Λύσεις θεμάτων πανελληνίων εξετάσεων

Στο μάθημα: « Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής»
ΕΣΠΕΡΙΝΑ

Γ΄Λυκείου Γενικής Παιδείας

Δευτέρα, 20 Μαΐου 2013

Θέμα Α:

Α1. Θεωρία, σελ. 28 Σχολικό Βιβλίο (απόδειξη)

Α2. Θεωρία, σελ. 40 Σχολικό Βιβλίο (Ορισμός)

Α3. Θεωρία, σελ. 87 Σχολικό Βιβλίο (Ορισμός)

α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Σ

Θέμα Β:

Β1. Έχουμε πολλλαπλάσιάζοντας με την συζυγή παράσταση:

$$\gamma = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+6}+3)}{x+6-9} = 36$$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3x^2 - 2ax + \beta$. Για να είναι παράλληλη προς τον άξονα χ΄χ θα πρέπει να ισχύει:

$f'(1) = 0$

$f'(\frac{1}{3}) = 0$

Από όπου προκύπτει το σύστημα :

$$\begin{aligned} 2a - \beta &= 3 \\ -2a + 3\beta &= -1 \end{aligned} \quad \text{το οποίο έχει λύση} \quad \begin{aligned} a &= 2 \\ \beta &= 1 \end{aligned}$$

Β3. Για αυτές τις τιμές των α και β η συνάρτηση γίνεται:
$f(x)=x^3-2x^2+x+36$,x>0 με $f'(x)=3x^2-4x+1, x\in\mathbb{R}$.

Για την μονοτονία της έχουμε:
Για $\frac{1}{3}<x<1 \Leftrightarrow f'(x)<0$ και άρα η f είναι γν. φθίνουσα συνάρτηση
Για $x>1 \Leftrightarrow f'(x)>0$ και άρα η f είναι γν αύξουσα συνάρτηση

Για τα ακρότατα:

Η f έχει ελάχιστο στο $x_2=1$ το $f(1)=36$
Η f έχει μέγιστο στο $x_1=\frac{1}{3}$ το $f(\frac{1}{3})=\frac{976}{27}$

Θέμα Γ: (Το ίδιο με τα Ημερήσια)

Γ1 Οι κλάσεις είναι
$$\begin{array}{l}[50,50+c)\\ [50+c,50+2c)\\ [50+2c,50+3c)\\ [50+3c,50+4c)\end{array}$$
Αφού η κεντρική τιμή της τέτερατης κλάσης είναι 85 θα έχουμε:

$$\frac{50+3c+50+3c}{2}=85$$
$$100+7c=170$$
$$c=10$$

Γ2. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι**:** $f_4=2f_3$. Επειδή υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα στις κλάσεις και επειδή ,από τον ορισμό η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το 50% των παρατηρήσεων εναι μικρότερες από αυτή και το 50% των παρατηρήσεων μεγαλύτερες από αυτήν και αφού η διάμεσος είναι 75 θα βρίσκεται στο μέσο της τρίτης κλάσης και άρα θα έχουμε:

$$\frac{f_3}{2}+f_4=0,5$$
$$f_3=0,2$$
Άρα και $f_4=0,4$
Ακόμα έχουμε $f_1+f_2=0,4\,(1)$ και αφού η μέση τιμή είναι 74 θα έχουμε :
$$55f_1+65f_2+75f_3+85f_4=74$$
$$55f_1+65f_2=25$$
$$11f_1+13f_2=5(2)$$

Από το σύσημα των (1) και (2) προκύπτει ότι $\begin{matrix} f_1 = 0,1 \\ f_3 = 0,3 \end{matrix}$.

Άρα ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές**	**Σχετικές συχνότητες**
[50,60)	**55**	**0,1**
[60,70)	**65**	**0,3**
[70,80)	**75**	**0,2**
[80,90)	**85**	**0,4**

Γ3. Η μέση τιμή των παρατηρησεων που είναι μικρότερες του 80 είναι **:**
$\bar{x} = \dfrac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3}{f + f_2 + f_3} = \dfrac{200}{3}$ (Ο τύπος αυτός προκύπτει εύκολα από τις σχ. συχνότητες)

Γ4. Το ποσοστό του 2,5% αντιστοιχεί στο κάτω άκρο του διαστήματος της κανονκής κατανομής $\bar{x} + 2s = 74$ (1) και το ποσοστό 16% αντιστοιχεί στο πάνω άκρο του διαστήματος της κανονικής κατανομής $\bar{x} - s = 68$ (2). Από την λύση του προηγούμενου συστήματος προκύπτει ότι:
$s = 2$

$\bar{x} = 70$

Ο συντελεστής μεταβολής είναι $C.V = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{2}{70} < \dfrac{1}{10}$ και άρα το δείγμα **είναι ομοιογενές**.

<u>Θέμα Δ:</u>

Δ1. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο A(1,f(1)) είναι :
$y = \lambda x + \beta$ με $\lambda = f'(1) = 2$ αφού $f'(x) = 2x$,χ>0 και $f(1) = \kappa + 2$ θα έχουμε: $\kappa + 2 = 2 + \beta$ και έτσι $\beta = \kappa$.Άρα η εφαπτομένη (ε) είναι $y = 2x + \kappa$. Έχουμε για τα σημεία τομής με τους άξονες και το Εμβαδόν που σχηματίζεται από τυην (ε) και αυτούς:
$x = 0, y = k$

$y = 0, x = -\dfrac{k}{2}$

$E = \dfrac{|k|\left|\dfrac{k}{2}\right|}{2} < 4$

Από οπου προκύπτει $-4 < \kappa < 4$ και αφού ο κ είναι ακέραιος θα είναι $\kappa = 3$

Δ2. α) Έχουμε διαδοχικά: $\begin{matrix} \bar{y} = 63 \\ \dfrac{2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_{50} + 50 \cdot 3}{50} \end{matrix} = 63 \Leftrightarrow 2\bar{x} + 3 = 63 \Leftrightarrow \bar{x} = 30$

β) $\sum_{i=1}^{50} x_i = 30 \cdot 50 = 1500$. Αφού οι 15 παρατηρήσεις δεν μεταβλήθηκαν θα έχουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{50} x_i + 20 \cdot 3 - 15\lambda = 31 \cdot 50 = 1550$$
$$1500 + 60 - 15\lambda = 1550$$
$$\lambda = \frac{2}{3}$$

Δ3. Αν $\overline{z}$ είναι η μέση τιμη των παρατηρήσεων αυτών θα έχουμε

$$\overline{z} = \frac{f(a) + f(\beta) + f(\gamma) + f(1) + f'(0)}{5} = \frac{a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 16}{5} = \frac{22}{5}$$

Για το εύρος έχουμε $f'(0) = 0 < 4 = f(0) < f(a) < f(\beta) < f(\gamma) < f(1) = 5$ διότι η f
Για $x > 0$ είναι γν. αύξουσα και για $x < 0$ γν. φθίνουσα έχει δε ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το
$f(0) = 4$. Άρα $f(x) \geq f(0) = 4$ για κάθε x.
Έτσι το εύρος είναι $R = f(1) - f'(0) = 5$