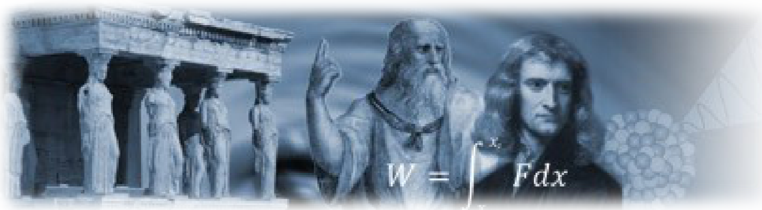
Επιμέλεια: Χατζόπουλος Μάκης
http://lisari.blogspot.com

Καθηγητής Μαθηματικών
mac190604@gmail.com



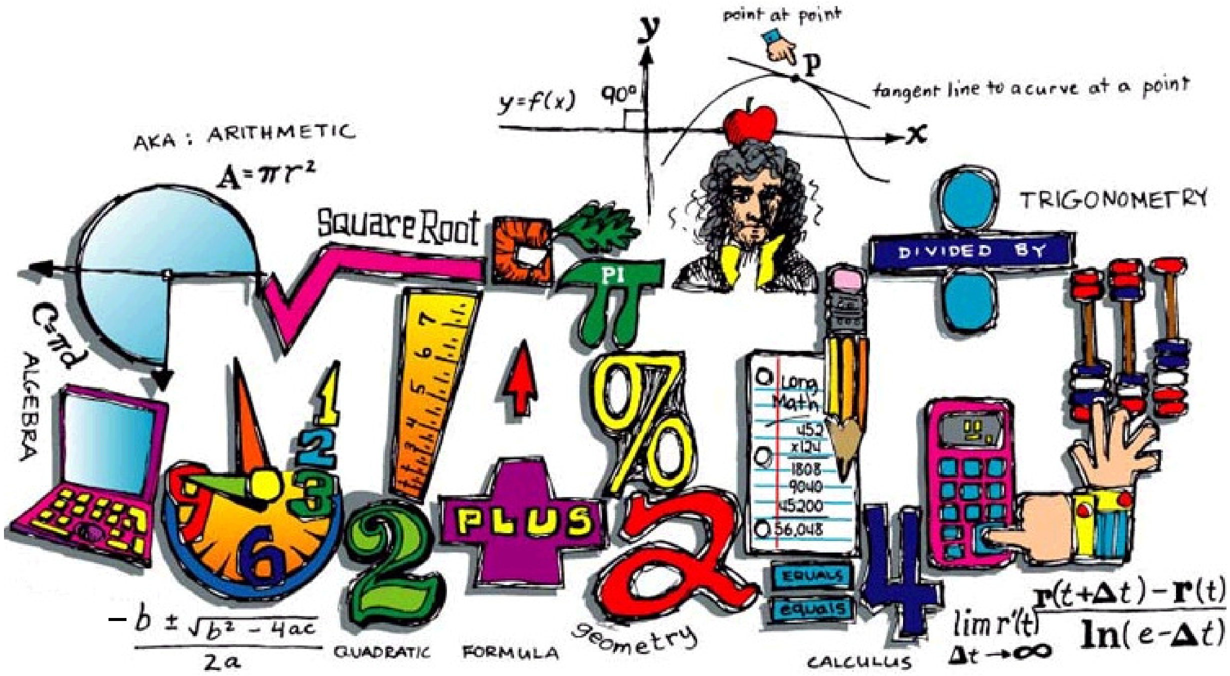
12 + 1 Βήματα στο Διαφορικό Λογισμό

Κεφάλαιο 2ο - Γ΄ Λυκείου Κατεύθυνσης

(Τελευταία ενημέρωση: 05/01/13)

- **12 + 1 Μαθήματα**
- **34 Ερωτήσεις θεωρίας**
- **176 Άλυτες ασκήσεις**
- **Μεθοδολογία ασκήσεων**
- **Κατηγορίες ασκήσεων**

Spirit of Math®



…αφιερωμένο στους μαθητές που κοπιάζουν

Ερωτήσεις - Ασκήσεις – Μεθοδολογία – Παρατηρήσεις

Κεφάλαιο 2ο – Διαφορικός Λογισμός

Μάθημα 1ο – Ορισμός παραγώγου σε σημείο

Ερώτηση 1η «Παράγωγος σε σημείο»
α) Έστω μια συνάρτηση f και x_0 σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f λέγεται **παραγωγίσιμη** στο x_0; Έχει νόημα το x_0 να **μην** ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης; Τι ονομάζουμε λόγο μεταβολής;
β) Πότε θα λέμε ότι η συνάρτηση **f δεν είναι παραγωγίσιμη** στο x_0; *(3 περιπτώσεις)*
γ) Πως **συμβολίζουμε** την παράγωγο της f στο x_0;
δ) Δώστε **ισοδύναμες εκφράσεις** και **τύπους** για την παράγωγο της f στο x_0.

Άσκηση 1η

Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{2}{x} & , \ x\neq 0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$ εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=0$.

Άσκηση 2η

Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} g(x)\eta\mu\dfrac{1}{x} & , \ x\neq 0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$ και $g'(0)=g(0)=0$. Να δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Άσκηση 3η

Αν f παραγωγίσιμη στο x_0, δείξτε ότι η $g(x)=\begin{cases} f(x) & , \ x\leq x_0 \\ f'(x_0).(x-x_0)+f(x_0) & , \ x>x_0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Άσκηση 4η

Έστω $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $x-x^2\leq f(x)\leq x+x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f(x) είναι

α) συνεχής στο $x_0=0$ και **β)** παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Άσκηση 5η

Αν για κάθε x πραγματικό αριθμό ισχύει: $f^2(x)+g^2(x)=x^6+2x^3+1$, (1) με f, g παραγωγίσιμες στο $x_0=-1$, να δείξτε ότι: **α)** $f(-1)=g(-1)=0$ **β)** $\left[f'(-1)\right]^2+\left[g'(-1)\right]^2=9$

Άσκηση 6η

Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο R και παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0=0$. Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(x)\leq g(x)$ και $f(0)=g(0)$, να αποδείξετε ότι

α) $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\leq\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ για $x>0$ **β)** $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\geq\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ για $x<0$

και γ) $f'(0)=g'(0)$

Άσκηση 7η

Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε:

α) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$ **β)** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=-f'(x_0)$

γ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=2f'(x_0)$

Ερώτηση 2η «Παράγωγος και συνέχεια»
α) Να δείξετε ότι αν η f είναι **παραγωγίσιμη** στο x_0 τότε είναι και **συνεχής** στο x_0
β) Να δείξετε ότι το αντίστροφο **<u>δεν</u>** ισχύει μέσω του παραδείγματος $f(x)=\|x\|,\ x_0=0$. Πως ονομάζεται το σημείο αυτό ; (έννοια εκτός βιβλίου)
γ) Να δείξετε ότι αν **η f <u>δεν</u> είναι συνεχής** στο x_0 τότε **η f <u>δεν</u> είναι και παραγωγίσιμη** στο x_0.
δ) **Σωστό ή Λάθος;** Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε δεν είναι και συνεχής στο x_0

<u>Άσκηση 8η</u>

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1 & ,x<0\\ x^3+x+1 & ,x\ge 0\end{cases}$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και **β)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

<u>Άσκηση 9η</u>

Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2} & ,x<0\\ \eta\mu x+\dfrac{1}{2}e^x & ,x\ge 0\end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

<u>Άσκηση 10η</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x & ,x<\pi\\ \alpha x+\beta & ,x\ge\pi\end{cases}$ με α, β πραγματικούς αριθμούς. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\pi$, βρείτε τα α, β.

Στη συνέχεια σχεδιάστε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και μέσω του σχήματος βρείτε το σύνολο τιμών και εξετάστε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f.

