Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ Λυκείου

Ερωτήσεις Θεωρίας – Αποδείξεις

Ερωτήσεις Θεωρίας

Διαφορικός Λογισμός

1. Τι ονομάζουμε συνάρτηση;

Συνάρτηση είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου B.

2. Τι ονομάζεται πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής;

Ονομάζεται μια συνάρτηση της οποίας το σύνολο Α είναι υποσύνολο του συνόλου R των πραγματικών αριθμών, ενώ το Β συμπίπτει με το R.

3. Τι λέγεται τιμή μιας συνάρτησης f στο x;

Ο αριθμός $y = f(x)$ στον οποίο αντιστοιχίζεται ο $x \in A$.

4. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A. Τι ονομάζεται εξαρτημένη και τι ανεξάρτητη μεταβλητή της f;

Το γράμμα x, που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του A, ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το $y = f(x)$, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x και εξαρτάται από την τιμή του x, λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

5. Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A, τότε πως ορίζονται οι συναρτήσεις άθροισμα, διαφορά γινόμενο και πηλίκο;

Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A, τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

- ✓ Το άθροισμα $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$
- ✓ Η διαφορά $D = f - g$, με $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$
- ✓ Το γινόμενο $P = f \cdot g$, με $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$ και
- ✓ Το πηλίκο $R = \dfrac{f}{g}$, με $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

6. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση ή καμπύλη μιας συνάρτησης f;

Γραφική παράσταση ή καμπύλη της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x,(f(x))$ για όλα τα $x \in A$.

7. Πότε ένα σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της f;

Ένα σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της f, μόνο όταν $y = f(x)$.

8. Τι λέγεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f;

Η εξίσωση $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x,y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f.

9. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; και πότε γνησίως φθίνουσα;

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, και γνησίως φθίνουσα στο Δ, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

10. Πότε μια συνάρτηση ονομάζεται γνησίως μονότονη;

Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται γνησίως μονότονη.

11. Τι ονομάζεται περιοχή του x_0;

Κάθε ανοιχτό διάστημα που περιέχει το x_0.

12. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο $x_1 \in A$ και πότε τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο $x_2 \in A$.

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει:

- ✓ Τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \le f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1, και
- ✓ τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \ge f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2.

13. Μπορεί ένα τοπικό μέγιστο να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό ελάχιστο;

Ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

14. Τι ονομάζουμε ακρότατα συνάρτησης;

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά.

15. Να γράψετε τις ιδιότητες ορίων και πότε ισχύουν αυτές;

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$ όπου ℓ_1 και ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε:

✓ $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\ell_1+\ell_2$

✓ $\lim\limits_{x\to x_0}(kf(x))=k\ell_1$

✓ $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

✓ $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{\nu}=\ell_1^{\nu}$

✓ $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=\ell_1\ell_2$

✓ $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\ell_1}$.

16. Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0\in A$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

17. Ποιες συνεχείς συναρτήσεις γνωρίζετε;

Οι πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές, αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς συναρτήσεις. Έτσι ισχύει για παράδειγμα $\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi x_0$ (όταν $\sigma\upsilon\nu x_0\neq 0$).

18. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Αν το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

19. Τι ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_0;

Το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0. Είναι λοιπόν: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

20. Τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς το x, όταν $x=x_0$;

Η παράγωγος $f'(x_0)$ της f στο x_0 .

21. Τι εκφράζει η παράγωγος της f στο x_0. Δώστε μερικά παραδείγματα.

Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς το x, όταν $x=x_0$.

Παραδείγματα:

✓ Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x=x_0$.

✓ Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x=f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0, $\upsilon(t_0)=f'(t_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t όταν $t=t_0$.

22. Υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο; Δώστε παράδειγμα.

Υπάρχουν και συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο. Όπως είναι, για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=|x|$ στο $x_0=0$. Διότι όταν $h<0$, έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1$, ενώ όταν $h>0$, έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$.

23. Τι ονομάζουμε (πρώτη) παράγωγο μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το A;

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, και B το σύνολο των $x\in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x\in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f και συμβολίζεται με f'.

24. Τι ονομάζουμε δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f;

Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f''.

25. Τι γνωρίζετε για τη ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t;

- ✓ Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t, τότε η ταχύτητά του θα είναι $v(t)=x'(t)$.
- ✓ Αν η συνάρτηση v είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t θα είναι η παράγωγος της ταχύτητας, δηλαδή θα ισχύει $\alpha(t)=\upsilon'(t)$ ή ισοδύναμα $\alpha(t)=x''(t)$.

26. Γράψτε τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων και τους κανόνες παραγώγισης.

$(c)'=0$	$(cf(x))'=cf'(x)$
$(x)'=1$	$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$
$(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$, ν φυσικός	$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$(x^{\rho})'=\rho x^{\rho-1}$, ρ ρητός	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$
$(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$	$(\ell nx)'=\frac{1}{x}$
$(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$	
$(e^x)'=e^x$	$(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $\sigma\upsilon\nu x\neq 0$

27. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε τι συμπεραίνουμε για τη μονοτονία της συνάρτησης *f*.

