

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑ.Λ.
(ΟΜΑΔΑ Β΄)**

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 26 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

A 1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$$

Μονάδες 7

A 2. Πότε η ευθεία $y = ax + \beta$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $-\infty$;

Μονάδες 4

A 3. Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι «1-1» να δώσετε τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης g της f

Μονάδες 4

A 4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν z ένας μιγαδικός αριθμός, τότε $(\bar{z})^v = \overline{(z^v)}$

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

β) Αν $a > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

γ) Αν η f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του Δ με $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0

δ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{o}y$ και $x'\hat{o}y'$

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ με $\int_a^\beta f(x)dx > 0$, ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = (x+e)\ln(x+e), \quad x > -e \quad \text{και} \quad g(x) = 5^{2-x} + \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Γ 1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$

Μονάδες 6

Γ 2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι κυρτές στα πεδία ορισμού τους.

Μονάδες 5

Γ 3. Να αποδείξετε ότι: $g(2013) < \frac{g(2012) + g(2014)}{2}$

Μονάδες 8

Γ 4. Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ g$, να εξετάσετε αν είναι συνάρτηση «1-1» και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί w, z με $|z| \neq |w|$ που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z| = |w^3| \quad (1)$$

$$|z|^{|w|} - |w|^{|z|} = (\lambda^3 - \mu\lambda^5 + \mu i)^2 + [(\lambda i)^3 + \mu(\lambda i)^5 + \mu]^2, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (2)$$

B 1. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των w, z στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται σε κύκλους C_1, C_2 με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνες $\rho_1 = \sqrt{3}$ και $\rho_2 = 3\sqrt{3}$ αντίστοιχα.

Μονάδες 8

B 2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \left(1 + \frac{|z| + |w|i}{|w| - |z|i}\right)^{2\nu}$ για τις διάφορες τιμές του $\nu \in \mathbb{N}$

Μονάδες 6

B 3. Να αποδείξετε ότι η εικόνα A του μιγαδικού αριθμού u ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $|u| = |u - 2\sqrt{3}|$ και έχει το ελάχιστο δυνατό μέτρο, βρίσκεται στον κύκλο C_1

Μονάδες 6

B 4. Αν η εικόνα B του μιγαδικού αριθμού w_1 στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημείο του κύκλου C_1 με $w_1 \neq u$ και $w_1 \neq -u$ καθώς και Γ η εικόνα του $-w_1$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\int_0^{f(x)} (2 - \eta \mu t) dt = 2e^x + \sigma \nu e^x - 1 \quad (1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

$$e^2 + 2\int_0^1 g^2(x)dx = 1 + 4\int_0^1 e^x g(x)dx \quad (2) \text{ για κάθε } x \in [0,1]$$

$$\text{και ας είναι } g(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ e^x, & x > 1 \end{cases}$$

Ακόμα θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = 2x + \sin x, x \in \mathbb{R}$

Δ 1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Μονάδες 5

Δ 2. Να βρείτε τις συναρτήσεις f, g και το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ώστε $f(x) = g(x)$

Μονάδες 8

Δ 3. Αν $f(x) = e^x$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h και των ευθειών $x = 2$ και $x = 3$

Μονάδες 6

Δ 4. Να αποδείξετε ότι: $1 < \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{h(t)}{t} dt < 2$

Μονάδες 6

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