<u>Άσκηση 11η</u>

Αν f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-2x}{x^2}\right)=4$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) f(0) = 0 **β)** $f'(0)=2$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2\eta\mu x}{\eta\mu x}=0$ δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}$

<u>Άσκηση 12η</u>

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$2x\cdot\eta\mu x\le xf(x)\le\eta\mu^2 x+x^2$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) $f'(0)=2$

Ερώτηση 3η «Εξίσωση εφαπτομένης της C_f»
α) Τι ονομάζουμε **κλίση ή συντελεστή διεύθυνσης** της C_f στο σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$**;**
β) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 ποια είναι **η εξίσωση της εφαπτομένης** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f (για συντομογραφία γράφουμε C_f) στο σημείο αυτό;

Άσκηση 13η

Συμπληρώστε την τρίτη στήλη με σχήμα και συνθήκη

<table>
<tr><td rowspan="6">Η εφαπτομένη
της C_f
στο σημείο x_0</td><td>είναι παράλληλη
στον άξονα x'x</td><td></td></tr>
<tr><td>είναι παράλληλη
στην ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$</td><td></td></tr>
<tr><td>είναι κάθετη στην ευθεία
$(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$</td><td></td></tr>
<tr><td>σχηματίζει με τον
άξονα x' x γωνία ω</td><td></td></tr>
<tr><td>διέρχεται από το
σημείο (α, β)</td><td></td></tr>
<tr><td>είναι η
$(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$</td><td></td></tr>
<tr><td>Οι C_f, C_g
τέμνονται</td><td>στο σημείο
$A(x_0, f(x_0))$
(μπορεί να είναι και περισσότερα τα σημεία τομής)</td><td></td></tr>
<tr><td>Οι
C_f, C_g
έχουν
κοινή εφαπτομένη</td><td>σε διαφορετικά
σημεία τομής
$A\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$, $B\left(x_2, g\left(x_2\right)\right)$
αντίστοιχα</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Οι
C_f ,C_g
στο κοινό τους σημείο έχουν</td><td>εφαπτόμενες που
τέμνονται κάθετα</td><td></td></tr>
<tr><td>κοινή εφαπτομένη</td><td></td></tr>
</table>

Άσκηση 14η

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει

$$f(x) = |x-1| \cdot g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

α) Να βρεθεί η τιμή $g(1)$ και η παράγωγος της f στο $x_0 = 1$.

β) Γράψτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της *f* στο σημείο με τετμημένη 1

Άσκηση 15η

Έστω f(x) συνεχής στο $x_0 = 2$ και $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)+x^2}{x-2} = 3$, τότε,

α) Υπολογίστε το $f(2)$

β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0 = 2$

δ) Βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα x' x.

Όλες οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου στην εξίσωση εφαπτομένης

1. α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της παραβολής $y = x^2$ στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης να είναι μεταξύ τους παράλληλες.

β) Ισχύει το ίδιο για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$**;**

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A(\xi, f(\xi))$, $\xi \neq 0$ της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(-\xi, 0)$ εφάπτεται της C_f στο A.

3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3$ σε οποιοδήποτε σημείο της $M(\alpha, \alpha^3)$, $\alpha \neq 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο N εκτός του M. Στο σημείο N η κλίση της C_f είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο M.

4. Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ σε ένα σημείο της $M\left(\xi, \frac{1}{\xi}\right)$. Αν A, B είναι τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι

i) Το M είναι μέσο του AB

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του $\xi \in \mathbb{R}^*$

5. Να βρείτε τα σημεία των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων, στα οποία οι εφαπτόμενες τους είναι παράλληλες στον άξονα των x.

α) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ β) $f(x) = \frac{x}{e^x}$ γ) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

6. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}$ στο κοινό σημείο τους A(1, 1), είναι κάθετες.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η κλίση της C_f στο σημείο της A(0, 1) είναι ίση με $\frac{1}{2}$.

8. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f\left(x\right)= x^3-3x+5$ στα οποία η εφαπτομένη είναι **:**

i) Παράλληλη προς την ευθεία $y = 9x + 1$

ii) Κάθετη προς την ευθεία $y = -x$

9. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f\left(x\right)=x^2$ η οποία άγεται από το σημείο $A(0, -1)$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ για τις οποίες η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ και εφάπτεται της ευθείας $y = x$ στην αρχή των αξόνων.

11. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$ και $g(x)= x^2-x+1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο , στο οποίο οι εφαπτόμενές τους είναι κάθετες .

12. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3x - 2$ έχει , με τη γραφική παράσταση της $f\left(x\right)=x^3$ δύο κοινά σημεία και εφάπτεται αυτής σε ένα από τα σημεία αυτά .

13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f\left(x\right)=\alpha x^2+\beta x+2$ και $g\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τα οποία οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

14. Να αποδείξετε ότι **δεν** υπάρχει πολυώνυμο f δεύτερου βαθμού, του οποίου η γραφική παράσταση να εφάπτεται των ευθειών $y = x + 1$ και $y = 3x - 1$ στα σημεία $A(0, 1)$ και $B(1, 2)$ αντιστοίχως.

15. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f\left(x\right)=\eta\mu 2x-2\eta\mu^2 x$, $x \in [0, 2\pi]$, στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα των x.

16. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'\left(1\right)=1$ και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα $g\left(x\right)=f\left(x^2+x+1\right)-1$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(1, f\left(1\right)\right)$ εφάπτεται της C_g στο $B(0, g(0))$.

17. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$, για την οποία ισχύει

$$f\left(\eta\mu x\right)=e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\,(\eta\mu x) \text{ για κάθε } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

i) Να βρείτε την $f'\left(0\right)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(0, f\left(0\right)\right)$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

Μάθημα 2ο – Παραγωγίσιμες συναρτήσεις

Ερώτηση 4η «Παράγωγος σε διάστημα»
α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ;
β) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β);
γ) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];
Ερώτηση 5η « Παράγωγος, πρώτη, δεύτερη, ν – οστή»
α) Τι ονομάζουμε πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f; Ορίστε και εξηγήστε τι σχέση που έχει με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f;
β) Πως ορίζουμε και συμβολίζουμε τη δεύτερη, τρίτη και ν – οστή παράγωγος της συνάρτησης f ;
Ερώτηση 6η «Παράγωγος βασικών συναρτήσεων» α) Συμπληρώστε τον πίνακα

Συνάρτηση		**Πρώτη παράγωγος**	
Τύπος	Πεδίο ορισμού	Τύπος	Πεδίο ορισμού
c			
x			
$x^{\nu},\ \nu \in \mathbb{N},\ \nu > 1$			
$\sqrt{x}$			
$\eta\mu x$			
$\sigma\upsilon\nu x$			
e^{x}			
$\ln x$			

β) Να αποδείξετε τις πρώτες τέσσερις περιπτώσεις.

Άσκηση 16η
Να παραγωγίσετε κατάλληλα τις παρακάτω συναρτήσεις και να συμπληρώσετε τα αποτελέσματα στα κενά,

$(5)' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $(\ln 2)' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\left(\eta\mu \frac{3\pi}{4}\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\left(\sigma\upsilon\nu 1^{0}\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(x^{2}\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\left(x^{11}\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Βασική Άσκηση 17η

α) Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1$ *(χωρίς τον κανόνα του De l' Hospital)*

γ) Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} = 2$ *(χωρίς τον κανόνα του De l' Hospital)*

β) Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$ *(χωρίς τον κανόνα του De l' Hospital)*

Άσκηση 18η

Να ορίσετε την παράγωγο της f όπου υπάρχει, στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x)=\begin{cases} x^3 & ,x<0 \\ ημx & ,x\geq 0 \end{cases}$ β) $f(x)=\begin{cases} e^x & ,x\leq 0 \\ \ln x & ,x>0 \end{cases}$ γ) $f(x)=\begin{cases} e^x & ,x\leq 0 \\ \ln x & ,x\geq 1 \end{cases}$

Άσκηση 19η

Έστω συνάρτηση f μια πολυωνυμική συνάρτηση ν – οστού βαθμού (ν > 2). Βρείτε τον βαθμό των πολυωνυμικών συναρτήσεων $f', f'', f^{(\nu)}, f^{(\nu+1)}$

Άσκηση 20η

Βρείτε την ν – οστή παράγωγος των συναρτήσεων , $f(x)=e^x$, $g(x)=ημx$ και $h(x)=συνx$

Άσκηση 21η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x<1 \\ x^3 & ,x\geq 1 \end{cases}$ βρείτε την δεύτερη παράγωγο της συνάρτηση f όπου ορίζεται.