Η συνάρτηση *f* είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

28. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε τι συμπεραίνουμε για τη μονοτονία της συνάρτησης *f*.

Η συνάρτηση *f* είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

29. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε τι συμπεραίνουμε για τα ακρότατα της f στο (α, β);

Η συνάρτηση *f* παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ μέγιστο.

30. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε τι συμπεραίνουμε για τα ακρότατα της f στο (α, β);

Η συνάρτηση *f* παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.

Ερωτήσεις Θεωρίας

Στατιστική

31. Τι ονομάζουμε πληθυσμό;

Ένα σύνολο που θέλουμε να εξετάσουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους λέγεται πληθυσμός.

32. Τι ονομάζουμε μονάδες ή άτομα πληθυσμού;

Τα στοιχεία του πληθυσμού συχνά αναφέρονται και ως μονάδες ή άτομα του πληθυσμού.

33. Τι ονομάζουμε μεταβλητές στη στατιστική;

Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται μεταβλητές και τις συμβολίζουμε συνήθως με τα κεφαλαία γράμματα $X, Y, Z, B, \ldots$

34. Τι ονομάζουμε τιμές μεταβλητής;

Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται τιμές της μεταβλητής.

35. Τι ονομάζουμε παρατηρήσεις ή στατιστικά δεδομένα; Οι παρατηρήσεις είναι διαφορετικές μεταξύ τους;

Από τη διαδοχική εξέταση των ατόμων του πληθυσμού ως προς ένα χαρακτηριστικό τους προκύπτει μια σειρά από δεδομένα, που λέγονται στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις. Τα στατιστικά δεδομένα δεν είναι κατ' ανάγκη διαφορετικά.

36. Σε ποιες κατηγορίες διακρίνονται οι μεταβλητές; Να δώσετε μερικά παραδείγματα σε κάθε κατηγορία.

Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε:

- ✓ Σε ποιοτικές ή κατηγορικές μεταβλητές, των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί. Τέτοιες είναι, για παράδειγμα, η ομάδα αίματος (με τιμές Α, Β, ΑΒ, Ο), το φύλο (με τιμές αγόρι, κορίτσι), οι συνέπειες του καπνίσματος (με τιμές καρδιακά νοσήματα, καρκίνος κτλ), όπως επίσης και η οικονομική κατάσταση και η υγεία των ανθρώπων (που μπορεί να χαρακτηριστεί ως κακή, μέτρια, καλή ή πολύ καλή), καθώς και το ενδιαφέρον των μαθητών για τη Στατιστική, που μπορεί να χαρακτηριστεί ως υψηλό, μέτριο, χαμηλό ή μηδαμινό.

- ✓ Σε ποσοτικές μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται:

  i) Σε διακριτές μεταβλητές, που παίρνουν μόνο "μεμονωμένες" τιμές. Τέτοιες μεταβλητές είναι, για παράδειγμα, ο αριθμός των υπαλλήλων μιας επιχείρησης (με τιμές 1,2,...), το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού (με τιμές 1,2,...,6) κτλ.

  ii) Σε συνεχείς μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν αποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β). Τέτοιες μεταβλητές είναι το ύψος και το βάρος των μαθητών της Γ΄ Λυκείου, ο χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές να απαντήσουν στα θέματα μιας εξέτασης, η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης κτλ.

37. Τι ονομάζεται απογραφή;

Ένας τρόπος για να πάρουμε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό είναι να εξετάσουμε όλα τα άτομα (στοιχεία) του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων καλείται απογραφή

38. Τι ονομάζουμε δείγμα;

Μια μικρή ομάδα ή υποσύνολο του πληθυσμού, καλείται δείγμα.

39. Όσο πιο μεγάλο είναι ένα δείγμα τόσο πιο αντιπροσωπευτικό είναι;

Όχι. Μία "προσεκτική" επιλογή μικρότερου δείγματος είναι δυνατόν να δώσει καλύτερα αποτελέσματα από ένα μεγαλύτερο δείγμα που δεν έχει εκλεγεί κατάλληλα

40. Σε ποιες κατηγορίες διακρίνονται οι στατιστικοί πίνακες; Και τι γνωρίζετε για αυτές;

Οι πίνακες διακρίνονται στους:

α) γενικούς πίνακες, οι οποίοι περιέχουν όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από μία στατιστική έρευνα (συνήθως με αρκετά λεπτομερειακά στοιχεία) και αποτελούν πηγές στατιστικών πληροφοριών στη διάθεση των επιστημόνων-ερευνητών για παραπέρα ανάλυση και εξαγωγή συμπερασμάτων,

β) ειδικούς πίνακες, οι οποίοι είναι συνοπτικοί και σαφείς. Τα στοιχεία τους συνήθως έχουν ληφθεί από τους γενικούς πίνακες.

