# ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
# ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2013

## Θ Ε Μ Α Α

**Α1.** Να αποδείξετε ότι αν $\alpha>0, \alpha\neq 1$ και $\theta_1, \theta_2>0$, τότε $\log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$ .

μονάδες 10

**Α2. α.** Πότε μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού το σύνολο Α ονομάζεται άρτια;

μονάδες 2

**β.** Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης;

μονάδες 2

**γ.** Να δώσετε ένα παράδειγμα μιας άρτιας συνάρτησης.

μονάδες 1

**Α3.** Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με ένα **Σ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή με ένα **Λ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ με $0<\alpha<1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

**β.** Ισχύει ότι $\alpha^{\log_\alpha\theta}=\alpha$ με $\alpha>0, \alpha\neq 1$ και $\theta>0$.

**γ.** Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

**δ.** Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $(x-\rho)$ έχει υπόλοιπο το $P(\rho)$.

**ε.** Υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{2}{3}$.

μονάδες 10

## Θ Ε Μ Α Β

**Β1.** Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu\theta}+\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta},\ \theta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

μονάδες 13

**Β2.** Να λύσετε την τριγωνομετρική εξίσωση για κάθε $\theta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \kappa\in\mathbb{Z}$ :

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu\theta}+\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

μονάδες 12

## Θ Ε Μ Α Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+(\alpha-2)x^2+\beta x+6$.

**Γ1.** Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-2)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $(x-4)$ είναι 10, να υπολογίσετε τις τιμές των α και β.

μονάδες 15

**Γ2.** Για $\alpha=-2$ και $\beta=1$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

μονάδες 10

## Θ Ε Μ Α Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(4^x-2^{x+3}+15+k\right)$ και ο αριθμός $k=\dfrac{\log 5+\log 4}{2\log\sqrt{2}+1}$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι $k=1$.

μονάδες 7

**Δ2.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

μονάδες 10

**Δ3.** Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=4\ln 2$.

μονάδες 8

**Παρατηρήσεις**

1. Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
2. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Η απόδειξη στη σελίδα 175
**Α2.** Ο ορισμός, η γραφική παράσταση και το παράδειγμα στη σελίδα 75. (αντί για παράδειγμα, ας δοθεί σχήμα)
**Α3. α.** Σ, **β.** Λ, **γ.** Σ, **δ.** Σ, **ε.** Λ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu\theta}+\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta(1+\eta\mu\theta)}{1-\eta\mu^2\theta}+\frac{\sigma\upsilon\nu\theta(1-\eta\mu\theta)}{1-\eta\mu^2\theta}=\frac{2\sigma\upsilon\nu\theta+\cancel{\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta}-\cancel{\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta}}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}$.

**Β2.** Από το **Β1**, η ζητούμενη εξίσωση για $\theta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$ , είναι ισοδύναμη με την $\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ , οπότε:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{2\cdot\cancel{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\boxed{\theta=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{6},\kappa\in\mathbb{Z}}$$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.**

- Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-2)$ **αν και μόνο αν** $P(2)=0$, οπότε αντικαθιστώντας στον τύπο του πολυωνύμου προκύπτει :

$$2^3+(\alpha-2)\cdot2^2+\beta\cdot2+6=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\cancel{8}+4\alpha\cancel{-8}+2\beta+6=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow4\alpha+2\beta=-6\Leftrightarrow\boxed{2\alpha+\beta=-3}\ (\mathbf{1})$$

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $(x-4)$ είναι 10 **αν και μόνο αν** $P(4)=10$, οπότε αντικαθιστώντας στον τύπο του πολυωνύμου προκύπτει :

$$4^3+(\alpha-2)\cdot4^2+\beta\cdot4+6=10\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow64+16\alpha-32+4\beta+6=10\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow16\alpha+4\beta=-28\Leftrightarrow\boxed{4\alpha+\beta=-7}\ (\mathbf{2})$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2), αφαιρώντας κατά μέλη, προκύπτει:

$$-2\alpha=4\Leftrightarrow\boxed{\alpha=-2}$$

και αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει:

$$\beta=-3-2\cdot(-2)\Rightarrow\boxed{\beta=1}$$

**Γ2.** Το πολυώνυμο $P(x)$ για $\alpha=-2$ και $\beta=1$ είναι :

$$P(x)=x^3-4x^2+x+6$$

Για να λύσουμε την εξίσωση $P(x)=0$, κάνουμε το σχήμα Horner. Από το ερώτημα **Γ1** το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου, επομένως:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -4 | 1 | 6 | 2 |
| | 2 | -4 | -6 | |
| 1 | -2 | -3 | 0 | |

Επομένως,

$x^3-4x^2+x+6=(x-2)\cdot(x^2-2x-3)$. Ισοδύναμα λύνουμε την εξίσωση:

$$(x-2)\cdot(x^2-2x-3)=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x^2-2x-3=0(\Delta=16>0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=2} \text{ ή } \boxed{x=-1} \text{ ή } \boxed{x=3}$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** $k=\dfrac{\log5+\log4}{2\log\sqrt{2}+1}=\dfrac{\log20}{\log2+1}=\dfrac{\log20}{\log2+\log10}=\dfrac{\log20}{\log20}\Leftrightarrow\boxed{k=1}$

**Δ2.** Για $k=1$, έχουμε: $f(x)=\ln(4^x-2^{x+3}+15+1)=\ln(4^x-2^{x+3}+16)$.

Το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από τα x για τα οποία $4^x-2^{x+3}+16>0$.

Θέτουμε $\boxed{2^x=\omega>0}$ , οπότε προκύπτει μια ανίσωση $2^{ου}$ βαθμού:

$$\omega^2-8\omega+16>0\Leftrightarrow$$

$$(\omega-4)^2>0\overset{\omega>0}{\Leftrightarrow}\omega\in\mathbb{R}^+-\{4\}\Leftrightarrow 2^x\neq4\Leftrightarrow x\neq2\Leftrightarrow\boxed{x\in\mathbb{R}-\{2\}}$$

**Δ3.** Η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$f(x)=4\ln2\Leftrightarrow f(x)=\ln16\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln(4^x-2^{x+3}+16)=\ln16\overset{\ln x\,\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 4^x-2^{x+3}+16=16\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x}=2^{x+3}\overset{2^x\,\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2x=x+3\Leftrightarrow\boxed{x=3}$$