Μάθημα 3ο – Κανόνες παραγώγισης

Ερώτηση 7η «Κανόνες παραγώγισης»
α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο πεδίο ορισμού τους

Συνάρτηση		**Πρώτη παράγωγος**	
Τύπος	Πεδίο ορισμού	Τύπος	Πεδίο ορισμού
$f+g$			
$f-g$			
$\lambda \cdot f$			
$f \cdot g$			
$\frac{f}{g}$			
$x^{\nu},\ \nu \in \mathbb{Z}-\{0,1\}$			
εφx			
σφx			

β) Να αποδείξετε τις περιπτώσεις 1, 4, 6, 7, 8 από τον προηγούμενο πίνακα

Ερώτηση 8η «Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης»
α) Πως βρίσκουμε την παράγωγο της σύνθεσης $f \circ g$ δύο συναρτήσεων f και g ; Ποιος είναι ο κανόνας της αλυσίδας;
β) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα, όπου h είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση

Συνάρτηση		**Πρώτη παράγωγος**
Τύπος σύνθεσης	Να γραφτεί ως σύνθεση δύο συναρτήσεων	Τύπος
$h(x)^{\nu}$		
$\sqrt{h(x)}$		
$\eta\mu h(x)$		
$\sigma\upsilon\nu h(x)$		
$e^{h(x)}$		
$\ln h(x)$		
$\varepsilon\varphi h(x)$		

$\sigma\varphi h(x)$		
$x^{\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$		
$\alpha^{x},\ \alpha>0$		
$\ln\lvert x\rvert$		

β) Να αποδείξετε τις τρεις τελευταίες περιπτώσεις του πίνακα.

Άσκηση 22η

(Α) Βρείτε την παράγωγο ξεχωριστά των παρακάτω συναρτήσεων σε διαστήματα που ορίζονται,
$(2x-3)^5, \sqrt{e^x+1}, \eta\mu\left(x^2+x\right), \sigma\upsilon\nu(-x+3), e^{2x}, \ln(\eta\mu x), \varepsilon\varphi(\sigma\varphi x), \eta\mu^n x, \sigma\upsilon\nu^n x$,όπου n φυσικός αριθμός (n >1)

(Β) Βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων για παραγωγίσιμες συναρτήσεις και σε διαστήματα που ορίζονται,
$f(\ln x),\ g(2x+3),\ f\left(x^2+x+1\right), f(-x)$

Άσκηση 23η

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, να αποδείξετε ότι:
α) Αν η f είναι άρτια συνάρτηση τότε η f' είναι περιττή
β) Αν η f είναι περιττή συνάρτηση τότε η f'είναι άρτια
γ) Αν η f είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο T > 0, τότε και η f' είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο T.

Άσκηση 24η

Παραγωγίστε τις συναρτήσεις $(\eta\mu f(x))^{\nu}$ και $(\sigma\upsilon\nu f(x))^{\nu}$,όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R.

Άσκηση 25η

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων όπου ορίζονται,
α) $m(x)=\sqrt[5]{x^3}$ β) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ γ) $g(x)=x^x,\ \ x>0$ δ) $h(x)=(\ln x)^x,\ \ x>1$ ε) $k(x)=2^{5x-3}$

Άσκηση 26η

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(\ln x)=x\cdot\ln x-x$, για κάθε x > 0
α) Να βρείτε το $f(0)$ και $f(1)$
β) Να δείξετε ότι: $f'(0)=0$ και $f'(1)=e$
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στα σημεία με τετμημένη 0 και 1.
δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Άσκηση 27η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu^2 x,\ \ x\in\mathbb{R}$
α) Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f.
β) Να αποδείξετε ότι: $f''(x)+4f(x)=2$

Άσκηση 28η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\lambda x},\ x\in\mathbb{R}$ όπου λ ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός.
α) Βρείτε την πρώτη, δεύτερη και τρίτη παράγωγο της f

β) Βρείτε την ν – οστή (ν > 3) παράγωγο της συνάρτησης f

Άσκηση 29η

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}\cdot f(x)$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Να βρείτε την δεύτερη παράγωγος της f συναρτήσει της f.

γ) Να αποδείξετε ότι $\left(1+x^2\right)\cdot f''(x)+x\cdot f'(x)=4f(x)$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άσκηση 30η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & ,x<0 \\ x^3+x+1 & ,x\ge 0 \end{cases}$, βρείτε την παράγωγο της f

α) Στο διάστημα $(-\infty,0)$ **β)** Στο διάστημα $(0,+\infty)$

γ) Στο $x_0=0$ **δ)** Ορίστε την συνάρτηση f'

Άσκηση 31η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{2}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$

Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f για κάθε x πραγματικό αριθμό.

Άσκηση 32η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2} & ,x<0 \\ \eta\mu x+\dfrac{1}{2}e^x & ,x\ge 0 \end{cases}$ βρείτε την παράγωγο της συνάρτηση f όπου ορίζεται.

Άσκηση 33η

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}\cdot\eta\mu x,\quad x\ge 0$

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,+\infty)$

β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,+\infty)$

γ) Ορίστε την συνάρτηση f' και εξετάστε αν είναι συνεχής στο διάστημα $[0,+\infty)$

Μάθημα 4ο –Ρυθμός μεταβολής

Ερώτηση 9η «Ορισμός»
α) Έστω δύο μεταβλητά μεγέθη x, y τα οποία συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$. Τι λέγεται **ρυθμός μεταβολής** του y ως προς x, όταν $x = x_0$;
β) Το πρόσημο του $f'(x_0)$ τι μας καθορίζει για το μέγεθος; Πότε αυξάνεται, μειώνεται ή μένει σταθερό;
γ) **Σωστό ή Λάθος;** Ο ρυθμός μεταβολής $f'(x_0)$ παριστάνει την ταχύτητα με την οποία αυξάνεται ή μειώνεται το μέγεθος f (x), όταν $x = x_0$

Βασική Άσκηση 34η
Γράψτε τους βασικούς τύπους

Μαθηματική έννοια	**Τύπος - σχέση**
Εμβαδόν σφαίρας	
Όγκος σφαίρας	
Όγκος κυλίνδρου	
Όγκος κώνου	
Ρυθμός μεταβολής διαστήματος ως προς τον χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0	
Ρυθμός μεταβολής ταχύτητας ως προς τον χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0	
Οριακό κόστος στο x_0	
Οριακή είσπραξη στο x_0	
Οριακό κέρδος στο x_0	
Όταν ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά με ταχύτητα U, τότε σε χρόνο t διανύει διάστημα s	

Άσκηση 35η
Δίνεται η ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 10m του οποίου τα άκρα Α και Β ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy ,Ox αντίστοιχα . Το σημείο Β κινείται με σταθερή ταχύτητα U=2m/sec και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από τη συνάρτηση s (t) = U (t) ,όπου t ο χρόνος σε sec, $0 \le t \le 5$. Να βρεθεί:

1. Το εμβαδόν Ε(t) του τριγώνου ΑΟΒ ως συνάρτηση του χρόνου.
2. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε(t) τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος ΟΑ είναι 6m

Σημείωση: Τον ρυθμό μεταβολής καθώς και τα προβλήματα που ακολουθούν στις παρακάτω παραγράφους θα παρουσιαστούν σε ξεχωριστό ένθετο. Επίσης με τις ασκήσεις του βιβλίου θεωρούμε ότι είμαστε πλήρεις και δεν χρειάζονται άλλες ασκήσεις εκτός σχολικού βιβλίου.