41. Τι πρέπει να περιέχει ένας πίνακας που έχει κατασκευαστεί σωστά;

Κάθε πίνακας που έχει κατασκευαστεί σωστά πρέπει να περιέχει:

α) τον τίτλο, που γράφεται στο επάνω μέρος του πίνακα και δηλώνει με σαφήνεια και συνοπτικά το περιεχόμενο του πίνακα,

β) τις επικεφαλίδες των γραμμών και στηλών, που δείχνουν συνοπτικά τη φύση και τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων,

γ) το κύριο σώμα (κορμό), που περιέχει διαχωρισμένα μέσα στις γραμμές και στις στήλες τα στατιστικά δεδομένα,

δ) την πηγή, που γράφεται στο κάτω μέρος του πίνακα και δείχνει την προέλευση των στατιστικών στοιχείων, έτσι ώστε ο αναγνώστης να ανατρέχει σ'αυτήν, όταν επιθυμεί, για επαλήθευση στοιχείων ή για λήψη περισσότερων πληροφοριών.

42. Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, $\kappa \le \nu$. Τι ονομάζεται συχνότητα ν_i της τιμής x_i. Με τι ισούται το άθροισμα όλων των συχνοτήτων;

Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, $\kappa \le \nu$. Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η (απόλυτη) συχνότητα ν_i, δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων. Είναι φανερό ότι το άθροισμα όλων των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος, δηλαδή:
$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_\kappa = \nu$$

43. Τι ονομάζετε σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i;

Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος ν του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, δηλαδή,

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \qquad i = 1,2,\dots,\kappa .$$

44. Ποιες ιδιότητες γνωρίζετε για τη σχετική συχνότητα;

Για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες:

(i) $0 \le f_i \le 1$ για $i = 1,2,\dots,\kappa$.

(ii) $f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = 1$

45. Τι εκφράζουν οι αθροιστικές συχνότητες N_i και τι οι σχετικές αθροιστικές συχνότητες F_i της τιμής x_i;

Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών εκτός από τις συχνότητες ν_i και f_i χρησιμοποιούνται συνήθως και οι λεγόμενες αθροιστικές συχνότητες N_i και οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i, οι οποίες εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό αντίστοιχα των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

46. Αν οι τιμές $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ είναι σε αύξουσα διάταξη με τι ισούται αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i και με τι η αθροιστική σχετική συχνότητα;

Αν οι τιμές $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ είναι σε αύξουσα διάταξη, τότε η αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i είναι $N_i = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_i$. Όμοια, η αθροιστική σχετική συχνότητα είναι $F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i$, για $i = 1, 2, ..., \kappa$.

47. Ποιες σχέσεις συνδέουν τις αθροιστικές συχνότητες N_i με τις συχνότητες ν_i και ποιες τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i με τις σχετικές συχνότητες f_i;

Ισχύουν οι σχέσεις:

$\nu_1 = N_1,\ \nu_2 = N_2 - N_1, ..., \nu_\kappa = N_\kappa - N_{\kappa-1}$ και $f_1 = F_1,\ f_2 = F_2 - F_1, ..., f_\kappa = F_\kappa - F_{\kappa-1}$.

48. Πότε χρησιμοποιείται το ραβδόγραμμα;

Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

49. Πότε χρησιμοποιείται το διάγραμμα συχνοτήτων;

Στην περίπτωση που έχουμε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το διάγραμμα συχνοτήτων

50. Τι ονομάζουμε πολύγωνο συχνοτήτων ή πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τι μας δίνουν αυτά;

Ενώνοντας τα σημεία ή (x_i, f_i) έχουμε το λεγόμενο πολύγωνο συχνοτήτων ή πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων, αντίστοιχα, που μας δίνουν μια γενική ιδέα για τη μεταβολή της συχνότητας ή της σχετικής συχνότητας όσο μεγαλώνει η τιμή της μεταβλητής που εξετάζουμε

51. Πότε χρησιμοποιούμε κυκλικό διάγραμμα;

Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.

52. Τι είναι κυκλικό διάγραμμα;

Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή ,ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής.

53. Πως υπολογίζουμε το αντίστοιχο τόξο α_i ενός κυκλικού τμήματος

Αν συμβολίσουμε με α_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε $\alpha_i = \nu_i \dfrac{360^o}{\nu} = 360^o f_i$ για $i=1,2,\ldots,\kappa$.

54. Τι είναι το χρονόγραμμα ή χρονολογικό διάγραμμα;

Είναι το διάγραμμα μίας μεταβλητής που οι τιμές που παίρνει είναι χρονικές στιγμές.

55. Πότε κάνουμε ομαδοποίηση των δεδομένων;

Αυτό μπορεί να συμβεί είτε στην περίπτωση μιας διακριτής μεταβλητής είτε, πολύ περισσότερο, στην περίπτωση μιας συνεχούς μεταβλητής, όπου αυτή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα ορισμού της.

56. Τι ονομάζουμε κλάσεις;

Οι κλάσεις είναι διαστήματα της μορφής [α,β) στα οποία ταξινομούνται (ομαδοποιούνται) τα δεδομένα.

