ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑ.Λ.
(ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 26 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α 1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a,\beta]$, να αποδείξετε ότι:
$\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 7

Α 2. Πότε η ευθεία $y = ax + \beta$ με $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $-\infty$;

Μονάδες 4

Α 3. Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι «1-1» να δώσετε τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης g της f

Μονάδες 4

Α 4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν z ένας μιγαδικός αριθμός, τότε $(\bar{z})^\nu = \overline{(z^\nu)}$

β) Αν $a>1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

γ) Αν η f είναι ορισμένη σ΄ενα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του Δ με $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0

δ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{o}y$ και $x'\hat{o}y'$

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[a,\beta]$ με $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$, ισχύει ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x)=(x+e)\ln(x+e)$, $x>-e$ και $g(x)=5^{2-x}+(\frac{1}{3})^x$, $x\in\mathbb{R}$

Β 1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,2)$

Μονάδες 6

Β 2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι κυρτές στα πεδία ορισμού τους.

Μονάδες 5

Β 3. Να αποδείξετε ότι: $g(2013)<\dfrac{g(2012)+g(2014)}{2}$

Μονάδες 8

Β 4. Να ορίσετε την συνάρτηση fog, να εξετάσετε αν είναι συνάρτηση «1-1» και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί w, z με $|z| \neq |w|$ που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$|z| = |w^3|$ (1)

$|z|^{|w|} - |w|^{|z|} = (\lambda^3 - \mu\lambda^5 + \mu i)^2 + [(\lambda i)^3 + \mu(\lambda i)^5 + \mu]^2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (2)

Γ 1. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των w, z στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται σε κύκλους C_1, C_2 με κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνες $\rho_1 = \sqrt{3}$ και $\rho_2 = 3\sqrt{3}$ αντίστοιχα.

Μονάδες 8

Γ 2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = (1 + \frac{|z| + |w| i}{|w| - |z| i})^{2\nu}$ για τις διάφορες τιμές του $\nu \in \mathbb{N}$

Μονάδες 6

Γ 3. Να αποδείξετε ότι η εικόνα Α του μιγαδικού αριθμού u ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $|u| = |u - 2\sqrt{3}|$ και έχει το ελάχιστο δυνατό μέτρο, βρίσκεται στον κύκλο C_1

Μονάδες 6

Γ 4. Αν η εικόνα Β του μιγαδικού αριθμού w_1 στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημείο του κύκλου C_1 με $w_1 \neq u$ και $w_1 \neq -u$ καθώς και Γ η εικόνα του $-w_1$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$\int_0^{f(x)} (2 - \eta\mu t)dt = 2e^x + \sigma\upsilon\nu e^x - 1$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$e^2+2\int_0^1 g^2(x)dx=1+4\int_0^1 e^x g(x)dx$ (2) για κάθε $x\in[0,1]$

και ας είναι $g(x)=\begin{cases} x+1\ , & x<0 \\ e^x\ , & x>1 \end{cases}$

Ακόμα θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=2x+\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$

Δ 1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

Μονάδες 5

Δ 2. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f,\ g$ και το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ώστε $f(x)=g(x)$

Μονάδες 8

Δ 3.Αν $f(x)=e^x$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f,\ h$ και των ευθειών $x=2$ και $x=3$

Μονάδες 6

Δ 4. Να αποδείξετε ότι: $1<\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{h(t)}{t}dt<2$

Μονάδες 6

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο**.**
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν . **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