Μάθημα 5ο – Θεώρημα του Rolle

Ερώτηση 10η «Θεώρημα του Rolle»
α) Να διατυπώσετε το **θεώρημα του Rolle** και να γράψετε όλα τα ισοδύναμα συμπεράσματα του θεωρήματος.
β) Να δοθεί **γεωμετρική ερμηνεία** του θεωρήματος Rolle.
γ) Το **αντίστροφο** του θεωρήματος ισχύει; Να δοθεί παράδειγμα και ένα σχήμα που να το αποδεικνύει.

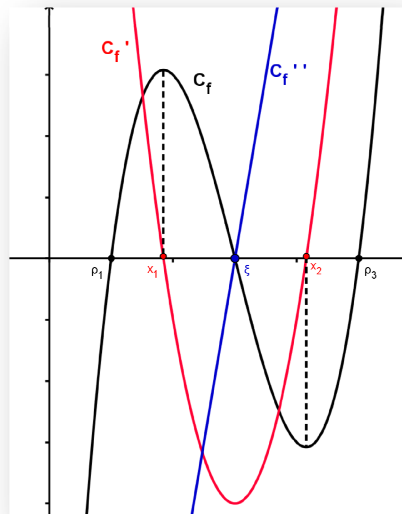
Βασικό θέμα 36η

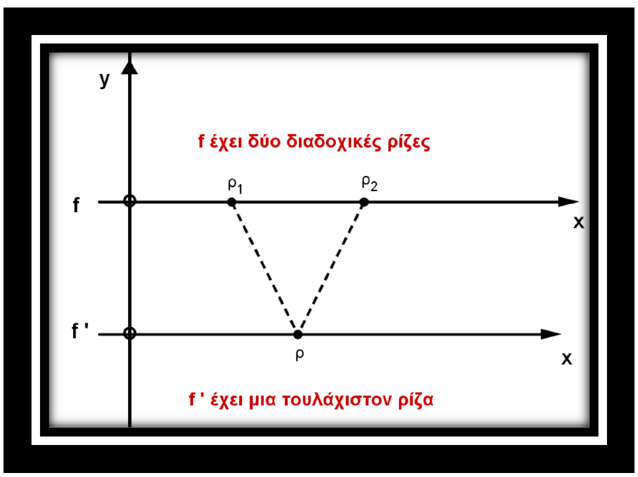
Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, τότε:

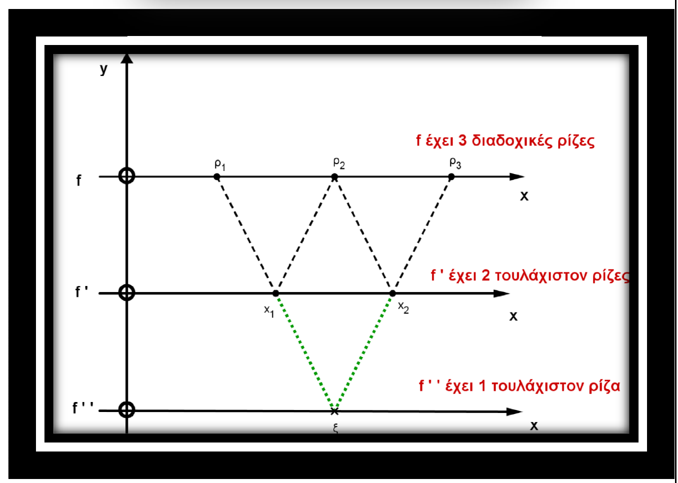
α) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f'

β) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' υπάρχει μια το πολύ ρίζα της f.

γ) Ερμηνεύεστε και σχολιάσετε τα παρακάτω σχήματα







Βασικό θέμα 37η

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο Rκαι ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» συνάρτηση.

Άσκηση 38η

Να εξεταστεί αν για τις παρακάτω συναρτήσεις ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Στις περιπτώσεις που ισχύει, να υπολογισθούν τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

a) $f(x)=\sqrt{1-x^2}\quad x\in[-1,1]$

b) $f(x)=x^3\quad x\in[-2,1]$

c) $f(x)=|x|\quad x\in[-2,2]$

d) $f(x)=\begin{cases}-x+2, & -1\le x\le 0\\ 3x, & 0<x\le 1\end{cases},\quad x\in[-1,1]$

Άσκηση 39η

Να βρεθούν οι α, β, γ $\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση *f* με $f(x)=\begin{cases}x^2+\alpha x+\beta & x\le 0\\ e^{2x}+\gamma x+1 & x>0\end{cases}$ να ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο [-1,2]

Άσκηση 40η

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\Re$ με $f(x)>0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ώστε: $\ln\left(\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}\right)=\beta-\alpha$

Να δειχτεί ότι:

α) Η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}f(x)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο [α, β]

β) Υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε: $f'(x_o)=f(x_o)$

Άσκηση 41η

Έστω συνεχείς συναρτήσεις f, g στο [α, β] και παραγωγίσιμες στο (α, β). Αν $g(x)\neq 0$ για κάθε x∈[α, β] και $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και ισχύει, $\frac{f(\beta)}{g(\beta)}=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$ ώστε: $\frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}=\frac{f(\gamma)}{g(\gamma)}$

Άσκηση 42η

Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $0<\alpha<\beta$,ώστε η ευθεία που ενώνει τα σημεία Α(α, *f*(α)) και Β(β, *f*(β)) της γραφικής παράστασης C_f να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να δείξετε ότι:

α) $\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}$

β) Αν *f* δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] με $f''(x)\neq 0$, $x\in[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχει ακριβώς μια ευθεία ε που εφάπτεται της C_f και η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων

Άσκηση 43η

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(0)=g(1)=0$. Να δείξετε ότι:

a) Για την συνάρτηση $h(x)=g(x)e^{-f(x)}$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο [0, 1]

b) Υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε $g'(x_o)=g(x_o)f'(x_o)$

Άσκηση 44η

Έστω οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο κλειστό [α, β] και παραγωγίσιμες στο (α, β), ώστε $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$

a) Να δείξετε ότι: $g(\alpha)\neq g(\beta)$

b) Να βρεθεί ο $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $F(x)=f(x)-kg(x)$ να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [α, β]

c) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει: $\frac{f'(x_o)}{g'(x_o)}=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}$

Ερώτηση 11η « Αντιπαραγώγιση»
α) Τι ονομάζουμε **αντιπαραγώγιση**; (Σημείωση: Δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο με αυτό τον όρο, αλλά με τον όρο αρχική ή παράγουσα)
β) Πως το θεώρημα του Rolle μπορεί να μας αποδείξει ότι μια **εξίσωση** έχει **μια τουλάχιστον ρίζα** (χωρίς να ισχύει κατ' ανάγκη το θεώρημα Bolzano);

Άσκηση 45η
Συμπληρώστε το παρακάτω πίνακα με τις βασικές συναρτήσεις που μας δίνουν την αντιπαραγώγιση