57. Τι ονομάζουμε όρια κλάσεων;

Τα άκρα των κλάσεων καλούνται όρια των κλάσεων. Δηλαδή τα άκρα α, β των διαστημάτων [α,β).

58. Τι ονομάζεται πλάτος κλάσης;

Πλάτος μιας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατωτέρου από το ανώτερο όριο της κλάσης. Δηλαδή ο αριθμός β-α.

59. Τι ονομάζουμε κεντρική τιμή κλάσης;

Είναι το κέντρο της κλάσης δηλαδή το $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

60. Τι είναι το ιστόγραμμα συχνοτήτων; Πως κατασκευάζεται;

Ιστόγραμμα συχνοτήτων είναι η γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα. Κατασκευάζεται ως εξής: Στον οριζόντιο άξονα ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων σημειώνουμε, με κατάλληλη κλίμακα, τα όρια των κλάσεων. Στη συνέχεια, σχηματίζουμε διαδοχικά ορθογώνια (ιστούς), από καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το πλάτος της κλάσης και ύψος τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης αυτής.

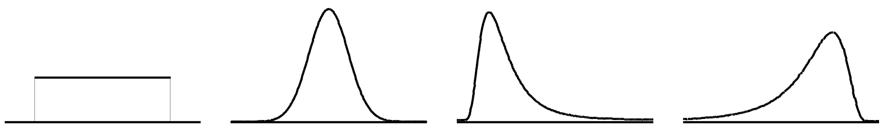
61. Πως κατασκευάζετε το πολύγωνο συχνοτήτων και πως το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων; Με τι ισούται το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα και με τι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα ;

Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων θεωρήσουμε δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, στην αρχή και στο τέλος, με συχνότητα μηδέν και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων, σχηματίζεται το λεγόμενο πολύγωνο συχνοτήτων. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος του δείγματος ν.

Όμοια το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων με εμβαδόν ίσο με 1.

62. Ποιες χαρακτηριστικές κατανομές συχνοτήτων γνωρίζετε;

Όταν οι παρατηρήσεις "κατανέμονται" ομοιόμορφα σε ένα διάστημα [α, β], όπως στην κατανομή (α), η κατανομή λέγεται ομοιόμορφη. Όταν οι παρατηρήσεις δεν είναι συμμετρικά κατανεμημένες, η κατανομή λέγεται ασύμμετρη με θετική ασυμμετρία όπως στην κατανομή (γ) ή αρνητική ασυμμετρία όπως στην κατανομή (δ). Η κατανομή (β) λέγεται κανονική κατανομή και έχει κωνοειδή μορφή.



(α) (β) (γ) (δ)

63. Τι ονομάζουμε μέτρα θέσης και τι μέτρα διασποράς;

Για να ορίσουμε δηλαδή κάποια μέτρα (αριθμητικά μεγέθη), που να μας δίνουν α) τη θέση του "κέντρου" των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα και β) τη διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το "κέντρο" τους. Τα πρώτα τα καλούμε μέτρα θέσης της κατανομής, ενώ τα δεύτερα μέτρα διασποράς ή μέτρα μεταβλητότητας.

64. Τι ονομάζουμε μέτρα ασυμμετρίας;

Ο προσδιορισμός κάποιων άλλων μέτρων, που καθορίζουν τη μορφή της κατανομής κατά πόσο δηλαδή η αντίστοιχη καμπύλη συχνοτήτων είναι συμμετρική ή όχι ως προς την ευθεία $x = x_0$, για δεδομένο σημείο

x_0 του άξονα $0x$. Τα μέτρα αυτά, που συνήθως εκφράζονται σε συνάρτηση με τα μέτρα θέσης και διασποράς, καλούνται μέτρα ασυμμετρίας

65. Ποια είναι τα πιο συνηθισμένα μέτρα θέσης;

Ο αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή, η διάμεσος και η κορυφή ή επικρατούσα τιμή.

66. Πως ορίζεται η μέση τιμή ενός συνόλου ν παρατηρήσεων;

Η μέση τιμή ενός συνόλου ν παρατηρήσεων ορίζεται ως το άθροισμα των παρατηρήσεων διά του πλήθους των παρατηρήσεων. Δηλαδή $\bar{x} = \dfrac{t_1 + t_2 + ... + t_\nu}{\nu} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$

67. Να γράψετε τους τύπους υπολογισμού της μέσης τιμής.

Όταν σε ένα δείγμα μεγέθους ν οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ είναι $t_1, t_2, ..., t_\nu$, τότε η μέση τιμή συμβολίζεται με $\bar{x}$ και δίνεται από τη σχέση: $\bar{x} = \dfrac{t_1 + t_2 + ... + t_\nu}{\nu} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$. Σε μια κατανομή συχνοτήτων, αν $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ είναι οι τιμές της μεταβλητής Χ με συχνότητες $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\kappa$ αντίστοιχα, η μέση τιμή ορίζεται ισοδύναμα από τη σχέση: $\bar{x} = \dfrac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + ... + x_\kappa\nu_\kappa}{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i}{\sum_{i=1}^{\kappa} \nu_i} = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i$

Η παραπάνω σχέση ισοδύναμα γράφεται: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \dfrac{\nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$ όπου f_i οι σχετικές συχνότητες.

