσεις που αφορούν σε μία μεταβλητή Χ:

1 , α , 5 , 2 , β , 7 , 5 , γ , 2 , 1

Δίνεται επιπλέον η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^3 - 8$.

Α) Να βρεθούν τα α , β, γ αν γνωρίζουμε ότι α= f(2) , β = f'(1) και το

$$\gamma = \lim_{x \to 0} [f(x) + 12]$$

[Μονάδες 9]

Β) Για α=0 και β=3 και γ=4 να βρείτε:

1)Τη μέση τιμή του παραπάνω δείγματος των 10 παρατηρήσεων

2)Τη διάμεσό του [Μονάδες 16]

[Μονάδες 9]

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(Μονάδες 10)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση , τη λέξη Σωστό ή Λάθος.

α. Η μέση τιμή είναι μέτρο θέσης .

β. Αν A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε ισχύει $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$.

γ. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

δ. Η διάμεσος ενός δείγματος ν παρατηρήσεων διατεταγμένων κατά αύξουσα σειρά, ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση όταν το πλήθος ν είναι άρτιο .

ε. Αν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in \Delta$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε η f έχει έχει ακρότατα στο Δ.

(Μονάδες 05)

Γ. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις και να συμπληρώσετε καθεμιά από αυτές έτσι ώστε να είναι αληθής:

α. $P(A') \ldots 1-P(A)$

β. αν $A \subseteq B$ τότε $P(B) \ldots P(A)$.

γ. $(c \cdot f(x))' = \ldots\ldots$

δ. $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ε. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mu\varepsilon \quad g(x) \neq 0,$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ με $x \in \Re$.

α. Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f.

(Μονάδες 06)

β. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$

(Μονάδες 06)

γ. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

(Μονάδες 07)

δ. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f.

(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Έστω τα ενδεχόμενα A , B ενός δειγματικού χώρου Ω με P(A) = 0,3 , P(B) = 0,4 και $P(A \cap B) = 0,1$. Να αποδείξετε ότι :

α. $P(A \cup B) = 0,6$

(Μονάδες 09)

β. $P(A') = 0,7$

(Μονάδες 08)

γ. $P(A - B) = 0,2$ **(Μονάδες 08)**

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Έστω A,B δύο ενδεχόμενα του δ ειγματικού χώρου Ω και η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xP(A') - P(A)}{x-1} & , x \neq 1 \\ \dfrac{3}{2} - P(B) & , x = 1 \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

α .Να αποδείξετε ότι : $P(A) + P(B) = \dfrac{1}{2}$ **(Μονάδες 13).**

β. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των αριθμών :

$$P(A), P(B), P(A+B), P(A+B)$$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α, Α' ισχύει:

$P(A') = 1 - P(A)$

Μονάδες 10

Α2. Τι ονομάζουμε διάμεσο (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

(i). Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο στην περίπτωση ποσοτικής μεταβλητής.

(ii). Το εύρος R είναι μέτρο θέσης

(iii). Αν ο συντελεστής μεταβολής CV είναι μικρότερος του 50% τότε το δείγμα είναι ομοιογενές

(iv). Αν Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ισχύει πάντα: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(v). Αν Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ισχύει πάντα: $P(A \cap B) \leq P(A)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Αν Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, με $P(A') = 0,4$, $P(B) = 0,3$ και $P(A \cup B) = 0,7$, να υπολογίσετε:

Β1. Το $P(A)$ και το $P(A \cap B)$

Μονάδες 9

Β2. Το $P(B-A)$ και το $P[(A-B) \cup (B-A)]$

Μονάδες 9

Β3. Το $P(A \cup B')$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Στον διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής Χ και κάποιες συχνότητες, αθροιστικές συχνότητες, σχετικές συχνότητες και αθροιστικές σχετικές συχνότητες.

x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
100				0,1		
200	15	20				
300			0,4			
400						
ΣΥΝ						

Γ1. Να συμπληρωθεί ο πίνακας

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση

Μονάδες 9

Γ3. Είναι το δείγμα ομοιογενές;

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν $\nu \in N$ με $\nu \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου να μαθαίνει ο μαθητής Γαλλικά είναι $\frac{3\nu}{\nu^2+1}$, να μαθαίνει Ισπανικά είναι $\frac{\nu+2}{\nu^2+1}$ και να μαθαίνει και τις δύο γλώσσες είναι $\frac{\nu+1}{\nu^2+1}$

Δ1. Αν γνωρίζουμε ότι οι μαθητές του σχολείου μαθαίνουν υποχρεωτικά τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες να αποδείξετε ότι $\nu = 3$
Μονάδες 8

Δ2. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μια από τις δύο γλώσσες
Μονάδες 8

Δ3. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες είναι 32 να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.
Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης **f(x)=c** είναι **f΄(x)=0** για κάθε $x \in R$. **(Μον. 10)**

Α2. Να γράψετε τον ορισμό της διακύμανσης ή διασποράς **(s^2)** των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ μιάς μεταβλητής Χ. **(Μον. 5)**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Ισχύει **(συνχ)΄= - ημχ** , για κάθε πραγματικό αριθμό χ.

β) Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g ισχύει :
[f(x)• g(x)]΄=f΄(x)• g(x)΄

γ) Για την σχετική συχνότητα f_i των τιμών χ_i ενός δείγματος μεγέθους ν ισχύει $\mathbf{0 \le f_i \le 1}$ για i=1,2,…,κ με $\kappa \le \nu$.

δ) Ισχύει $(\chi^\rho)' = \rho \cdot \chi^{\rho-1}$ όπου ρ ρητός αριθμός.

ε) Αν $\bar{x} > 0$ τότε $CV = \frac{\bar{x}}{s}$ **(Μον. 5· 2=10)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=x^3-9x^2+15x-3 \quad x \in R}$

Β1. Να υπολογίσετε τις τιμές f(0), f(1), f(5) . **(Μον. 6)**

Β2. Να βρείτε την f΄(x). **(Μον. 6)**

Β3. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία . **(Μον. 8)**

Β4. Να βρείτε τα ακρότατα της f. **(Μον. 5)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων που παριστάνει την κατανομή του αριθμού των μαθημάτων που αρίστευσαν ενός δείγματος φοιτητών.