Συνάρτηση	**Αντιπαραγώγιση**
0	
1	
c	
x^{ν}	
$\eta\mu x$	
$\sigma\upsilon\nu x$	
$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	
$\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	
e^x	
$\frac{1}{x}$	
$f^{\nu}(x)\cdot f'(x)$	
$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	
$e^{f(x)}\cdot f'(x)$	
$\alpha^{f(x)}\cdot f'(x)$	
$\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$	
$\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$	
$\dfrac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$	
$\dfrac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}$	
$f'(x)+g'(x)$	
$f'(x)-g'(x)$	
$\lambda\cdot f'(x)$	
$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$	
$\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$	

Άσκηση 46η
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3\lambda x^2+2x-(\lambda+1)=0,\quad \lambda\in\mathbb{R}^*$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).
Άσκηση 47η
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3-4x+1=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1)

Άσκηση 48η
Να δείξετε ότι η εξίσωση $3\alpha x^2+2\beta x-(\alpha+\beta)=0$ με α, β πραγματικούς αριθμούς, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1)

Άσκηση 49η
Να δείξετε ότι η εξίσωση $1+x=e^{\frac{1-x}{1+x}}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1)

[**Υπόδειξη:** Με την βοήθεια αντιπαραγώγισης έχουμε: $\ln(1+x)+\dfrac{x-1}{1+x}=0\Leftrightarrow(x-1)'\cdot\ln(1+x)+(x-1)\cdot(\ln(1+x))'=0$]

Ερώτηση 12η «Το πολύ μια ρίζα»
α) Πως αποδεικνύουμε με τη βοήθεια του θεωρήματος του Rolle, ότι μια εξίσωση f (x) = 0 έχει **το πολύ μια ρίζα** σε ένα διάστημα (α, β);
β) Γενίκευση: Όταν έχουμε να δείξουμε για ***κ*** **το πολύ ρίζες;**

Άσκηση 50η

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 12x + a = 0,\ a \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα (-2 , 2).

Άσκηση 51η

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = x^3 + x - 2011$. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x’ x το πολύ σε ένα σημείο.

Άσκηση 52η

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = e^x$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$, έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.

Ερώτηση 13η «Ακριβώς μια ρίζα»
Γράψτε όλους τους τρόπους που αποδεικνύουμε μια εξίσωση f (x) = 0 έχει **μια ακριβώς ρίζα** σε ένα διάστημα (α, β)

Άσκηση 53η (Rolle – προφανής λύση)

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + x + \ln x = 2$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, +\infty)$

Άσκηση 54η (Rolle – Bolzano)

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5 + \alpha x^3 + 2\eta\mu x + \beta = 0$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 0$ και $-2 < \beta < 0$. Να αποδείξετε ότι έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Άσκηση 55η (Δύο ακριβώς ρίζες) – (Σπάσιμο διαστημάτων – Bolzano – Rolle – άτοπο)

Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ τότε να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς λύσεις στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

Άσκηση 56η (Γενική άσκηση) – (Rolle – ενδιαμέσων τιμών – Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο [1, 7] και ισχύει $f(1) + f(3) = f(4) + f(7)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 7)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

***Σημείωση**: Υπάρχει ξεχωριστό ένθετο με θεωρία, μεθοδολογία και ασκήσεις για το **Θεώρημα του Rolle**. Για πλήρη κάλυψη της κατηγορία αυτής, προτείνετε η ταυτόχρονη μελέτη και των δύο φυλλαδίων.*

Μάθημα 6ο – Θεώρημα μέσης τιμής (Θ.Μ.Τ)

Ερώτηση 14η «Το θεώρημα μέσης τιμής»
α) Διατυπώστε το θεώρημα μέσης τιμής (συντομογραφικά αναφέρεται Θ.Μ.Τ) *(**Σημείωση**: Στην βιβλιογραφία αναφέρεται και ως Θεώρημα Langrange)*
β) Δώστε την **γεωμετρική ερμηνεία** του θεωρήματος
γ) Τι σχέση έχει το Θ.Μ.Τ με το θεώρημα του Rolle;

Άσκηση 57η
Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα [-1,1]

α) $f(x)=|x^2-x|$ β) $f(x)=\begin{cases}2x^2+x & x<0\\ x^3+x & x\geq 0\end{cases}$ γ) $f(x)=\begin{cases}4-x^3 & |x|\neq 1\\ 3 & |x|=1\end{cases}$

Άσκηση 58η
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x^2+5 & -1\leq x\leq 1\\ -x^3+4x^2-x+5 & 1<x\leq 2\end{cases}$. Να δείξετε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο [-1, 2] και στην συνέχεια να βρείτε $\xi\in(0,3)$ ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(3)-f(0)}{3}$

Άσκηση 59η
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2-3x-\alpha & 0\leq x\leq 1\\ x^2+\beta x+1 & 1<x\leq 3\end{cases}$

α) Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει το Θ.Μ.Τ στο διάστημα [0, 3].

Για α = - 1 και β = - 3,

β) Βρείτε τα $\xi\in(0,3)$ ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(3)-f(0)}{3}$

γ) Να προσδιορίσετε σημείο Μ στη γραφική παράσταση της *f* όπου η εφαπτομένη της να είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(3, 1) και Β(2,- 2).

Άσκηση 60η
Δίνεται συνάρτηση *f* συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) με *f*(α) = 2β και *f*(β) = 2α. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο (ξ, *f*(ξ)) να είναι παράλληλη στην ευθεία: $y+2x=e^2$

Ερώτηση 15η
α) Πως **συνδυάζεται** το θεώρημα μέσης τιμής (**ΘΜΤ**) με το θεώρημα **Bolzano** ή το θεώρημα **ενδιαμέσων τιμών**;
β) Όταν η άσκηση αναφέρεται για **δύο σημεία x_1 και x_2** τέτοια ώστε τα $f'(x_1),f'(x_2)$ να βρίσκονται μέσα στην ζητούμενη σχέση - εξίσωση, τότε τι θα κάνουμε;

Άσκηση 61η (Θ.Μ.Τ + Bolzano)
Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, με $f(\alpha)=\alpha$ και $f(\beta)=\beta$, όπου $0<\alpha<\beta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\alpha+\beta-x_0$

β) Υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,x_0)$ και $\xi_2\in(x_0,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$

Άσκηση 62η (Θ.Μ.Τ + «σπάσιμο» διαστήματος)
Έστω συνάρτηση *f* για την οποία είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) και *f*(α) = *f*(β)

Να δείξετε ότι υπάρχουν $\chi_1, \chi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε: $f'(x_1)+f'(x_2)=0$

Άσκηση 63η (Α' Δέσμη – Εξετάσεις 2001)

Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη (α, β) με $f(\alpha)=2\beta$ και $f(\beta)=2\alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι η $f(x)=2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=4$

Άσκηση 64η (Θ.Μ.Τ + Rolle)

Έστω συνάρτηση *f* δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [1, 3]. Αν είναι $2f(2)=f(1)+f(3)$

α) Να εφαρμόσετε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα [1, 2] και [2, 3]

β) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε: $f''(x_o)=0$

Άσκηση 65η (Θ.Μ.Τ + Θ.Ε.Τ)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $x_0\in(0,1)$,ώστε $f(x_0)=\frac{1}{2}$

β) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$, ώστε $\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=2$

Ερώτηση 16η (Θεώρημα μέσης τιμής και ανισοτικές σχέσεις)

Πως μας βοηθάει το Θ.Μ.Τ για να αποδείξουμε ανισοτικές σχέσεις;

Άσκηση 66η (Θ.Μ.Τ και ανισότητες)

Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες με την βοήθεια του Θ.Μ.Τ:

α) $|\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha|\le|\beta-\alpha|$ για $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$

β) $x+1\le e^x\le xe^x+1$, $x \in \mathcal{R}$

γ) $|\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu^2y|\le|x-y|$, $x, y \in \mathcal{R}$ με $x\ne y$

δ) $e^x\le\frac{e^x-e^y}{x-y}\le e^y$,$x, y \in \mathcal{R}$ με $x\ne y$

ε) $\frac{1}{x+1}<\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)<\frac{1}{x}$, $x \in \mathcal{R}^*_+$

στ) $\nu\beta^{\nu-1}(\alpha-\beta)<a^\nu-\beta^\nu<\nu\alpha^{\nu-1}(\alpha-\beta)$ με $0<\beta<\alpha$ και $\nu>1$

ζ) $\frac{\beta-\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\le\varepsilon\phi\beta-\varepsilon\phi\alpha\le\frac{\beta-\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}$ με $0<\alpha\le\beta<\frac{\pi}{2}$

Άσκηση 67η

Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{x-1}{x}\le\ln x\le x-1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

β) $\frac{2}{3}\le\ln 3\le 2$

γ) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)=1$

Άσκηση 68η (ΘΜΤ + Β Λυκείου Άλγεβρα!!)

Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $x_1,x_2,x_3\in[\alpha,\beta]$. Αν x_1,x_2,x_3 και $f(x_1),f(x_2),f(x_3)$ αποτελούν ξεχωριστές αριθμητικές προόδους, να δείξετε ότι υπάρχει ένα $\gamma\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\gamma)=0$.

Άσκηση 69η (Ανισοτικές σχέσεις και ΘΜΤ, Rolle, Bolzano)

Έστω δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$ και $f(\gamma)<0$ για κάποιο $\gamma\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο (α,β)

β) Υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο x_0 να είναι παράλληλη στον άξονα x' x.

γ) Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi)>0$

Σημείωση: *Υπάρχει ξεχωριστό ένθετο με θεωρία, μεθοδολογία και ασκήσεις για το* ***Θεώρημα της Μέσης Τιμής****. Για πλήρη κάλυψη της κατηγορία αυτής, προτείνετε η ταυτόχρονη μελέτη και των δύο φυλλαδίων.*

Μάθημα 7ο – Σταθερή συνάρτηση

Ερώτηση 17η « Σταθερή συνάρτηση»
α) Γράψτε τον ορισμό, τις ιδιότητες και σχεδιάστε την γραφική παράσταση της σταθερής συνάρτησης
β) **Σωστό ή Λάθος;** Αν f (x) = c στο διάστημα Δ, όπου c πραγματικός αριθμός, τότε $f'(x)=0$
γ) Το αντίστροφο της πρότασης β ισχύει; **Διατυπώστε** και **αποδείξτε** το ανάλογο θεώρημα
δ) Το θεώρημα ισχύει για **ένωση διαστημάτων**; Αναφέρεται **παράδειγμα** που αποδεικνύει τον ισχυρισμό σας

Άσκηση 70η – Κατηγορία 1η: Εύρεση τύπου

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=2$ και $xf'(x)=f(x)$ για κάθε x > 0.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$

β) Να βρείτε τον τύπο της f

Άσκηση 71η

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $xf'(x)=2\cdot f(x)$ για κάθε x > 0.

α) Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=0$ για κάθε x > 0.

β) Αν $f(1)=2012$ τότε να βρείτε τον τύπο της f.

Άσκηση 72η – Κατηγορία 2η : Η ζητούμενη σχέση περιέχει μια σταθερά c

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια ώστε: $f''(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει $c\in\mathbb{R}_+$ τέτοιο ώστε $(f'(x))^2+(f(x))^2=c$.

β) Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f αν $f'(99)=f(99)=0$;

Άσκηση 73η (Βασική άσκηση – θεωρία)

Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε να δείξετε ότι υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $f(x)=c\cdot e^x$

Άσκηση 74η (Βασική άσκηση – Γενίκευση)

Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε $f'(x)=\lambda f(x)$ $\lambda\in\mathbb{R}^*$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε να δείξετε ότι υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $f(x)=c\cdot e^{-\lambda x}$

Άσκηση 75η

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(x)=\frac{-x\cdot\ln x\cdot f'(x)}{2}$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\frac{c}{(\ln x)^2}$, $c\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 76η – Εφαρμογή της βασικής άσκησης 73

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)-f'(x)=g(x)-g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $h(x)=f(x)-g(x)$ τότε:

α) Να δείξετε ότι: $h'=h$ β) Αν $f(2011)=g(2011)$ τότε να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες.

Άσκηση 77η «Άσκηση Ε.Μ.Ε.»

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(0)=2$ και ισχύουν $f(y+x)=f(y)f(x)e^{2yx}$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)=1$

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται στο πρώτο και δεύτερο τεταρτημόριο.

γ) $f'(x)=2f(x)(x+1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

δ) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{x^2+2x}}$ είναι σταθερή στο R. *(Βοηθητικό ερώτημα, μπορεί και να μην δίνεται)*

ε) Να βρεθεί ο τύπος της f.

Άσκηση 78η «Άσκηση Ε.Μ.Ε.»

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g στο R ώστε να ισχύουν οι επόμενες προϋποθέσεις:

α) $f(x)\neq 0$ και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) $f(0)=g(0)=1$

γ) $f'(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ και $g'(x)=-\dfrac{1}{f(x)}$

Αποδείξτε ότι:

1. $f(x)\cdot g(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ *(Υπόδειξη: Προσοχή το ρόλο του c στην περίπτωση αυτή παίζει το 1)*

2. Υπολογίστε τους τύπους των συναρτήσεων f, g

Άσκηση 79η (Εξετάσεις 1992 – Α Δέσμη) – Βασική άσκηση 73

Να βρεθεί συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

$$f'(x)\cdot \text{συν}x + f(x)\cdot \text{ημ}x = f(x)\cdot \text{συν}x \quad \text{και } f(0) = 1992$$

Μάθημα 8ο – Συναρτήσεις με ίσες παραγώγους $(f' = g')$

Ερώτηση 18η «Ίσες παραγώγους συναρτήσεων»
α) Υπενθυμίστε πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες.
β) Σωστό ή Λάθος: Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ τότε ισχύει $f = g \Rightarrow f' = g'$
γ) Ισχύει το **αντίστροφο** της πρότασης (β); **Διατυπώστε** και **αποδείξτε** την ανάλογη πρόταση του βιβλίου.
δ) Αν η **ζητούμενη** σχέση είναι της μορφής $A(x) = B(x)$, τότε μπορούμε να πάρουμε και τα δύο μέλη και να παραγωγίσουμε κατά μέλη ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
ε) Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι **δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g είναι ίσες**, εκτός από τον ορισμό της ισότητας των συναρτήσεων, ποιος άλλος τρόπος υπάρχει;
στ) Αν $f''(x) = g''(x)$ όπου f, g δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις και ορισμένες στο $\mathbb{R}$, τότε ποια σχέση συνδέσει τις συναρτήσεις f, g;
Σημείωση: *Διαβάστε τον πίνακα αντιπαραγωγίσεων που δόθηκε στο μάθημα 5 / σελ. 12 – 13 στο Θεώρημα του Rolle, χρειάζεται για την επίλυση των ασκήσεων !*

Άσκηση 80η « Εύρεση τύπου»

(Α) Αν $f(1) = 1$ βρείτε τον τύπο της f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f'(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$ β) $xf'(x) + f(x) = 3x^2 + 2x + 1,\ x > 0$ γ) $e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = \frac{x+1}{x},\ x > 0$

δ) $e^{-x} \cdot (f'(x) - f(x)) = \frac{e^x}{e^x + 1},\ x > 0$ ε) $f''(x) + f'(x) = 2e^x,\ x \in \mathbb{R}$ και επιπροσθέτως δίνεται $f'(1) = 2e - 1$

(Β) Βρείτε τον τύπο της f για τα υποερωτήματα (α), (β), (γ) και (δ) αν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ήταν το $\mathbf{R}^*$ (δες στην επόμενη σελίδα την άσκηση για προβληματισμό).