68. Πως υπολογίζουμε τον σταθμισμένο αριθμητικό μέσο ή σταθμικό μέσο

Εάν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, ..., x_\nu$ δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, ..., w_\nu$, τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + ... + w_\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}.$$

69. Τι ονομάζεται διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά;

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

70. Ποιο μέτρο θέσης επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις η μέση τιμή ή η διάμεσος.

Η μέση τιμή επηρεάζεται ενώ η διάμεσος δεν επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις.

Σημαντική παρατήρηση

Η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο παρατηρήσεων σε δύο ίσα μέρη όταν οι παρατηρήσεις αυτές τοποθετηθούν με σειρά τάξης μεγέθους. Ακριβέστερα, η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

71. Το ονομάζονται μέτρα διασποράς; Ποια είναι τα σπουδαιότερα;

Παράλληλα λοιπόν με τα μέτρα θέσης κρίνεται απαραίτητη και η εξέταση κάποιων μέτρων διασποράς ή μεταβλητότητας, δηλαδή μέτρων που εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης. Τέτοια μέτρα λέγονται μέτρα διασποράς. Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς είναι το εύρος, η ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

72. Τι ονομάζετε εύρος ή κύμανση;

Το απλούστερο από τα μέτρα διασποράς είναι το εύρος ή κύμανση (R), που ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση, δηλαδή:

Εύρος $R =$ Μεγαλύτερη παρατήρηση-Μικρότερη παρατήρηση

73. Το εύρος είναι αξιόπιστο μέτρο διασποράς;

Το εύρος είναι ένα αρκετά απλό μέτρο, που υπολογίζεται εύκολα δε θεωρείται όμως αξιόπιστο μέτρο διασποράς, γιατί βασίζεται μόνο στις δυο ακραίες παρατηρήσεις.

74. Πως ορίζεται η διακύμανση ή διασπορά των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ μιας μεταβλητής Χ

Ορίζεται ως ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των t_i από τη μέση τιμή τους $\bar{x}$. Το μέτρο διασποράς αυτό καλείται διακύμανση ή διασπορά και ορίζεται από τη σχέση $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2$.

75. Πως ορίζεται η διακύμανση σε πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα

Όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα, η διακύμανση ορίζεται από τη σχέση:

$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2 \nu_i$ όπου $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ οι τιμές της μεταβλητής (ή τα κέντρα των κλάσεων) με αντίστοιχες συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$.

76. Τι ονομάζεται τυπική απόκλιση;

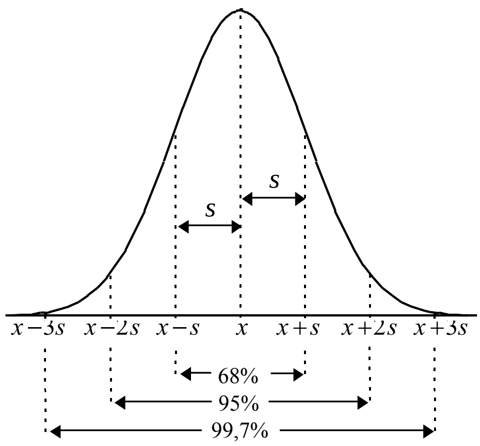
Η θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, λέγεται τυπική απόκλιση, συμβολίζεται με s και δίνεται από τη σχέση: $s = \sqrt{s^2}$.

77. Με τι εκφράζετε η τυπική απόκλιση;

Εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού.

78. Τι γνωρίζετε για την κανονική κατανομή;

Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική ή περίπου κανονική, τότε η τυπική απόκλιση s έχει τις παρακάτω ιδιότητες:



i) το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s,\ \bar{x}+s)$

ii) το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-2s,\ \bar{x}+2s)$

iii) το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-3s,\ \bar{x}+3s)$

iv) το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$.

79. Πως ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας

Ορίζεται από το λόγο:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} \cdot 100\% = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Αν η μέση τιμή $\bar{x} < 0$ τότε $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$.

80. Πότε ένα δείγμα είναι ομοιογενές

Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10%. Δηλαδή $CV \le 10\%$.

81. Πως συγκρίνεται η ομοιογένεια δύο δειγμάτων *Α, Β*;

Συγκρίνουμε τους συντελεστές μεταβολής των *Α, Β*. Μεγαλύτερη ομοιογένεια έχει εκείνο το δείγμα με μικρότερο συντελεστή μεταβολή.

Ερωτήσεις Θεωρίας

Πιθανότητες

82. Ποιο πείραμα ονομάζουμε αιτιοκρατικό;

Κάθε πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται αιτιοκρατικό πείραμα.

83. Τι ονομάζουμε πείραμα τύχης; Δώστε μερικά παραδείγματα.

