Λύσεις θεμάτων πανελληνίων εξετάσεων

Στο μάθημα: « Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής»

Γ΄Λυκείου Γενικής Παιδείας

Δευτέρα, 20 Μαΐου 2013

Θέμα Α:

Α1. Θεωρία, σελ. 28 Σχολικό Βιβλίο (απόδειξη)

Α2. Θεωρία, σελ. 14 Σχολικό Βιβλίο (Ορισμός)

Α3. Θεωρία, σελ. 87 Σχολικό Βιβλίο (Ορισμός)

α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Λ

Θέμα Β:

Β1.

$P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \frac{1}{4}$ (Πολλαπλασιάσαμε με την συζυγή παράσταση)

$P(\omega_3) = f'(1) = \frac{1}{3}$ αφού $f'(x) = \frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{3}, x > 0$

Β2. Έχουμε:

$A' = \{\omega_1, \omega_3\}$

$\{\omega_3\} \subseteq A'$

$P(\{\omega_3\}) \leq P(A')$

$\frac{1}{3} \leq P(A')$

Ακόμα έχουμε:

$P(A') = 1 - P(A)$

$1 - P(A) \leq \frac{3}{4}$

$P(A) \geq \frac{1}{4}$

Όμως

$\{\omega_1\} \subseteq A$

$P\{\omega_1\} \leq P(A)$

$P(A) \geq \frac{1}{4}$

Άρα $\frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4}$

B3.

$A' = \{\omega_2, \omega_3\}$

$P(A') = \frac{3}{4}$

$P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{3}{4}$

$P(\omega_2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

Τώρα έχουμε από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας:

$P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{3}{4}$

$P(\omega_2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

$P(\omega_4) = 1 - (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12}) = 0$

Για τα άλλα ζητούμενα έχουμε: Αφού τα ενδεχόμενα $A - B, B - A$ είναι ασυμβίβαστα θα έχουμε:

$$P((A-B)\bigcup(B-A)))=P(A)-P(A\bigcap B)+P(B)-P(A\bigcap B)=P(A)-2P(A\bigcap B)+P(B)(I)$$

$$P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_4)=\frac{1}{4}$$

$$P(B)=P(\omega_1)+P(\omega_3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$$

$$A\bigcap B=\{\omega_1\}$$

$$P(A\bigcap B)=P(\omega_1)=\frac{1}{4}$$

$$P((A-B)\bigcup(B-A)))=\frac{1}{4}-2\frac{1}{4}+\frac{7}{12}=\frac{1}{3}$$

Ακόμα:

$$\mathrm{A}'=\{\omega_2,\omega_3\}$$

$$\mathrm{B}'=\{\omega_2,\omega_4\}$$

$$A'=\{\omega_1,\omega_3\}$$

$$A'-\mathrm{B}'=\{\omega_3\}$$

$$P(A'-\mathrm{B}')=P(\omega_3)=\frac{1}{3}$$

Θέμα Γ

Γ1 Οι κλάσεις είναι
$$\begin{array}{l}[50,50+c)\\ [50+c,50+2c)\\ [50+2c,50+3c)\\ [50+3c,50+4c)\end{array}$$

Αφού η κεντρική τιμή της τέτερατης κλάσης είναι 85 θα έχουμε:

$$\frac{50+3c+50+3c}{2}=85$$

$$100+7c=170$$

$$c=10$$

Γ2. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι**:** $f_4=2f_3$. Επειδή υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα στις κλάσεις και επειδή ,από τον ορισμό η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το 50% των παρατηρήσεων εναι μικρότερες από αυτή και το 50% των παρατηρήσεων μεγαλύτερες από αυτήν και αφού η διάμεσος είναι 75 θα βρίσκεται στο μέσο της τρίτης κλάσης και άρα θα έχουμε:

$$\frac{f_3}{2}+f_4=0,5$$

$$f_3=0,2$$

Άρα και $f_4=0,4$

Ακόμα έχουμε $f_1+f_2=0,4\,(1)$ και αφού η μέση τιμή είναι 74 θα έχουμε :

$55f_1+65f_2+75f_3+85f_4=74$

$55f_1+65f_2=25$

$11f_1+13f_2=5(2)$

Από το σύσημα των (1) και (2) προκύπτει ότι $\begin{matrix} f_1=0{,}1 \\ f_3=0{,}3 \end{matrix}$.