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_{i\%}$	$F_{i\%}$
1	**8**					
2			**14**			
3	**4**	**0,2**				
4						
Σύνολα			//////////////	//////////////		//////////////

Γ1. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε **(με αιτιολόγηση)** τον παραπάνω πίνακα.

(Μον. 15)

Γ2. Να βρείτε τον αριθμό και το ποσοστό των φοιτητών που αρίστευσαν σε περισσότερα από δύο μαθήματα. **(Μον. 5)**

ΘΕΜΑ Δ

Οι τιμές μιας μεταβλητής Χ και οι αντίστοιχες συχνότητες δίνονται στον παρακάτω ελλειπή πίνακα :

x_i	ν_i
2	**3**
6	ν_2
10	ν_3
14	**6**
18	**2**
Σύνολο	**20**

Δ1. Αν είναι γνωστό ότι $\bar{X}$ **=9,8** να υπολογίσετε τις συχνότητες ν_2 και ν_3 . **(Μον.15)**

Δ2. . Να υπολογίσετε την διάμεσο δ .
(Μον. 5)

Δ3. Να σχεδιάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων.
(Μον. 5)

ΘΕΜΑ 1^0

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης f(x)=c είναι μηδέν

Μον. 13

Β. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες :

1. (ημx)΄ =
2. (e^x)΄ =
3. [f(x) + g(x)]΄ =
4. [f(x) g(x)]΄ =

Μον. 12

ΘΕΜΑ 2^0

Ρωτήθηκαν 10 οικογένειες για τον αριθμό των παιδιών που έχουν και οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

Αριθμός παιδιών x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετ. Συχνότητα f_i	Σχετ. Συχνότητα f_i %	Αθρ. Συχνότητα N_i
0	α			
1	α+2			
2	α+1			
3	α-1			
Σύνολο				

1. Να δείξετε ότι α = 2. (Μον.7)
2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αν α = 2. (Μον.10)
3. Να βρείτε την μέση τιμή των παιδιών που έχουν οι 10 οικογένειες. (Μον.8)

ΘΕΜΑ 3^0

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (Μον.5)
2. Να βρείτε την παράγωγο της f. (Μον.7)
3. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (Μον.13)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = e^{x} kx , με k πραγματικό αριθμό.

1. Να βρείτε την παράγωγο της f. (Μον5)

2. Να βρείτε για ποια τιμή του k η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α με τετμημένη x_0 = 0 είναι παράλληλη στον άξονα x΄x (Μον5)

3. Αν k=1, τότε:

α. Να βρείτε το όριο $\lim \{ f(x) + (x-1)\}/x$ Όταν το x τείνει στο 0 (Μον5)

β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f. (Μον.5)

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Β(1,e-1) και να δείξετε ότι η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
(Μον.5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f: R \to R$ με τύπο f(x)=x είναι f'(x)=1.

(15 μονάδες)

Β) Να χαρακτηρίσετε με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις:

i) Αν $f: A \to R$ είναι μια συνάρτηση και για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

(2 μονάδες)

ii) Αν $f: A \to R$ είναι μία συνάρτηση και $x_0 \in A$ τότε η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(2 μονάδες)

iii) Για κάθε ζεύγος f,g παραγωγίσιμων συναρτήσεων ισχύει :

(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)-f(x)g'(x).

(2 μονάδες)

iv) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει (cf(x))'=cf'(x) όπου c ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός .

(2 μονάδες)

v) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει f΄(x)>0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

(2 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού. (5 μονάδες)

ii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα.

(10μονάδες)

iii) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο A(1,4). (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι αριθμοί 5,3,6,5,4,5,3,8,6,5.

Να υπολογίσετε:

i) Τη μέση τιμή $\overline{x}$ (5 μονάδες)

ii)Τη διασπορά των αριθμών s^2 (5 μονάδες)

iii) Τη διάμεσο δ (5 μονάδες)

iv)Το εύρος R (5 μονάδες)

v)Το συντελεστή μεταβολής CV (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται στο κάπνισμα και τα προβλήματα υγείας 200 ατόμων:

	ΚΑΠΝΙΣΤΕΣ	ΜΗ ΚΑΠΝΙΣΤΕΣ	ΣΥΝΟΛΟ
Με προβλήματα υγείας	20	20	40
Χωρίς προβλήματα υγείας	30	130	160
ΣΥΝΟΛΟ	50	150	200

Επιλέγουμε ένα άτομο. Να βρείτε την πιθανότητα:

i) Να είναι καπνιστής. (5 μονάδες)

ii) Να έχει πρόβλημα υγείας. (5 μονάδες)

iii) Να είναι καπνιστής χωρίς πρόβλημα υγείας. (5 μονάδες)

iv) Να είναι καπνιστής με πρόβλημα υγείας. (5 μονάδες)

v) Να μην έχει πρόβλημα υγείας. (5 μονάδες)

Θέμα 1ο

Α. Έστω A και B δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω .

α) Πότε τα ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα; (2,5 μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι $P(A') = 1 - P(A)$. (7,5 μονάδες)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Ο συντελεστής μεταβολής ενός δείγματος τιμών μιας οποιασδήποτε μεταβλητής X ορίζεται από το λόγο $CV = \frac{\bar{x}}{s}$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s (0 η τυπική απόκλιση. (5 μονάδες)

β) Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και A' το συμπλήρωμα του ενδεχομένου Α. Τότε:

β1) $Αν\ A' \subset B,\quad τότε\ P(A) + P(B) < 1.$ (5 μονάδες)

β2) $Αν\ P(A) = P(A'),\quad τότε\ 2 \cdot P(A) = P(\Omega).$ (5 μονάδες)

Θέμα 2ο

Η εξέταση 10 μαθητών στο μάθημα της Στατιστικής έδωσε τους εξής βαθμούς:

11 3 7 5 16 14 11 10 11 12

Να βρείτε:

α) τη διάμεσο, (5 μονάδες)
β) τη μέση τιμή, (5 μονάδες)
γ) το εύρος και (5 μονάδες)
δ) τη διακύμανση της παραπάνω βαθμολογίας. (10 μονάδες)

Θέμα 3ο

Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

α) να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς; (8 μονάδες)
β) να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς; (8 μονάδες)
γ) να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς; (9 μονάδες)

Θέμα 4^{ο}

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

Βάρος σε κιλά [–)	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
45-55	0,2
55-65	0,5
65-75	
75-85	

α) Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση. (8 μονάδες)

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων. (9 μονάδες)

γ) Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή.