Ονομάζουμε τα πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες

Μερικά πειράματα τύχης είναι τα εξής:

1. Ρίχνεται ένα νόμισμα και καταγράφεται η άνω όψη του.
2. Ρίχνεται ένα ζάρι και καταγράφεται η ένδειξη της άνω έδρας του.
3. Διαλέγεται αυθαίρετα μια οικογένεια με δύο παιδιά και εξετάζεται ως προς το φύλο των παιδιών και τη σειρά γέννησής τους.
4. Ρίχνεται ένα νόμισμα ώσπου να φέρουμε "γράμματα" αλλά όχι περισσότερο από τρεις φορές.
5. Επιλέγεται τυχαία μια τηλεφωνική συνδιάλεξη και καταγράφεται η διάρκειά της.
6. Γίνεται η κλήρωση του ΛΟΤΤΟ και καταγράφεται το αποτέλεσμα.
7. Την παραμονή του Πάσχα, στις 5 μ.μ., μετράται το μήκος της ουράς των αυτοκινήτων στα πρώτα διόδια της Εθνικής οδού Αθηνών-Λαμίας.
8. Επιλέγεται τυχαία μια μέρα της εβδομάδος και μετράται ο αριθμός των τηλεθεατών που παρακολούθησαν το απογευματινό δελτίο ειδήσεων στην ΕΤ1.
9. Επιλέγεται τυχαία μια ραδιενεργός πηγή και καταγράφεται ο αριθμός των εκπεμπόμενων σωματιδίων σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

84. Τι ονομάζεται δειγματικός χώρος και πως συμβολίζεται;

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται δειγματικός χώρος και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω. Αν δηλαδή $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa\}$.

85. Τι ονομάζεται ενδεχόμενο ή γεγονός;

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται ενδεχόμενο ή γεγονός.

86. Τι ονομάζεται απλό και τι σύνθετο ενδεχόμενο;

Ένα ενδεχόμενο λέγεται απλό όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και σύνθετο αν έχει περισσότερα στοιχεία.

87. Πότε λέμε ότι ένα ενδεχόμενο πραγματοποιείται ή συμβαίνει; Τι ονομάζουμε ευνοϊκές περιπτώσεις για την πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου;

Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται ή συμβαίνει. Γι'αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και ευνοϊκές περιπτώσεις για την πραγματοποίησή του.

88. Τι ονομάζουμε βέβαιο και τι αδύνατο ενδεχόμενο;

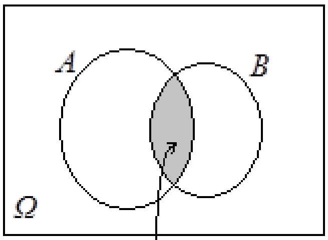
Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω. Γι' αυτό το Ω λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο. Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο $\varnothing$ που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το $\varnothing$ είναι το αδύνατο ενδεχόμενο.

89. Αν Α ένα ενδεχόμενο τι συμβολίζουμε με N(A). Με τι ισούται το πλήθος των στοιχείων του αδύνατου ενδεχομένου;

Συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου Α. Είναι $N(\varnothing\} = 0$.

90. Πότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $A \cap B$; Να παραστήσετε το $A \cap B$ σε ένα διάγραμμα του Venn.

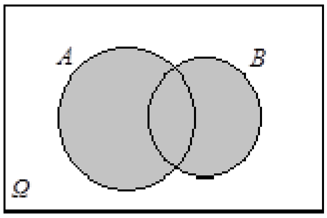
✓ Το ενδεχόμενο $A \cap B$, που διαβάζεται “Α τομή Β” ή “Α και Β” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β.



$A \cap B$

91. Πότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$; Να παραστήσετε το $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ σε ένα διάγραμμα του Venn.

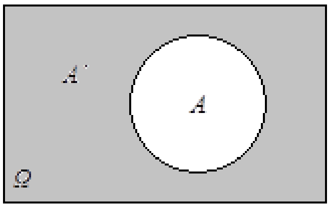
✓ Το ενδεχόμενο $A \cup B$, που διαβάζεται “Α ένωση Β” ή “Α ή Β” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.



$A \cup B$

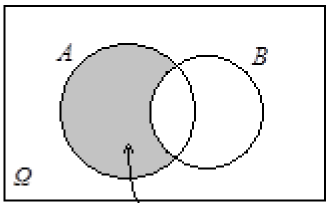
92. Πότε πραγματοποιείται το αντίθετο ενδεχόμενο A' του A ; Να παραστήσετε το A' σε ένα διάγραμμα του Venn.;

✓ Το ενδεχόμενο A', που διαβάζεται “όχι Α” ή “συμπληρωματικό του Α” και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το Α. Το A' λέγεται και “αντίθετο του Α”.



93. Πότε πραγματοποιείται η διαφορά $A-B$ του B από το A ; Να παραστήσετε το $A-B$ σε ένα διάγραμμα του Venn.

✓ Το ενδεχόμενο $A-B$, που διαβάζεται “διαφορά του Β από το Α” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β. Είναι εύκολο να δούμε ότι $A-B = A \cap B'$.