Άσκηση 81η (Εξετάσεις 2001)

Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f''(x) = 6x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο Α (0,3) έχει κλίση 2.

Άσκηση 82η (Εξετάσεις 2002)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1) = 0$ και $xf'(x) - 2f(x) = x$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Άσκηση 83η (Εξετάσεις 2005)

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x) = e^{x - f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και $f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$

Άσκηση 84η

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύουν $f(1) = 2,\ f'(1) = 3$ και $x^2 \cdot f''(x) - x \cdot f'(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f''(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)'$ για κάθε $x > 0$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

Άσκηση 85η (1η Δέσμη εξετάσεις 1998)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x)>0$ και $f'(x)+2xf(x)=0$ για κάθε x > 0 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο A (1, 1).

Να δείξετε ότι η f' είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και να βρείτε την συνάρτηση f.

Άσκηση για προβληματισμό

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x\cdot f'(x)-f(x)=x,\quad x\in\mathbb{R}$ με $f(1)=1$, τότε η παρακάτω λύση είναι σωστή; Δικαιολογήστε την απάντησή σας και βγάλτε τα κατάλληλα συμπεράσματα.

Αντιμετώπιση για προβληματισμό

Παίρνουμε την δεδομένη σχέση και έχουμε διαδοχικά:

$$x\cdot f'(x)-f(x)=x \Leftrightarrow \text{διαιρούμε και τα δύο μέλη με } x^2\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x\cdot f'(x)-(x)'\cdot f(x)}{x^2}=\frac{x}{x^2},\quad x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=(\ln|x|)',\quad x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=\ln|x|+c,\quad x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x)=x\ln|x|+cx,\quad x\neq 0$$

Όμως $f(1)=1\Rightarrow c=1$ άρα ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x)=x\ln|x|+x,\quad x\neq 0$

Συμφωνείτε; Στην συνέχεια λύστε την άσκηση 80 (Β) στην προηγούμενη σελίδα.

Μάθημα 9ο – Μονοτονία συνάρτησης

Ερώτηση 19η «Μονοτονία συνάρτησης»
α) Υπενθυμίστε τον ορισμό γνησίως αύξουσας, γνησίως φθίνουσας και μονοτονίας συναρτήσεων σ' ένα διάστημα Δ. Τι σχέση έχει η μονοτονία με την ένα προς ένα συνάρτηση; Τι σχέση έχει η μονοτονία με την εξίσωση f(x)=0;
β) Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Ποια **πρόταση** συνδέει τα πρόσημα της f' με την μονοτονία της f ; Να την διατυπώσετε.
γ) Να αποδείξετε την πρόταση που διατυπώσατε στο υποερώτημα (β)
δ) Η πρόταση του ερωτήματος β ισχύει για **ένωση ανοικτών διαστημάτων**; Για ένωση κλειστών διαστημάτων; Αναφέρεται παράδειγμα που να δικαιολογεί κάθε φορά τον ισχυρισμό σας. *(Δες παρακάτω τα Σωστά – Λάθος)*
ε) Εξηγήστε γιατί το **αντίστροφο** της πρότασης του β ερωτήματος δεν ισχύει αναφέροντας ένα παράδειγμα. Διατυπώστε κατάλληλα το αντίστροφο της πρότασης.

<u>Σωστό ή Λάθος; Ερωτήσεις πάνω στην θεωρία</u>

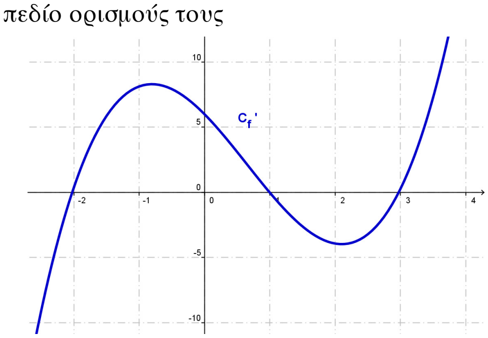
i. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα (a, b), τέτοια ώστε να είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα (a,x_0)και (x_0,b), τότε πάντα η f θα είναι γνησίως μονότονη (με το ίδιο είδος μονοτονίας) στην ένωση των διαστημάτων τους, δηλαδή στο $(a,x_0)\bigcup(x_0,b)$

ii. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα (a, b), τέτοια ώστε να είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα (a,x_0) και(x_0,b), επίσης **συνεχής στο σημείο** x_0 ,τότε πάντα η f θα είναι γνησίως μονότονη (με το ίδιο είδος μονοτονίας) στην ένωση των διαστημάτων τους, δηλαδή στο $(a,x_0)\bigcup(x_0,b)$

<u>Άσκηση 86η</u>
Μελετήστε ως προς την μονοτονία της παρακάτω συναρτήσεις στο πεδίο ορισμούς τους

α) $f(x)=2x^3-3x^2-12x$ **β)** $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & ,x\le 1\\ x+2 & ,x>1\end{cases}$

γ) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ **δ)** $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-2}$



<u>Άσκηση 87η</u>
Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μια συνάρτηση f. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

<u>Άσκηση 88η</u>
Δίνεται συνάρτησης f που ορίζεται στο R και η παράγωγος f' έχει τύπο $f'(x)=-7\cdot(x-1)\cdot(x+2)^2\cdot(x-3)^3$ για $x\in\mathbb{R}$. Βρείτε τη μονοτονία της f.

<u>Άσκηση 89η</u>
Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν είναι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)+x^2-1}{x-1}=1$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $f'(1)=0$ **β)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

<u>Άσκηση 90η «Μονοτονία και σύνολο τιμών»</u>
Βρείτε το σύνολο τιμών για τις παρακάτω συναρτήσεις (όπου ορίζονται)

α) $f(x)=\ln x+x^2-\dfrac{1}{x}$ **β)** $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ γ) $f(x)=\ln x-\ln(1-x)$

δ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ **ε)** $f(x)=e^{-x}-\ln x-1$ **στ)** $f(x)=x+\dfrac{1}{x-3}$

Άσκηση 91η «Μονοτονία και εξισώσεις»

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις f (x) =0 έχουν **μια ακριβώς** ρίζα στο διάστημα που δίνεται.

α) $f(x)=x^3+2x-1-\eta\mu 2x$ (0, 1) **β** $f(x)=1+\ln(1+x)-\dfrac{1}{x+1}$ γ) $f(x)=x^3+5x+1$ (-1 ,0)

Άσκηση 92η «Μονοτονία και σχέσεις»

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν χωριστά οι παρακάτω σχέσεις. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

α) $f^3(x)+f(x)=\sigma\upsilon\nu x,\;\; \gamma\iota\alpha\;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\;\; x\in[0,\pi]$ β) $2f^3(x)+6f(x)=2x^3+3x^2+x-3$

Άσκηση 93η «Μονοτονία και ανισώσεις»

Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισώσεις

α) $2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x\ge 3x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **β)** $e^x+\dfrac{x^2}{2}>x+1$, για κάθε $x>0$

γ) $\dfrac{\alpha^4}{4}-\dfrac{\alpha^3}{3}\le\dfrac{\beta^4}{4}-\dfrac{\beta^3}{3}$, για κάθε $1\le\alpha\le\beta$ **δ)** $\ln(x+1)\le\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, για κάθε $x\ge 0$

Άσκηση 94η «Μονοτονία και επίλυση ανίσωσης»

Δίνεται συνάρτηση $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=2\ln(x+1)+x^2-2x$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία **β)** Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\ge 0$

Άσκηση 95η

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+8}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Βρείτε το f (1) και στη συνέχεια λύστε την ανίσωση $\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+4\sqrt{2}}\right)>4$