γ1) Να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά. (4 μονάδες)
γ2) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών. (4 μονάδες)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης f(x) = c είναι f ′(x) =0 για κάθε xϵR (Μονάδες 7)

Α2. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής μίας μεταβλητής x αν $\bar{x}$<0 και πως αν $\bar{x}$>0;

(Μονάδες 4)

Α3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ;

(Μονάδες 4)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

a) Ισχύει (συν x)΄= ημ x για κάθε xϵR

b) Η διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων είναι μέτρο θέσης

c) Αν f και g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο R, τότε ισχύει

(f(g(x)))΄= f΄(g(x)). g΄(x)

d) Στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα

($\bar{x}$-s, $\bar{x}$+s) όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και s η τυπική τους απόκλιση

e) Αν A ⊆ B τότε P(A)>P(B) (Μονάδες 2Χ5)

ΘΕΜΑ Β

Οι αποστάσεις (σε km) των 26 κοινοτήτων ενός νομού από το πλησιέστερο νοσοκομείο είναι :

5,10,8,8,13,10,4,2,0,16,5,15,9,6,4,7,5,4,6,7,7,5,8,10,3,9

1) Να κατασκευάσετε πίνακα

α) Απόλυτων συχνοτήτων (Μονάδες 7)

β)Αθροιστικών συχνοτήτων των αποστάσεων (Μονάδες 5)

2) Πόσες κοινότητες απέχουν από το νοσοκομείο περισσότερο από 10 km;

(Μονάδες 5)

3) Πόσες κοινότητες απέχουν από το νοσοκομείο τουλάχιστον 5 km και το πολύ 8 km;

(Μονάδες 4)

4) Να βρεθεί το ποσοστό των κοινοτήτων που απέχουν από το νοσοκομείο ακριβώς 8 km;

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2-4x+5)$

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και η παράγωγός της (Μονάδες 10)

2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της (Μονάδες 12)

3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f έχει ολικά ακρότατα (Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω X μια ποσοτική μεταβλητή ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους ν και $x_1,x_2\ldots.x_\nu$ οι παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης
$f(x)=2x^3-sx^2-3.x.\bar{x}+17$ στο σημείο της A(2.-3) είναι παράλληλη στον x΄x

1. Να βρείτε την μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s (Μονάδες 7)

2. Έστω $\bar{x}=4$ και s=3

   2.1. Αν $y_1,y_2\ldots..y_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις $x_1,x_2\ldots.x_\nu$ με το -2 και μετά προσθέσουμε το 1, να εξετάσετε αν το καινούριο δείγμα είναι ομοιογενές (Μονάδες 9)

   2.2. Αν η κατανομή είναι περίπου κανονική και 20 παρατηρήσεις έχουν τιμή τουλάχιστον 10, να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να δειχθεί ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$ είναι ίση με 0, δηλαδή $(c)'=0$.

Μονάδες 10

Β. Πότε μία συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής ;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Για κάθε $x \in R$, ισχύει $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$.

2. Για $x>0$, ισχύει $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

3. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

4. Ισχύει $0 \le \mathrm{P}(\mathrm{A}) \le 1$, όπου $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A του δειγματικού χώρου Ω.

5. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει : $\mathrm{P}(\mathrm{A}') = 1 + \mathrm{P}(\mathrm{A})$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$, $x \in R$.

Α. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Μονάδες 5

Β. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)+7}{x}$.

Μονάδες 5

Γ. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 5

Δ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Εξετάστηκε ένα δείγμα 80 οικογενειών ως προς τον αριθμό των παιδιών τους και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

Αριθμός παιδιών (x_i)	**Αριθμός (ν_i) οικογενειών**	**f_i**	**f_i %**	**$\nu_i x_i$**	**N_i**
0	12				
1	20				
2	32				
3	12				
4	4				
Σύνολο	80				

Α. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα, αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα σας.

Μονάδες 12

Β. Να υπολογίσετε: **i)** Τη μέση τιμή.

Μονάδες 8

ii) Τη διάμεσο της κατανομής.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει :

$$P(A)=\frac{1}{3},\quad P(B')=\frac{1}{3} \text{ και } P(B-A)=\frac{1}{2}.$$

Α. Να βρείτε την πιθανότητα $P(B)$.

Μονάδες 5

Β. Να βρείτε την πιθανότητα $P(A\cap B)$.

Μονάδες 7

Γ. Να βρείτε την πιθανότητα $P(A\cup B)$.

Μονάδες 7

Δ. Αν ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Α είναι $N(A)=8$ να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$. **(Μονάδες 12)**

Α2. Να γράψετε πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής. **(Μονάδες 5)**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

α) Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας CV ενός δείγματος είναι μεγαλύτερος του 10% τότε το δείγμα χαρακτηρίζεται ως ομοιογενές.

β) Η τυπική απόκλιση ενός δείγματος είναι μέτρο διασποράς.

γ) Αν Α και Β είναι δυο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε ισχύει: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

δ) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. **(Μονάδες 8)**

ΘΕΜΑ Β

Ρωτήσαμε τους 40 μαθητές μιας τάξης για τον αριθμό των αδελφών τους. Οι απαντήσεις που πήραμε φαίνονται στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων.

Αριθμός αδελφών x_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχν. N_i	Σχετική Συχν. f_i	Σχετική Συχν. f_i%	Αθρ. Σχετ. Συχν. F_i	Αθρ.Σχετ. Συχν. F_i%
0	8					
1	12					
2	10					
3	8					
4	2					
Σύνολο		-			-	-

Β1. Να αντιγράψετε τον πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε. **(Μονάδες 10)**

Β2. Να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ του παραπάνω δείγματος. **(Μονάδες 8)**

Β3. Να βρείτε το πλήθος και το ποσοστό των μαθητών που έχουν τουλάχιστον ένα αλλά το πολύ τρία αδέλφια. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ Γ

Το μέσο ύψος ενός δείγματος 40 μαθητών της Γ΄ τάξης ενός λυκείου είναι $\bar{x} = 170\text{cm}$.
Η κατανομή των μαθητών ως προς το ύψος είναι κανονική και το 34% των μαθητών έχουν ύψος από 170cm έως 175cm.

