4. ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

ΘΕΜΑ 1

Α. να λυθεί η εξίσωση ln(χ-1)+$\chi^2 + \chi - 6 = 0$

Β. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f,g συνεχείς στο [α,β] και παραγωγίσιμες στο (α,β) με f(χ)>0, για κάθε χϵ[α,β] και lnf(α)- lnf(β)=g(β)-g(α). Να δειχθεί ότι υπάρχει ξϵ(α,β) έτσι ώστε

$$f'(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi) = 0.$$

ΘΕΜΑ 2

1. Να λυθεί η εξίσωση $z^2 + z + 1 = 0 \; \mu\varepsilon \; z\epsilon C$

2. Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό w= $\frac{z}{z^2+z+1}$
   I. Να βρεθεί το μέτρο των w, $\frac{1}{w}$, w^8 όταν z=-1+i
   II. Αν |z|=1 , να δειχθεί ότι wϵR

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(\chi)=\begin{cases} e^{\chi} - \chi(\ln\chi - 1), & \text{αν} \quad \chi\epsilon(0,+\infty) \\ \lim\limits_{\psi\to\alpha}\left[\frac{\psi-\alpha}{2}\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi\psi}{2\alpha}\right)\right], & \text{αν } \chi = 0, (\alpha \neq 0) \end{cases}$$

   I. Να βρεθεί ο α, ώστε η f να είναι συνεχής.
   II. Αν α=-π να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ΘΕΜΑ 3.

1. Θεωρούμε τη παραγωγίσιμη συνάρτηση f:R→R, με συνεχή πρώτη παράγωγο στο R. Αν $\lim\limits_{\chi\to 0}\frac{f'(\chi)-\sqrt{\chi^2+2}}{\chi} = 2$, να δειχθεί ότι η f′ είναι παραγωγίσιμη στο 0.
2. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R^* που είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και ισχύει χf′(χ)=(χ+1)f(χ), για κάθε χϵR^* και f(1)=e, f(-1)=$\frac{1}{e}$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)$
3. Αν για τη συνάρτηση f:R→R ισχύουν τα εξής :f′′′(χ)<0, για κάθε χϵR^* και f′′(0)=0, να δειχθεί ότι το (0,f(0)) είναι σημείο καμπής του διαγράμματος της f.
4. Η συνάρτηση f:R→R, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και $g(\chi) = [f(\chi)]^2$. Αν οι συναρτήσεις παρουσιάζουν καμπή στο χ_0, τότε $f'(\chi_0) = 0$

5. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f'(\chi) + f''(\chi) = 0$, για κάθε χ∈R και $f(0) = f'(0) = 0$. Να βρεθεί ο τύπος της.
6. Θεωρούμε τη συνάρτηση f:R→R. Να βρεθεί το

$$\lim_{\chi \to 0} f(\chi)$$

και να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία, αν f(A)=(0,+∞), $\frac{f'(\chi)}{f(\chi)} = 1 + e^{\chi}, \text{για κάθε } \chi \epsilon R \text{ και } f(ln3) = 3.$

7. Δίδεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f:R→R για την οποία ισχύουν

$$f(\chi)=\chi-e^{2\chi}-1+f'(\chi) \quad \text{και } f(\chi)=\chi+\frac{1}{4}f''(\chi)$$

I. Να δειχθεί ότι $f(\chi) = e^{2\chi} + \chi$

II. $\lim_{\chi \to +\infty} f(\chi) = +\infty$

III. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της της γραφικής παράστασης της f στο (0,f(0)).

IV. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της fπαράλληλη προς τον άξονα χ΄χ

V. Να δειχθεί ότι η f΄είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο R