

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑ.Λ.
(ΟΜΑΔΑ Β΄)**

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 12 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2013

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

Θ Ε Μ Α Α

A 1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 7

A 2. Πότε μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 4

A 3. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A 4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- α) Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.
- β) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
- γ) Αν μια συνάρτηση f , ορισμένη και συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ έχει ρίζα $x_0 \in (a, \beta)$, τότε ισχύει πάντα $f(a)f(\beta) < 0$
- δ) Η συνάρτηση $f(x) = a^x, a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = a^x \ln a$
- ε) Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\alpha} f(x) dx$$

Μονάδες 10

Θ Ε Μ Α Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$\left| \frac{z-2}{\bar{z}+2} \right| = 1 \quad (1)$$

$$\left| \frac{w-i^{2013}}{\bar{w}+2i} \right| = 1 \quad (2)$$

με $z \neq -2, w \neq 2i$

B 1. Να αποδείξετε ότι ο z κινείται στον άξονα των φανταστικών αριθμών.

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

B 2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο μιγαδικό επίπεδο είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 6

B 3. Αν επιπλέον ισχύει ότι $|z| = \operatorname{Re}(w) \neq \frac{3}{2}$ να βρείτε την ελάχιστη απόσταση των εικόνων των z και w στο μιγαδικό επίπεδο καθώς και τις εικόνες των z και w που αντιστοιχούν στην ελάχιστη αυτή απόσταση.

Μονάδες 7

B 4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1), (2) και $\operatorname{Im}(z) > 0$ να αποδείξετε ότι:

$$|z+w|^2 - 3|z| > 2$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} \ln x, x > 0$

Γ 1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Γ 2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[e, \infty)$.

Μονάδες 6

Γ 3. Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x^2+1)(x^2-5x+6)}{\ln(x^2+1)}, x \in \mathbb{R}^*$

και ότι υπάρχουν α, β με $0 < \alpha < 1, \beta > 1$, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

$$x^2 - 5x + 6 \geq e^{a^2 - x^2} (a^2 - 5a + 6) \quad (1) \text{ για κάθε } 0 < x < 1$$

$$e^{x^2 - \beta^2} (x^2 - 5x + 6) + 5\beta - 6 \leq \beta^2 \quad (2) \text{ για κάθε } x > 1$$

να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $g''(\xi) = 0$

Μονάδες 7

Γ 4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \frac{f(x)(x^2 - 1)}{\ln x}, x > 0, x \neq 1$, την ευθεία $(\varepsilon): y = 7ex - 11e$ και τις ευθείες $x = 3, x = 4$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο \mathbb{R} με $f'(x) < 0, x \in \mathbb{R}$, $f(1) < 0$ και μία συνάρτηση g συνεχής και περιττή στο \mathbb{R}

Δ 1. ι) Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(f(x)) dx \geq f(f(0))$

Μονάδες 4

ii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \kappa} \frac{1}{x - \kappa} \int_{-x}^x g(t) dt \quad (\kappa \in \mathbb{R})$

Μονάδες 4

Δ 2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$) τέτοιος, ώστε: $f(\xi) \int_{\xi}^{\beta} g(t) dt = g(\xi) \int_{\alpha}^{\xi} f(t) dt$

Μονάδες 6

Δ 3. Αν υπάρχει $\eta \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει $\int_{\alpha}^{\eta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\eta} g(x) dx$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(c) = g(c)$

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ 4. Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $G(x) = \int_1^x f(u) \ln \frac{x}{u} du$ και

$$H(x) = \int_1^x \left(\int_1^u \frac{1}{t} f(t) dt \right) du, x > 0, u > 0, \text{ να αποδείξετε ότι:}$$

ι) Οι συναρτήσεις G και H είναι παραγωγίσιμες και $G(x) = H(x), x > 0$

Μονάδες 3

ιι) Οι συναρτήσεις $G'(x), H'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσες στο διάστημα $(1, \infty)$.

Μονάδες 2

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