$A-B$

<u>**Σημαντική παρατήρηση**</u>

Το ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται	$\omega \in A$
Το ενδεχόμενο Α δεν πραγματοποιείται	$\omega \in A'$ (ή $\omega \notin A$)
Ένα τουλάχιστον από τα Α και Β πραγματοποιείται	$\omega \in A \cup B$

Πραγματοποιούνται αμφότερα τα A και B	$\omega \in A \cap B$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	$\omega \in (A \cup B)'$
Πραγματοποιείται μόνο το A	$\omega \in A - B$ (ή $\omega \in A \cap B'$)
Η πραγματοποίηση του Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του Β.	$A \subseteq B$

94. Πότε δύο ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα.

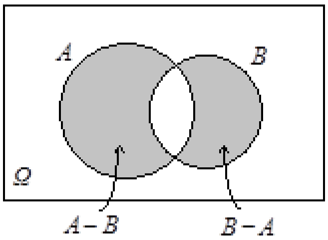
Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $\boldsymbol{A \cap B = \varnothing}$.

95. Δίνονται δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος με δειγματικό χώρο Ω. Να παρασταθούν με διαγράμματα Venn και να εκφραστούν με τη βοήθεια συνόλων τα ενδεχόμενα που ορίζονται με τις εκφράσεις:

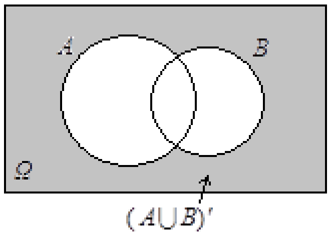
i) Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και Β.

ii) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και Β.

i) Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(A-B)\cup(B-A)$ ή ισοδύναμα το $(A\cap B')\cup(A'\cap B)$.



ii) Το ζητούμενο σύνολο είναι συμπληρωματικό του $A \cup B$, δηλαδή το $(A\cup B)'$.



96. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.

Σε ένα πείραμα σε ισοπίθανα ενδεχόμενα ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

97. Να γράψετε τις συνέπειες του κλασικού ορισμού της πιθανότητας

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

1. $P(\Omega) = \dfrac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$
2. $P(\varnothing) = \dfrac{0}{N(\Omega)} = 0$

3. Για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $0 \le P(A) \le 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.
4. Ισχύει πάντα ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας;

Για να μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας σε ένα δειγματικό χώρο με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, είναι απαραίτητο τα απλά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα.

98. Να δώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- ✓ $0 \le P(\omega_i) \le 1$
- ✓ $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_\nu) = 1$.

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$. Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\} \ne \varnothing$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + ... + P(\alpha_\kappa)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζουμε τον αριθμό $P(\varnothing) = 0$.

99. Πως προκύπτει ο κλασικός ορισμός από τον αξιωματικό ορισμό;

Αν $P(\omega_i) = \frac{1}{\nu}$, $i = 1, 2, ..., \nu$, τότε έχουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου.

<u>Σημαντική παρατήρηση</u>

Όταν έχουμε ένα δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ και χρησιμοποιούμε τη φράση "παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω", εννοούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα $P(\omega_i) = \frac{1}{\nu}$, $i = 1, 2, ..., \nu$. Επομένως χρησιμοποιούμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.

100. Να γράψετε τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων

<u>Απλός προσθετικός νόμος</u>

- ✓ Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

<u>Προσθετικός νόμος</u>

- ✓ Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

<u>Σημαντική παρατήρηση</u>

- Αν τα ενδεχόμενα *Α*, *Β* και *Γ* είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε $P(A\cup B\cup \Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)$.
- Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και A' ισχύει:

$$P(A')=1-P(A)$$

- Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$\boxed{\text{Αν } A\subseteq B \text{, τότε } P(A)\le P(B)}$$

- Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$$

Αποδείξεις

Απόδειξη 1 (Σελ 28 Σχολικό)

"Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$ ισούται με μηδέν δηλαδή $(c)'=1$".

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=c-c=0$ και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$, οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$. Άρα $\mathbf{(c)'=0}$.

Απόδειξη 2 (Σελ 28 Σχολικό)

" Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ ισούται με μονάδα δηλαδή $(x)'=1$".

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$, και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{h}{h}=1$.

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$. Άρα $\mathbf{(x)'=1}$.

Απόδειξη 3 (Σελ 28-29 Σχολικό)

" Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^2$ ισούται $2x$ δηλαδή $\left(x^2\right)'=2x$".

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Έχουμε

$f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=(2x+h)h$, και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(2x+h)h}{h}=2x+h$.

Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$. Άρα $\mathbf{(x^2)'=2x}$

Απόδειξη 4 (Σελ 29 Σχολικό)

Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-1\cdot x^{-1-1}=-x^{-2}=\frac{-1}{x^2},$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)'=(x^{-2})'=-2\cdot x^{-2-1}=-2x^{-3}=\frac{-2}{x^3}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Απόδειξη 5 (Σελ 30 Σχολικό)

“Να αποδείξετε ότι $(cf(x))' = cf'(x),\ c \in R$.”

Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$. Έχουμε,

$F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x))$, και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h)-f(x)}{h} = c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Επομένως,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = cf'(x).$$

Άρα $\quad \boldsymbol{(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)}$.

Απόδειξη 6 (Σελ 31 Σχολικό)

“Να αποδείξετε ότι $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.”

Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Έχουμε,

$$F(x+h) - F(x) = (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))$$

$$= (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)),$$

και για $h \neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Επομένως,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x).$$

Άρα $\quad \boldsymbol{(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)}$

Απόδειξη 7 (Σελ 65 Σχολικό)

“Να αποδείξετε ότι για την σχετική ιδιότητα ισχύουν οι ιδιότητες,

(i) $0 \le f_i \le 1$ **για** $i = 1,2,\ldots,\kappa$ **αφού** $0 \le v_i \le v$ **(ii)** $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$.”

i) Αφού $0 \le v_i \le v$ θα είναι $\dfrac{0}{v} \le \dfrac{v_i}{v} \le \dfrac{v}{v}$ άρα $0 \le f_i \le 1$ για $i = 1,2,\ldots,\kappa$

ii) Είναι $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = \dfrac{v_1}{v} + \dfrac{v_2}{v} + \ldots + \dfrac{v_\kappa}{v} = \dfrac{v_1 + v_2 + \ldots + v_\kappa}{v} = \dfrac{v}{v} = 1$

Απόδειξη 8 (Σελ 93 Σχολικό)

"Έστω $t_1, t_2, ..., t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1-\bar{x}, t_2-\bar{x}, ..., t_\nu-\bar{x}$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν."

Είναι,

$$\frac{(t_1-\bar{x})+(t_2-\bar{x})+...+(t_\nu-\bar{x})}{\nu}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})}{\nu}.$$

Ο αριθμός όμως αυτός είναι ίσος με μηδέν, αφού,

$$\frac{(t_1-\bar{x})+(t_2-\bar{x})+...+(t_\nu-\bar{x})}{\nu}=\frac{t_1+t_2+...+t_\nu}{\nu}-\frac{\nu\bar{x}}{\nu}=\bar{x}-\bar{x}=0$$

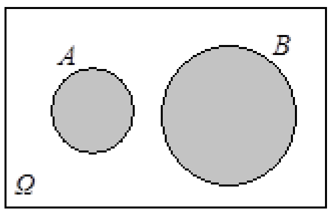
Απόδειξη 9 (Σελ 150 Σχολικό)

"Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β ισχύει $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$."

Αν $N(A)=\kappa$ και $N(B)=\lambda$, τότε το $A\cup B$ έχει $\kappa+\lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα A και B δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε $N(A\cup B)=\kappa+\lambda=N(A)+N(B)$.

Επομένως:

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}\\&=\frac{N(A)+N(B)}{N(\Omega)}\\&=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}.\\&=P(A)+P(B).\end{aligned}$$



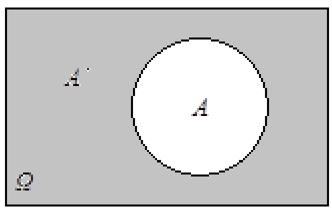
$A\cup B$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως απλός προσθετικός νόμος

Απόδειξη 10 (Σελ 151-152 Σχολικό)

"Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και A' ισχύει $P(A')=1-P(A)$."

Επειδή $A\cap A'=\varnothing$, δηλαδή τα A και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:



$$P(A\cup A')=P(A)+P(A')$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A').$$

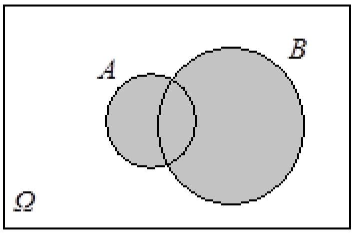
Οπότε, $P(A') = 1 - P(A)$.

<u>*Απόδειξη 11 (Σελ 152 Σχολικό)*</u>

"Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$."

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B), \quad (1)$$



$A \cup B$

αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

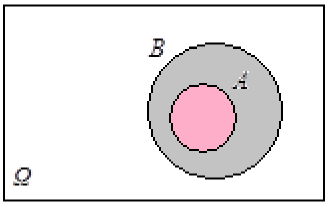
και επομένως,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).

<u>**Απόδειξη 12 (Σελ 223 Σχολικό)**</u>

"Να αποδείξετε αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \le P(B)$"



Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$$N(A) \le N(B)$$

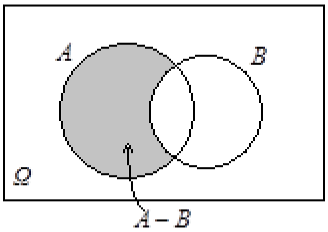
$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \le \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

$$P(A) \le P(B).$$

<u>**Απόδειξη 13 (Σελ 152 Σχολικό)**</u>

"Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$."

Επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $A\cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A-B)\cup(A\cap B)=A$, έχουμε:



$$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B).$$

Άρα $\quad P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.