Γ1. Να αποδείξετε ότι τυπική απόκλιση **s** του ύψους των μαθητών είναι 5.

(Μονάδες 8)

Γ2. Να υπολογίσετε το ποσοστό και το πλήθος των μαθητών που έχουν ύψος από 160cm έως 180cm.

(Μονάδες 8)

Γ3. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του ύψους των μαθητών και να χαρακτηρίσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$ και ο δειγματικός χώρος Ω που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Θεωρούμε Α και Β δυο ενδεχόμενα του Ω για τα οποία ισχύουν: $P(A-B) = \dfrac{1}{12}, P(A) = 8\lim\limits_{x\to 2} f(x), P(B) = \dfrac{7}{12}$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$.

(Μονάδες 8)

Δ2. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \dfrac{1}{3}$ και $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$.

(Μονάδες 9)

Δ3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να συμβεί ένα μόνο από τα Α και Β.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x)=x$, είναι η $f'(x)=1$, για κάθε $x \in R$.

Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Δύο ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \varnothing$.

β. Η διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων, $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές.

γ. Ισχύει ότ $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$, όπου f , g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο R

δ. Για κάθε $x \in R$ ισχύει $(\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$.

ε. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+2x}$.

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Β2. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

Β3. Να βρείτε την παράγωγο της f , και στη συνέχεια την τιμή της παραγώγου για $x=-2$.

Μονάδες 7 + 10 +8 = 25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων ενός δείγματος , μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ.

Τιμές x_i	**Συχνότητες** ν_i	$\nu_i \cdot x_i$	**Αθροιστικές Συχνότητες** N_i	**Σχετικές Συχνότητες** f_i	**Σχετικές Συχνότητες** $f_i\%$
1	36				
2	60				
3					
4	30				
Σύνολο	**200**				

Γ1. Να υπολογίσετε τη συχνότητα ν_3 της τιμής $x_3 = 3$.

Γ2. Να μεταφέρετε συμπληρωμένο τον παραπάνω πίνακα στην κόλλα σας.

Γ3. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο του παραπάνω δείγματος .

Γ4. Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες του 2.

Μονάδες 5 + 7 +8 + 5 = 25

ΘΕΜΑ Δ

Σε ένα Λύκειο, το 61% των μαθητών χρησιμοποιεί για ηλεκτρονική αλληλογραφία το **"Gmail"**, το 53% χρησιμοποιεί το **"Yahoo"** ενώ το 93% χρησιμοποιεί μία τουλάχιστον από τις δύο υπηρεσίες.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή αυτού του Λυκείου και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής χρησιμοποιεί το "Gmail".

Β: ο μαθητής χρησιμοποιεί το "Yahoo".

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Δ1. Ο μαθητής να μην χρησιμοποιεί το "Yahoo".

Δ2. Ο μαθητής να χρησιμοποιεί και τις δύο αυτές υπηρεσίες ηλεκτρονικής αλληλογραφίας.

Δ3. Ο μαθητής να χρησιμοποιεί μόνο μία από τις δύο αυτές υπηρεσίες.

Δ4. Ο μαθητής να χρησιμοποιεί μία το πολύ από τις δύο αυτές υπηρεσίες ηλεκτρονικής αλληλογραφίας.

Μονάδες 6 + 7 +7 + 5 = 25

ΘΕΜΑ Α

α) Να αντιστοιχίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις με τις παραγώγους τους

συνάρτηση f	παράγωγος f ′
1) ημx	i) 0
2) lnχ	ii) $4x^3$
3) 5	iii) − ημχ
4) χ^4	iv) συνχ 5) συνχ
	v)

(μονάδες 15)

β) Να γράψετε τον ορισμό της πιθανότητας P(A) ενός ενδεχομένου A .
(μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

α) Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον βαθμό που πήραν 50 φοιτητές σε ένα μάθημα. Αφού αντιγράψετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας να τον συμπληρώσετε.
(μονάδες 15)

Βαθμός(χ_i)	Συχνότητα(ν_i)	Σχετική Συχνότητα (f_i)	Αθροιστική Συχνότητα(N_i)	Σχετική Συχνότητα(%)
4	12			
5	8			
6	16			
8	4			
9	10			
σύνολο	50			

β) Πόσοι φοιτητές εγραψαν πάνω από 5; (μονάδες 5)
γ) Ποιο είναι το ποσοστό των φοιτητών που έγραψαν από 8 και πάνω; (μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

α) Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} + 5x^2 + 6x + 5$

i) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο f(x). (μονάδες 5)
ii) Να εξετάσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία. (μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

i) $g(x) = 2x^4 + 5\eta\mu\chi + 4\ln x + 100$ (μονάδες 5)

ii) $h(x) = 5\sigma\upsilon\nu\chi + 2e^x + 8x^3 + 1$ (μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

α) Δίνονται δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει P(A),

P(B) = και P(A) = .

i) Να βρείτε την πιθανότητα P(A). (μονάδες 8)

ii) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A')$ και $P(B')$. (μονάδες 8)

β) Ένα κουτί περιέχει 5 ασπρες μπάλες, 8 πράσινες ,3 κόκκινες και 4 μπλε μπάλες.
Να βρεθούν οι πιθανότητες να φέρουμε
i) ασπρη μπάλα P(α) ii) κόκκινη μπάλα P(κ) iii) πράσινη ή μπλε μπάλα P(π ή μ)
(μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Α2. Αν f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα Α και c πραγματική σταθερά, να αποδείξετε ότι $\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)$ για κάθε $x \in A$.

Α3. Να γράψετε στο φύλλο των απαντήσεών σας τα γράμματα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα, τον αριθμό της Στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΣΤΗΛΗ Α	***ΣΤΗΛΗ Β***
Α. $f(x) = x^2$	**1.** $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$
Β. $f(x) = \eta\mu x$	**2.** $f'(x) = e^x$
Γ. $f(x) = e^x$	**3.** $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
Δ. $f(x) = \ln x$, $x > 0$	**4.** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
Ε. $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$	**5.** $f'(x) = 2x$

ΜΟΝΑΔΕΣ: 5 + 10 + 10 = 25

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 3x + 2$.