Άρα ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές**	**Σχετικές συχνότητες**
[50,60)	**55**	**0,1**
[60,70)	**65**	**0,3**
[70,80)	**75**	**0,2**
[80,90)	**85**	**0,4**

Γ3. Η μέση τιμή των παρατηρησεων που είναι μικρότερες του 80 είναι **:**

$\bar{x}=\dfrac{x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3}{f+f_2+f_3}=\dfrac{200}{3}$ (Ο τύπος αυτός προκύπτει εύκολα από τις σχ. συχνότητες)

Γ4. Το ποσοστό του 2,5% αντιστοιχεί στο κάτω άκρο του διαστήματος της κανονκής κατανομής $\bar{x}+2s=74$ (1) και το ποσοστό 16% αντιστοιχεί στο πάνω άκρο του διαστήματος της κανονικής κατανομής $\bar{x}-s=68$ (2). Από την λύση του προηγούμενου συστήματος προκύπτει ότι:

$s=2$

$\bar{x}=70$

Ο συντελεστής μεταβολής είναι $C.V=\dfrac{s}{\bar{x}}=\dfrac{2}{70}<\dfrac{1}{10}$ και άρα το δείγμα **είναι ομοιογενές**.

<u>Θέμα Δ</u>

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και είναι $f'(x)=\ln x+1, x>0$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι:

$y=\lambda x+\beta$

$\lambda=f'(1)=1$

$y=x+\beta$

$f(1)=1+\beta$

$\kappa=1+\beta$

$\beta=\kappa-1$

$y=x+k-1$

Το εμβαδόν Ε που σχηματίζει η (ε) με τους άξονες είναι

$$E=\frac{|\kappa-1||1-\kappa|}{2}=\frac{(\kappa-1)^2}{2}<2\Leftrightarrow(\kappa-1)^2<4$$

Και άρα $\kappa-1<2$

$\kappa<3$

και αφού κ ακέραιος
κ=2

Δ2.
α) Η μέση τιμή των τεταγμένων των παρατηρήσεων είναι:

$$\frac{x_1+x_2+...x_{50}+50}{50}=31$$

$$\bar{x}+1=31$$

$$\bar{x}=30$$

β) $\sum_{i=1}^{50} x_i = 30\cdot 50 = 1500$. Αφού οι 15 παρατηρήσεις δεν μεταβλήθηκαν θα έχουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{50} x_i + 20\cdot 3 - 15\lambda = 31\cdot 50 = 1550$$

$$1500+60-15\lambda = 1550$$

$$\lambda = \frac{2}{3}$$

Δ3.Επειδή για $x>\frac{1}{e}$ η f είναι γν. άυξουσα θα έχουμε ότι $f(a)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)=e+2$.

Ακόμα $f'(\frac{1}{e})=0$. Επειδή η f είναι γν. αυξουσα για $x>\frac{1}{e}$ και γν. φθίνουσα για $0<x<\frac{1}{e}$ θα έχει ελάχιστο στο $x_0=\frac{1}{e}$ το $f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}+2$ και άρα $f(x)\geq f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}+2>0$. Έτσι οι παρατηρήσεις διαταγμένες κατά φθίνουσα σειρά είναι : $f'(\frac{1}{e})<f(a)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$

και άρα το εύρος θα είναι: $R=f(e)-f'(\frac{1}{e})=e+2$

Η μέση τιμή είναι των παρατηρήσεων αυτών είναι:

$$\frac{f(a)+f(\beta)+f(\gamma)+f'(\frac{1}{e})+f(e)}{5}=\frac{a\ln a+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma+6+e+2}{5}=\frac{7+6+e+2}{5}=\frac{15+e}{5}$$

Δ4.
Για να σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα χ' χ οξεία γωνία θα πρέπει

$f'(t)>0 \Leftrightarrow \ln t+1>0 \Leftrightarrow t>\frac{1}{e}$ **άρα** $A=\{t_{11},t_{12,...}t_{30}\}$

Τώρα έχουμε (για το Β)

$f(t)>f'(t)+t \Leftrightarrow (t-1)\ln t>0 \Leftrightarrow t\in(0,1)\cup(1,\infty)$

$B=\{t_1,t_2,...t_{29}\}$

α) $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$

β) $P(B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{19}{30}$ (αφού τα κοινά τους στοιχεία 19, από το t_{11} έως το t_{29})