

## 4.ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ (ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ)

## ΘΕΜΑ 1

Θεωρούμε τις δύο φορές παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  συναρτήσεις  $f, g$  για τις οποίες ισχύει  $g(x) = f^2(x) - x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν για την συνάρτηση  $f$  ισχύει το θεώρημα του Rolle. Να δειχθούν

1. Για τη συνάρτηση  $g$  δεν ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ .
2. Υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος ώστε  $g''(x_0) = 2f(x_0)f''(x_0)$
3. Υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $g'(x_0) = -1$

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$f(x+\psi) = e^x f(\psi) + e^\psi f(x) \text{ για κάθε } x, \psi \in \mathbb{R} \text{ και } f'(0) = 2$$

- I. Να αποδείξετε ότι  $f(0) = 0$  και  $f(3x) = 3e^{2x}f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- II. Να βρείτε τα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{2x}$$

- III. Να βρεθεί η  $f'(x)$

## ΘΕΜΑ 3

A. Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τρεις φορές παραγωγίσιμη. Έστω ότι η  $f'$  είναι κυρτή και ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει σημεία καμπής. Να δείξετε ότι η  $f'$  είναι "1-1"

B. Έστω συνάρτηση  $f$  δύο φορές παραγωγίσιμη με  $f: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  και ακόμη ισχύουν  $f'(x) > 0$ ,  $f(0) = 1$  και  $f(x)f''(x) < (f'(x))^2$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ . Να δειχθεί ότι

$$f(x) \leq e^{f'(0)x}$$

## ΘΕΜΑ 4

A. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, με  $f'$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . Να δειχθεί ότι  $f'(x+1) > f(x+1) - f(x) > f'(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

B. Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για τις οποίες ισχύουν ότι  $f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  και ότι οι συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$  είναι αντιστρέψιμες.

Να αποδείξετε ότι:

- I. Οι  $f, g$  είναι αντιστρέψιμες
- II.  $f^{-1} = (g \circ f)^{-1} \circ g$

ΠΑΠΑΖΗΣ