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Β2. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{x+1}$.

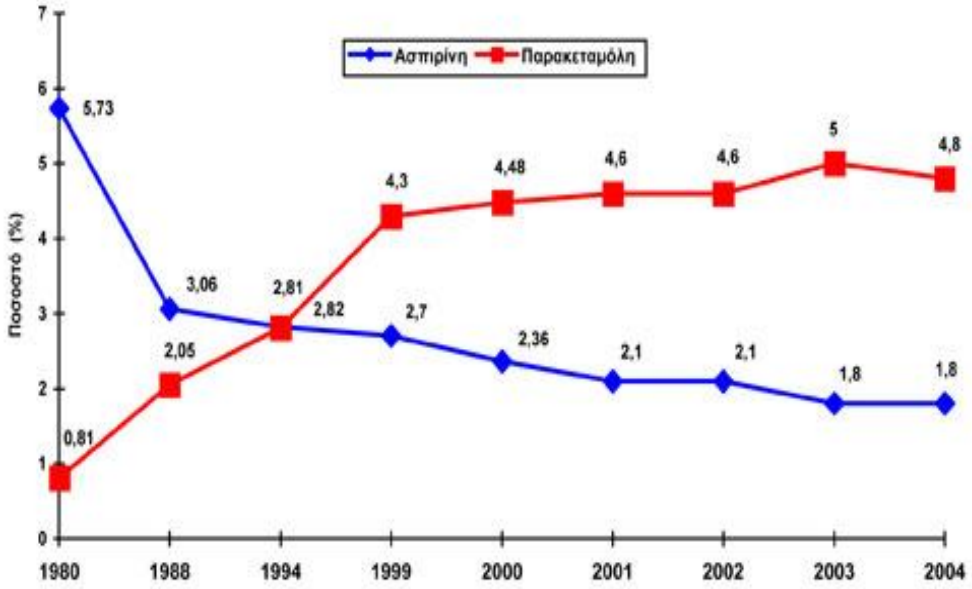
Β3. Να βρεθεί η $f'(x)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x) - x \cdot f'(x) = 2 - x^2$.

Β4. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ΜΟΝΑΔΕΣ: 4 + 7 + (3 + 4) + 7 = 25

ΘΕΜΑ Γ

Στο παρακάτω χρονόγραμμα περιγράφεται το ποσοστό των δηλητηριάσεων από την χρήση παυσίπονων φαρμάκων που περιέχουν ασπιρίνη ή παρακεταμόλη την περίοδο 1980 – 2004 στην Ελλάδα .



Σχήμα 15. Δηλητηριάσεις με παυσίπονα φάρμακα

Πηγή: Υπουργείο Υγείας

Γ1. Να βρείτε το έτος στο οποίο είχαμε:

α. Το μικρότερο ποσοστό δηλητηριάσεων από παρακεταμόλη. Να γράψετε το αντίστοιχο ποσοστό.

β. Το μικρότερο ποσοστό δηλητηριάσεων από ασπιρίνη. Να γράψετε το αντίστοιχο ποσοστό.

Γ2. Ποιο έτος είχαμε το ίδιο ποσοστό δηλητηριάσεων από ασπιρίνη ή παρακεταμόλη;

Γ3. Αν το 2003 δηλητηριάστηκαν συνολικά 1000 πολίτες σε όλη την Ελλάδα από διάφορα αίτια, και το ποσοστό αυτών που δηλητηριάστηκαν από ασπιρίνη όπως φαίνεται στο χρονόγραμμα είναι 1.8%, τότε ποιο το πλήθος αυτών που δηλητηριάστηκαν από ασπιρίνη;

ΜΟΝΑΔΕΣ: (7 + 7) + 4 + 7 = 25

ΘΕΜΑ Δ

Στον παρακάτω πίνακα περιγράφονται οι βαθμολογίες 100 φοιτητών του Μαθηματικού τμήματος του Α.Π.Θ στο μάθημα της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Βαθμολογία	***Πλήθος Φοιτητών*** ν_i	***Ποσοστό Φοιτητών*** $f_i\%$	***Αθροιστικές Συχνότητες*** N_i	***Αθροιστικές Σχετικές Συχνότητες*** $F_i\%$
2	**12**			
3	**8**			
4	**35**			
5	**20**			
6	**5**			
7	**10**			
8	**6**			
9	**4**			
Σύνολα	**100**			

Δ1. Αφού μεταφέρετε τον πίνακα στο φύλλο των απαντήσεών σας, να τον συμπληρώσετε.

Δ2. Να βρείτε το πλήθος των φοιτητών που κόπηκε στο μάθημα (δηλαδή που έγραψε βαθμό κάτω από 5).

Δ3. Να βρείτε το πλήθος των φοιτητών που αρίστευσε (δηλαδή που έγραψε τουλάχιστον 8).

Δ4. Ποιο το ποσοστό των φοιτητών που έγραψε βαθμό τουλάχιστον 5 και το πολύ 7;

Δ5. Να βρείτε τον μέσο όρο των βαθμολογιών των γραπτών των 100 φοιτητών.

ΜΟΝΑΔΕΣ: 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25

ΘΕΜΑ 1:

Α. Να αποδείξετε ότι: Για δύο ενδεχόμενα *Α* και *Β* ενός δειγματικού χώρου *Ω* ισχύει:
ΜΟΝΑΔΕΣ : 9

Β. Ρίχνουμε ένα ζάρι μία φορά και επιλέγουμε ένα ενδεχόμενο στην τύχη
Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: Ένδειξη μικρότερη του 5
Β: Ένδειξη άρτιος αριθμός

Να βρεθούν οι πιθανότητες : ι)Πραγματοποιείται το Α ιι) Πραγματοποιείται το Β ιιι)Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α και Β ιν) Πραγματοποιείται ένα μόνο από τα Α και Β
ΜΟΝΑΔΕΣ : 16

ΘΕΜΑ 2:

Α. Να γράψετε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της διακύμανσης-τυπικής απόκλισης σε σχέση με τα άλλα μέτρα
ΜΟΝΑΔΕΣ : 13

Β. Να σημειώσετε για τις παρακάτω προτάσεις (Σ) αν είναι σωστή και (Λ)αν είναι λάθος
1. Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής ονομάζεται ομοιογενές όταν ο συντελεστής μεταβολής του CV δεν ξεπερνά το 10%
2. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) < 0$ για κάθε

εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

3. Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ισχύει $P(A) = 0.5$ και $P(B) = 0.6$, τότε τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.
4 Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων των τιμών μιας μεταβλητής Χ είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.
ΜΟΝΑΔΕΣ : 12

ΘΕΜΑ 3 :

Ο Γιάννης μπορεί να πάει στην δουλειά του από το σπίτι του επιλέγοντας ανάμεσα στο αστικό λεωφορείο της γραμμής Α ή το τρόλεϊ της γραμμής Β.Ο χρόνος που χρειάζεται και στις δυο περιπτώσεις ακολουθεί την κανονική κατανομή. Το αστικό λεωφορείο της γραμμής Α έχει μέσο χρόνο διαδρομής = 20 *Α x* λεπτά με τυπική απόκλιση = 3 *Α s* λεπτά ενώ το τρόλεϊ της γραμμής Β έχει μέσο χρόνο διαδρομής = 21 *Β x* λεπτά με τυπική απόκλιση = 2 *Β s* λεπτά. Ποιο από τα δυο μέσα πρέπει να επιλέξει ο Γιάννης για να φτάσει στο σπίτι του
ι) το λιγότερο σε 23 λεπτά.
ΜΟΝΑΔΕΣ : 13
ιι) το αργότερο σε 17 λεπτά.
ΜΟΝΑΔΕΣ : 12

ΘΕΜΑ 4 :

Δίνεται η συνάρτηση: f (x) = $10sx^2 + \bar{x} \cdot x + 11, x \epsilon R$,
όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή x και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων ενός δείγματος.
Αν η εφαπτόμενη της καμπύλης της f στο σημείο A(-1,f(-1)) είναι παράλληλη στην ε : y =2011 τότε :

Α) Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .
ΜΟΝΑΔΕΣ : 5

Β) Να δείξετε ότι το δείγμα είναι ομοιογενές.
ΜΟΝΑΔΕΣ : 5

Γ) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο.
ΜΟΝΑΔΕΣ : 5

Δ) Αν η ελαχίστη τιμή της f είναι ιση με 1 τότε:
i)Να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων του δείγματος .
ii)Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο A
ΜΟΝΑΔΕΣ : 5+5

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
Ενδοσχολικά εξεταζόμενο
(12 Διαγωνίσματα)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Πότε μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. **(Μονάδες 07)**

Β. Να αποδείξετε οτι για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. **(Μονάδες 08)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **<u>Σωστό</u> ή <u>λάθος</u>** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Αν $z^2 + w^2 = 0$ με $z, w \in \mathbb{C}$ τότε πάντοτε ισχύει $z = w = 0$.

β. Β.Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα τον $2+i$ θα έχει και τον $\dfrac{5}{2+i}$.

γ.Αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $f : D_f \to \mathbb{R}$, τότε ισχύει πάντοτε οτι $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ για κάθε $x \in D_f$.

δ.Αν μια συνάρτηση $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι συνεχής στο x_0.

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε ορίζεται πάντα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M\left(x_0, f(x_0)\right)$.

(5x2= μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση $f(x) + e^{f(x)} = 5 - 4x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

Α. Η συνάρτηση f αντιστρέφεται, **(Μονάδες 13)**

Β.Η εξίσωση $f\left(f(x)\right) - f\left(5 - 10x^3\right) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει $|z-1|=|z-i|$ και $|w-2|=1$.

Α. Να βρείτε το γ.τ. των εικόνων των z, w. **(Μονάδες 10)**

Β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$. **(Μονάδες 12)**

Γ.Υπάρχει μέγιστη τιμή για το $|z-w|$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 03)

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{\alpha}{x}+\alpha$ με $x>0$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$, τότε:

Α. Να αποδείξετε οτι $\alpha=-1$. **(Μονάδες 08)**

Β. Να μελετήσετε την $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 08)

Γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln\left(2x^2+2\right)-\frac{1}{x^2+3}>\ln\left(x^2+3\right)-\frac{1}{2x^2+2}.$$

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί να αποδειχθεί ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της
Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

(i). Για κάθε μιγαδικό αριθμό z, ισχύει: $|z|^2 = z^2$

(ii). Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους

(iii). Κάθε συνάρτηση που είναι «1 – 1» στο πεδίο ορισμού της είναι γνησίως μονότονη

(iv). Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της τότε είναι και παραγωγίσιμη

(v). $(συνx)' = ημx$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί με $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = 1 - 2i$ να βρείτε τα $|z_1|, |z_2|$
Μονάδες 8

Β2. Να βρείτε τους συζυγείς των z_1, z_2
Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε που ανήκουν οι μιγαδικοί z για τους οποιους ισχύει: $|z_1 - z| = 3$ και $|z - z_2| = |z - i|$
Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να μελετήσετε την $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2013$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $(1, f(1))$
Μονάδες 9

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ δύο ρίζες
Μονάδες 8

Δ2. Να δείξετε ότι η f' είναι «1 – 1»
Μονάδες 8

Δ3. Αν $2f(1)=f(2)$ να δείξετε ότι η $f(x)=xf'(x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,2)$
Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 που ανήκει στο πεδίο ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
(μονάδες 13)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη ***Σωστό ή Λάθος*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους
β. Για κάθε $z \in C$ ισχύει $z^2 = z\bar{z}$

γ. (συνχ)΄ = ημχ

ε. Για κάθε συνάρτηση f που είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ισχύει f΄(x) > 0 για κάθε x ϵ Δ.
(μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $z^2 - 2z + 2 = 0$
(μονάδες 8)

Β. Αν z_1, z_2 οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης να αποδείξετε ότι: $z_1^2 + z_2^2 = 0$
(μονάδες 8)

Γ. Αν z_1 μια λύση της παραπάνω εξίσωσης του ερωτήματος **α** με $z_1 = 1 + i$ να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει:
$|w - z_1| = 2$
(μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + kx^2 - 5x + 1$

Α. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, να βρείτε την τιμή του k
(μονάδες 13)

Β. Για $k = 1$ να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. **(μονάδες 12)**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$, $x > 0$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα **(μονάδες 7)**

Β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$ **(μονάδες 9)**

Γ. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$ **(μονάδες 9)**

ΘΕΜΑ Α

Α1 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{\nu}, \nu \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}$. **Μονάδες 7**

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού . **Μονάδες 4**

Α3. Πότε δυο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες ; **Μονάδες 4**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .

β) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

γ) Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της είναι γνησίως μονότονη.

δ) Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 2 - i$.

Β1. Να βρείτε τους μιγαδικούς $z_1 + z_2$ *και* $z_1 \cdot z_2$.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $w = 2z_1 - z_2$.

Μονάδες 5

Β3. Αν η εξίσωση $z^2 + \beta z + \gamma = 0$ όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα τον μιγαδικό z_1 να βρείτε τις τιμές των β, γ .

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z γιατους οποίους ισχύει $|z - z_1| = |z - z_2|$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{4x^2+1}+2x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι :

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=2$,

Μονάδες 10

ii) $f'(0)=2f(0)$.

Μονάδες 5

β) Να υπολογίσετε το: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και α, β πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 54$.

Μονάδες 6

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 9

γ. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης f.

Μονάδες 4

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ όπου $z_1,\ z_2 \in C$
(μονάδες10)

Α2.Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση
(μονάδες10)

1. Ισχύει: $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ όπου $z_1,\ z_2 \in C$

2. $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$

4 . Ισχύει $|\eta\mu x| \le \dfrac{1}{|x|}$

5 . Αν f,g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο x_o τότε :
$(f+g)'(x_o) = f'(x_o)\cdot g'(x_o) + f(x_o)\cdot g(x_o)$

Α3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A είναι συνεχής στο $x_o \times A$
(μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση
$z^2+2z+10=0 \quad , z \in C$

Β1. Να λύσετε στο σύνολο C των μιγαδικών την παραπάνω εξίσωση
(μονάδες 8)

Β2. Αν $z_1\ , z_2$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
A=$|z_1+z_2|^2-2|z_1\cdot z_2|+|z_1-z_2|^2-i^{2013}$
(μονάδες 9)

Β3. Αν $z_1=-1+3i$ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών αριθμών για τους οποίους ισχύει : $|z-z_1|=7$ **(μονάδες 8)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}\ , \alpha\nu\ x>1\\ \lambda x^3+5x^2+1\ , \alpha\nu\ x\le 1\end{cases}$

Γ1. Να βρείτε την τιμή του λ$\in R$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής
(μονάδες 9)

Γ2 Για λ=-2 να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $x_o=-\dfrac{1}{2}$

(μονάδες 9)

Γ3. Για λ=-2 να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

(μονάδες 7)

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1 - \ln x$

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
(μονάδες 9)

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
(μονάδες 8)

Δ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης
(μονάδες 8)

Θέμα 1ο

Α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να δείξετε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(10 μονάδες)

Β. α) Η εξίσωση $|z-1| = |z-2i|$ παριστάνει τη _____ του τμήματος με άκρα τα σημεία _____ και _____.

(9 μονάδες)

β) Η εξίσωση $|z-2+3i| = 2$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το _____ και ακτίνα ___.

(6 μονάδες)

Θέμα 2ο

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = ημx - \frac{\pi}{2}$ και $g(x) = συνx - x$, $x \in [0, \pi]$.

Α. Να μελετήσετε τις f και g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
(20 μονάδες)

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f και g.
(5 μονάδες)

Θέμα 3ο

Έστω $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2008 + \lambda$.

Α. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα του Bolzano για την f στο $[-1,1]$.
(7 μονάδες)

Β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, αν υπάρχουν, ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για την f στο $[-1,1]$.
(5 μονάδες)

Γ. Για τις τιμές του λ, που βρήκατε στο **Α.**, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.
(13 μονάδες)

Θέμα 4ο

Έστω $f(x) = \begin{cases} \frac{ημx}{x}, & x \neq 0 \\ α, & x = 0 \end{cases}$.

Α. Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η f να είναι συνεχής.
(5 μονάδες)

Β. Γι' αυτήν την τιμή του α, να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη και αν έχει συνεχή πρώτη παράγωγο.
(10 μονάδες)

Γ. Να εξετάσετε αν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f και αν είναι συνεχής.
(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε να αποδείξετε ότι :

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Μονάδες 10

Β. Πότε μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

2. Αν ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$ τότε και η $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

3. Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι και παραγωγίσιμη.

4. Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται ΄΄πάνω΄΄ από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

5. Ισχύει : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Αν $|z| = 1$,

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

Μονάδες 5

ii) Να αποδείξετε ότι $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

Μονάδες 5

Β. Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ισχύει $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ να αποδείξετε ότι :

$$|z_1 + z_2 + z_3| = \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right|$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,1]$.

Μονάδες 8

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[-1,1]$.

Μονάδες 9

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + 1 = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-1,1)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες 5

Β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

Γ. Να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha+1}>(\alpha+1)^{\alpha}$ για κάθε $\alpha>e$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν:

- Οι f, g συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$

(Μονάδες 10)

Β. Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτινών τους.

β) Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών εκφράζει, στο μιγαδικό επίπεδο την απόσταση των εικόνων τους.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι 1-1 τότε είναι και γνησίως μονότονη.

δ) Ένα τοπικό μέγιστο είναι πάντα μεγαλύτερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

ε) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ τότε το σύνολο τιμών της f στο Δ θα είναι διάστημα.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί w και z με $z = \dfrac{2z}{\bar{z} - iz}$ και $\bar{z} \neq iz$.

α) Αν $z = 1 + i$ να δείξετε ότι ο w είναι φανταστικός.

(Μονάδες 8)

β) Αν $z = i^{2013}$ να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού w.

(Μονάδες 8)

γ) Αν w=i να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \sqrt{x+3} - 2$ και $g(x) = 2\ln x - x^2 + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1}.

(Μονάδες 8)

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι: $g(x) \leq 0$ για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{g(x)+x^2}{x^2+x}$.

(Μονάδες 8)

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Δίνεται η συνάρτηση f , δυο φορές παραγωγίσιμη στο R , για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x^3}{x-1}=-4 \quad \text{και} \quad f''(x)>0 \quad \text{για κάθε } x\in R .$$

Αν $f(3)=1$, τότε:

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός x_0 στο διάστημα $(1,3)$,στον οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο.

(Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'\left(x^5-x^4+x^2\right)=f'\left(2x-f(1)\right)$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικούς αριθμούς z_1 , z_2 ισχύει $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$:.

Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση ονομάζεται 1 – 1 στο πεδίο ορισμού της Α ;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύε $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

β. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ , τότε είναι και 1 – 1.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$ τότε ισχύει πάντοτε $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ με $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 3 + 4i$ και $w = 1 - i$.

Β1. Να υπολογιστεί το μέτρο του z και ο συζυγής του w^4.

Β2. Να βρείτε το πραγματικό μέρος του μιγαδικού z·w, δηλαδή το $\mathrm{Re}(z \cdot w)$.

Β3. Ποια η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z, w.

Μονάδες 10 + 8 + 7 = 25

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$.

Γ1. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1}$.

Γ2. Να βρείτε την $f'(x)$ και να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

Γ3. Να βρείτε την $f''(x)$ και να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο $M(0, f(0))$.

Μονάδες 6 + 6 + 8 + 5 = 25

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α = [1, 3] η οποία είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο Α με $f(1) = 7$, $f(3) = 11$.

Δ1. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $a \in (1,3)$ έτσι ώστε $f(a) = 8$.

Δ2. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\beta \in (1,3)$ έτσι ώστε $f'(\beta) = 2$.

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Μονάδες 8 + 8 + 9 = 25

ΘΕΜΑ Α

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=c$, είναι $f'(x)=0$.
(μονάδες 5)

β) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή(Σ) η λάθος(Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:
i)Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη,τότε είναι και <<1-1>>.
ii)Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής, τότε είναι και παραγωγίσιμη.
iii) $\lim\limits_{x\to x_0}(k\cdot f(x))=k\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
iv) Δυο συναρτήσεις f και g λέγοναι ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.
(μονάδες 10)

γ) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle.
(μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x+2}$
i) να δείξετε ότι η f(x) είναι <<1-1>>.
ii) να βρείτε την αντίστροφή της.
(μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα όρια
i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x}{x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-3x)$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} e^x$
(μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Γ

α) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & , x<2\\ \alpha x^2 & , x\geq 2\end{cases}$$

Να βρείτε το α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=2$. (μονάδες 10)

β) Έστω μια συνάρτηση $g(x)=x^3-2x^2+4x+1$
i)Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$
ii) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ (μονάδες 10)

γ) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+5x}{x^2+8}$

(μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+5$

i)Να βρεθεί η f ′(x).

(μονάδες 5)

ii)Να εξετάσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

(μονάδες 5)

iii)Να εξετάσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

(μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

i)g(x)=χ^5+5ημχ+8lnx+10

(μονάδες 5)

ii)h(x)=e^{3x+4}

(μονάδες 5)

Θέμα Α

Α1. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Bolzano.

Α2. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεών σας τη λέξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και g συνεχής στο x_0, τότε η συνάρτηση gof είναι συνεχής στο x_0.
2. Μία συνάρτηση f : A → IR ονομάζεται 1 – 1 , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
3. Ισχύει ότι $\left||z|-|w|\right| \leq |z+w| \leq |z|+|w|$ για κάθε z, w ∈C.
4. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.
5. Ισχύει ότι $(\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$.

Μονάδες: 6 + 9 + 10 = 25

Θέμα Β

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

Β1. Να αποδείξετε ότι β = -1 και γ = 1.

Β2. Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = -1$

Β3. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει: $|w| = |z_1 - \overline{z_1}|$

Μονάδες: 9 + 8 + 8 =25

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$, $x \in (0, +\infty)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ2. Να εξετάσετε αν η f είναι κυρτή ή κοίλη.

Γ3. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτες.

Γ4. Να βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(1 , f(1))

Μονάδες: 6 + 6 + 8 + 5 =25

Θέμα Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση f : (0, +∞)→IR για την οποία ισχύει:

$$f(x)=2x-\frac{1}{x}-1-\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt,\ x>0.$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ότι η $f(x)=x+\frac{\ln x-1}{x}$.

Δ2. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

Δ3. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό Ε του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$ με $0<\lambda<1$

είναι $E(\lambda)=\frac{\lambda^2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\ln^2\lambda-2\ln\lambda}{2}$.

Δ4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\lambda\to 0}E(\lambda)$.

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$. Να αποδείξετε ότι : αν η f είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ και $f(a)\neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ *και* $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$. **(10 μονάδες)**

Β. Τι ονομάζεται μέτρο του μιγαδικού $z=x+yi$. **(5 μονάδες)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την **έ**κφραση «σωστό» ή λάθος».

α. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0.

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α, λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0\in A$, όταν ισχύει $f(x)\leq f(x_0)$ για κάθε $x\in A$.

γ. Ισχύει $(\sigma\upsilon\nu x)'=\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$

δ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

ε. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Έστω ο μιγαδικός z, για τον οποίο ισχύει $z\neq -1$. Να αποδείξετε ότι αν ο μιγαδικός $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός, τότε ισχύει $|z|=1$. **(10 μονάδες)**

Β. Να δείξετε ότι $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$.

(5 μονάδες)

Γ. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί που οι εικόνες τους ανήκουν στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1, τότε ο μιγαδικός $u=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1\cdot z_2}$ είναι πραγματικός.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $f'(0)=1$ και $f(x)+e^{f(x)}=2x+1$.

Α. Να δείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{2}{1+e^{f(x)}}$. **(6 μονάδες)**

Β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f **(6 μονάδες)**

Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το $x_0=0$. **(6 μονάδες)**

Δ. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $-\infty$. **(7 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 4ο

Αν η συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\Delta = [0,2]$ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν : $f(x) \geq \dfrac{2f(0)+f(1)}{3}$ και $|f''(x)| \leq 1$, να αποδείξετε ότι :

Α. $f(0) = f(1)$ **(7 μονάδες)**

Β. $f'(1) = 0$ **(6 μονάδες)**

Γ. Η συνάρτηση f έχει στο Δ τουλάχιστον μία πιθανή θέση σημείου καμπής. **(6 μονάδες)**

Δ. $|f'(2)| \leq 1$ **(6 μονάδες)**