Λύσεις θεμάτων επαναληπτικών πανελληνίων εξετάσεων 2013

Στο μάθημα: « Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης»
ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΓΕ.Λ.

Γ΄Λυκείου Κατεύθυνσης
Πέμπτη, 13 Ιουνίου 2013

Θέμα Α:

Α1. Θεωρία, σελ.217 Σχολικό Βιβλίο (απόδειξη)

Α2. Θεωρία, σελ.260 Σχολικό Βιβλίο (διατύπωση θεωρήματος)

Α3. Θεωρία, σελ. 261 Σχολικό Βιβλίο (*Κρίσιμα σημεία λέγονται τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι μηδέν)*

Α4.

α) Σωστό **β) Λάθος** **γ) Σωστό** **δ) Λάθος** **ε) Σωστό**

Θέμα Β

Β1.Αφού το $x=1$ είναι διπλή ρίζα της δοθείσας εξίσωση θα έχουμε:

$\Delta=0 \Leftrightarrow |w-4-3\iota|^2=16|z|$ (1)

$2-|w-4-3\iota|=-2|z| \Leftrightarrow |w-4-3\iota|=2+2|z|$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$(2+2|z|)^2=16|z| \Leftrightarrow |z|^2-2|z|+1=0 \Leftrightarrow (|z|-1)^2=0 \Leftrightarrow |z|=1$ και άρα η εκόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας $\rho_1=1$

Η σχέση (1) δίνει $|w-4-3\iota|=4$ και άρα η εκόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος κέντρου $K(4,3)$ και ακτίνας $\rho_2=4$.

Β2. Αν κ=α+βi ($a,\beta\in\mathbb{R}$) ο μιγαδικός αριθμός που ανήκει ταυτόχρονα και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους θα έχουμε:

$|\kappa| = 1$

$|\kappa - 4 - 3\iota| = 4 \Leftrightarrow |\kappa - 4 - 3\iota|^2 = 16 \Leftrightarrow (\kappa - 4 - 3\iota)(\overline{\kappa} - 4 + 3\iota) = 16 \Leftrightarrow$

$k\overline{k} - 4k + 3ki - 4\overline{k} + 16 - 12i - 3\overline{k}i + 12i + 9 = 16 \Leftrightarrow$

$1 - 4k - 4\overline{k} + 3ki - 3\overline{k}i + 9 = 0 \Leftrightarrow 10 - 4(k + \overline{k}) + 3i(k - \overline{k}) = 0 \Leftrightarrow 10 - 8\alpha - 6\beta = 0$

$8\alpha + 6\beta = 10 \Leftrightarrow 4a + 3\beta = 5 \Leftrightarrow a = \dfrac{5 - 3\beta}{4}$

$a^2 + \beta^2 = 1 \Leftrightarrow (5\beta - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \beta = \dfrac{3}{5}$

$\alpha = \dfrac{4}{5}$

και άρα ο μιγαδικός κ είναι μοναδικός και είναι ο $k = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i$

B3. Έχουμε :

$||w| - |4 + 3i|| \le |w - 4 - 3\iota| = 4 \Rightarrow ||w| - 5| \le 4 \Rightarrow |w| \le 9$

$|z + w| \le |z| + |w| \le 1 + 9 = 10$

$|z - w| \le 2\rho_1 + 2\rho_2 = 10(\rho_1, \rho_2$ αντίστοιχα οι ακτίνες των δύο παραπάνω κύκλων)

B4. Έχουμε:

$|2z^2 - 3z - 2z\overline{z}| = 5 \Leftrightarrow |z||2z - 3 - 2\overline{z}| = 5 \Rightarrow |2z - 3 - 2\overline{z}| = 1(z = a + \beta i, a, \beta \in \mathbb{R})$

$|4\beta i - 3| = 5 \Leftrightarrow 16\beta^2 + 9 = 25 \Leftrightarrow \beta = 1, \beta = -1$

$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow a = 0$

Άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί αριθμοί είναι : $\begin{matrix} z_1 = i \\ z_2 = -i \end{matrix}$

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε διαδοχικά:

$2xf(x) + x^2 f'(x) - 3x^2 = -f'(x)$

$2xf(x) + x^2 f'(x) + f'(x) = 3x^2$

$2xf(x) + (x^2 + 1) f'(x) = 3x^2$

$((x^2 + 1) f(x))' = (x^3)'$

$(x^2 + 1) f(x) = x^3 + c$

$x = 1 \Rightarrow 2 f(1) = 1 + c \Rightarrow c = 0$

$(x^2 + 1) f(x) = x^3 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με

$f'(x)=\frac{3x^2}{(x^2+1)^2}>0, x\in\mathbb{R}$ και έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Γ2. Για τις ασύμπτωτες:

Δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq\pm\infty$, για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$

Στο $+\infty$ έχουμε:

$y=\lambda x+\beta$

$\lambda=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3+x}=1$

$\beta=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1}=0$

$y=x$

Στο $-\infty$ έχουμε

$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3+x}=1$

$\beta=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2+1}=0$

$y=x$

Άρα η f έχει ασύμπτωτη την $y=x$ στο $+\infty$ και $-\infty$

Γ3. Η ανίσωση ,επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, θα γίνει διαδοχικά:

$f(5(x^2+1)^3-8)\le f(8(x^2+1)^2)$

$5(x^2+1)^3-8\le 8(x^2+1)^2$

$5(x^2+1)^3\le 8((x^2+1)^2+1)$

$\frac{(x^2+1)^3}{(x^2+1)^2+1}\le\frac{8}{5}$

$f(x^2+1)\le f(2)$

$x^2+1\le 2$

$-1\le x\le 1$

Γ4. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=x\int_0^{x^3-x} f(t)dt, x\in[0,1]$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle στο [0,1].

Έχουμε:

Η g είναι παραγωγίσιμη στο [0,1] με $g'(x)=\int_0^{x^3-x} f(t)dt+xf(x^3-x)(3x^2-1)$

$g(0)=0$
$g(1)=0$
Άρα υπάρχει ,ένα τουλάχιστον, $\xi \in (0,1): g'(\xi)=0 \Rightarrow \int_0^{\xi^3-\xi} f(t)dt = -\xi f(\xi^3-\xi)(3\xi^2-1)=0$

Θέμα Δ

Δ1. Θέτουμε: $\int_1^u \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}dt = g(u)$ και η δοθείσα σχέση γίνεται: $f(x)=x+\int_1^x g(u)du$. (1)

Η συνάρτηση $\int_1^x g(u)du$ είναι παραγωγίσιμη αφού και η $\int_1^u \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}dt = h(u)$ είναι παραγωγίσιμη αφού η $\frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.
Παραγωγίζοντας την (1) διαδοχικά 2 φορές για χ>0 έχουμε:

$$f'(x)=1+h(x)$$
$$f'(x)=1+\int_1^x \frac{(f'(t))^2-1}{f(t)}dt$$
$$f''(x)=\frac{(f'(x))^2-1}{f(x)} \Leftrightarrow f''(x)f(x)+1=(f'(x))^2, x>0$$

Δ2. α) Αφού $f(x)f'(x)\neq 0, x>0$ και η $f(x)f'(x)$ είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) σημαίνει ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο για χ>0.

$f(1)=1>0$
$f'(1)=1>0$
$f(1)f'(1)=1>0$
Άρα $f(x)f'(x)>0$, για κάθε x>0, δηλαδή η $f(x), f'(x)$ έχουν το ίδιο πρόσημο και αφού
$\begin{matrix} f(1)=1>0 \\ f'(1)=1>0 \end{matrix}$ θα είναι $\begin{matrix} f(x)>0 \\ f'(x)>0 \end{matrix}$,x>0

β) Η σχέση του ερωτήματος Δ1 έχουμε (αφού και η f΄ είναι συνεχής):
$\lim_{x\to 0^+}(f'(x))^2=(f'(0))^2 \Leftrightarrow (f'(0))^2=\lim_{x\to 0^+}(f(x)f''(x)+1)=f(0)f''(0)+1=1$ και άρα
$(f'(0))^2=1 \Leftrightarrow f'(0)=1$ η $f'(0)=-1$ αφού όμως $f'(x)>0, x>0$ θα είναι $f'(0)=1$

Δ3.

α) Θα βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $A(1,g(1))$. Είναι $g(1)=\dfrac{f'(1)}{f(1)}=1$. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$,ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=\dfrac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}, x>0$ με $g'(1)=-1$ (αφούf΄΄ (1)=0) και έτσι η εφαπτομένη είναι $\begin{array}{l} y-1=g'(1)(x-1) \\ y=-x+2 \end{array}$. Επειδή η g είναι κυρτή στο $(0,\infty)$ θα έχουμε ότι $g(x)\geq -x+2, x\in(0,\infty)$

β) Από την προηγούμενη σχέση θα έχουμε:

$g(x)\geq -x+2 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}\geq 2-x \Rightarrow f'(x)\geq (2-x)f(x)(\text{αφού}\, f(x)>0)$ και αφού στο διάστημα [0,1] το "=" ισχύει μόνο για x=1 θα έχουμε:

$\int_0^1 f'(x)dx>\int_0^1(2-x)f(x)dx \Rightarrow f(1)-f(0)>\int_0^1(2-x)f(x)dx \Rightarrow \int_0^1(2-x)f(x)dx<1$

(ή μπορούμε να πούμε ότι η :

$g(x)\geq -x+2 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}\geq 2-x \Rightarrow f'(x)\geq (2-x)f(x)(\text{αφού}\, f(x)>0)$

$f'(x)-(2-x)f(x)\geq 0$ η συνάρτηση του α΄μέλους δεν είναι παντού μηδέν θα έχουμε:

$\int_0^1 f'(x)-(2-x)f(x)dx\geq 0 \Leftrightarrow ...$

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι διαδοχικά και με την χρήση του ερωτήματος Δ1.

$E(\Omega)=\int_0^1\left|f'(x)^3\right|=\int_0^1 f'(x)^3dx=\int_0^1 f'(x)(f'(x))^2dx=[f(x)f'(x))^2]_0^1-\int_0^1 f(x)f'(x)f''(x)=$

$1-\int_0^1(1-f'(x)^2)f'(x)dx=1-\int_0^1 f'(x)dx+2\int_0^1(f'(x))^3dx=1-f(1)-f(0)+2\mathrm{E}(\Omega)$

$\mathrm{E}(\Omega)=2\mathrm{E}(\Omega)-1\Rightarrow \mathrm{E}(\Omega)=1$ τ.μ.