Άσκηση 96η (Εξετάσεις 2006)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

β) Για κάθε x < 0 να αποδείξετε ότι: $f(5^x)+f(7^x)<f(6^x)+f(8^x)$

Άσκηση 97η

Α. Θεωρούμε συνάρτηση $f(x)=x-1-\ln x$ για $x\in[1,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

β) $x-1-\ln x>0$, για κάθε $x>1$

Β. Έστω η συνάρτηση $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο: $g(x)=\dfrac{x\ln x}{x-1}$

α) Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία

β) Αν $1<\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^{\alpha(\beta-1)}<\beta^{\beta(\alpha-1)}$

Μάθημα 10ο – Ακρότατα συνάρτησης

Ερώτηση 20η «Ορισμός τοπικών και ολικών ακροτάτων»
α) Ορίστε στον άξονα των πραγματικών αριθμών **μια περιοχή του x_0**
β) Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και $x_0 \in A$ τότε δώστε τους **ορισμούς**
1. **Ολικό μέγιστο και ελάχιστο** στο x_0 και σχήμα χωριστά
2. **Τοπικό μέγιστο και ελάχιστο** στο x_0 και σχήμα χωριστά
3. **Τοπικά ακρότατα** και θέσεις τοπικών ακροτάτων
4. **Ολικά ακρότατα** ή πιο απλά ακρότατα

Άσκηση 98η

Σωστό ή Λάθος; Δικαιολογήστε την απάντησή σας

α) Ένα τοπικό μέγιστο είναι πάντα υψηλότερα από ένα τοπικό ελάχιστο

β) Αν η f παρουσιάζει μέγιστο τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από όλα τα τοπικά μέγιστα της συνάρτησης

γ) Αν η f παρουσιάζει ελάχιστο τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από όλα τα τοπικά ελάχιστα της συνάρτησης

δ) Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης, είναι πάντα μέγιστο της συνάρτησης

ε) Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης, είναι πάντα ελάχιστο της συνάρτησης

στ) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) έχει μέγιστο και ελάχιστο (τοπικό ή ολικό)

ζ) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] έχει μέγιστο και ελάχιστο (τοπικό ή ολικό)

η) Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο ανοικτό διάστημα (α, β) τότε δεν έχει ακρότατα.

θ) Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο κλειστό διάστημα [α, β] τότε δεν έχει ακρότατα.

ι) Κάθε συνάρτηση έχει τοπικά ακρότατα

Ερώτηση 21η «Θεώρημα Fermat»
α) Διατυπώστε και αποδείξτε το **Θεώρημα Fermat**
β) Δώστε **γεωμετρική ερμηνεία** του θεωρήματος. Ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
γ) Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού και $f'(x_0) \neq 0$ τότε η f **δεν** παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 (αντιθεταντίστροφο του Θεωρήματος); Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
δ) Αν έχουμε **δεδομένο ανισότητα** και θέλουμε να αποδείξουμε ή να **καταλήξουμε σε ισότητα** ποιο θεώρημα σκεφτόμαστε; Αναφέρετε τα βήματα που ακολουθούμε
Σημείωση: *Το **Θεώρημα Fermat** «συνεργάζεται» καλά με το **Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής**, αρκεί να αποδείξουμε ότι τα ακρότατα δεν βρίσκεται στα άκρα του διαστήματος, αλλά στα εσωτερικά του σημεία.*

Κατηγορία 1: Σχέσεις που δεν έχουν ακρότατα»

Άσκηση 99η

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $2f^3(x)+6f(x)=2x^3+x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα με δύο τρόπους, α) Με μονοτονία και β) Με το Θεώρημα Fermat

Άσκηση 100η

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\left(2f'(x)-f(x)\cdot f'(x)\right)^{2012}=2x^2+x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα

Άσκηση 101η (Εξετάσεις 2001)

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x)+\beta\cdot f^2(x)+\gamma\cdot f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όπου $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα

«Κατηγορία 2: Από ανισότητες σε ισότητες»

Άσκηση 102η

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x \geq x+1$ όπου α θετικός πραγματικός αριθμός, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

Άσκηση 103η

Δίνεται α, β >0 τέτοια ώστε $\alpha^x + \beta^x \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να δείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = 1$

Άσκηση 104η

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(0)=0$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και

$f(x)+f(2x)+f(3x) \geq 4\eta\mu(3x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $f'(0)=2$

Άσκηση 105η

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $x \cdot f(x) \geq \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο 1.

Άσκηση 106η

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια ώστε

$f(0)=0$ και $(f\circ f')(x) \geq (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο x = 1

α) Να δείξετε ότι: $f'(f'(1)) \cdot f''(1) = 0$

β) Υπολογίστε το $f''(1)$

Κατηγορία 3η: Εύρεση παραμέτρων με Θεώρημα Fermat

Άσκηση 107η

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$ η οποία παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι α = 1 και β =0

β) Να προσδιορίσετε το είδος των ακροτάτων της f.

Άσκηση 108η

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \alpha x^3 + \beta x + 2$ η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_1 = -1$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο (2, 4).

α) Να αποδείξετε ότι α = 1 και β = - 3.

β) Να προσδιορίσετε το είδος των ακροτάτων της f.

Άσκηση πρόκληση (δες σημείωση στην Ερώτηση 21)

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,2] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (0, 2) και ισχύει

$$f(0) > f(2) > f(1)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ ώστε $f'(x_0) = 0$

Ερώτηση 22η «Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων»
α) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μια συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ;
β) Ποια σημεία της f λέγονται κρίσιμα;

Άσκηση 109η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3 & ,0\le x<1 \\ (x-2)^2 & ,1\le x\le 3 \end{cases}$

α) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f;
β) Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.

Ερώτηση 23η «Κριτήριο τοπικών ακροτάτων»

α) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο η f είναι συνεχής. Πότε η τιμή $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f ; Να αποδείξετε τους ισχυρισμού σας.

β) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε να δείξετε ότι,

i. το $f(x_0)$ **δεν** είναι τοπικό ακρότατο και

ii. η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β). *(Θέμα θεωρίας – Προσοχή)*

Κατηγορία 1η: Εύρεση ακροτάτων

Άσκηση 110η

Μελετήστε ως προς τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις στο πεδίο ορισμούς τους:

α) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ β) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^\nu},\ \nu\in\mathbb{N}(\nu>1)$ γ) $f(x)=x\cdot\ln x$ δ) $f(x)=x^\nu\cdot\ln x,\ \nu\in\mathbb{N}(\nu>1)$

ε) $f(x)=x\cdot e^x$ στ) $f(x)=x^\nu\cdot e^x,\ \nu\in\mathbb{N}(\nu>1)$ ζ) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ η) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^\nu},\ \nu\in\mathbb{N}(\nu>1)$

θ) $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ ι) $f(x)=\dfrac{x^\nu}{e^x},\ \nu\in\mathbb{N}(\nu>1)$

Άσκηση 111η

Όμοια, μελετήστε ως προς τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις στο πεδίο ορισμούς τους:

α) $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ β) $f(x)=x^2-\ln x$ γ) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$

δ) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & ,x\le 0 \\ xe^{-x} & ,x>0 \end{cases}$ ε) $f'(x)=(1-e^x)e^{f(x)},x\in\mathbb{R}$ στ) $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$

Άσκηση 112η

Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό α και τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x^2+x)e^{-x},\ \alpha\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο τοπικά ακρότατα.

β) Αν x_1,x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f, να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$e^{x_1}\cdot f(x_1)+e^{x_2}\cdot f(x_2)\text{ είναι ανεξάρτητη του α.}$$

Άσκηση 113η

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)=e^x+e^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f.

Κατηγορία 2η: Πλήθος ριζών εξίσωσης

Άσκηση 114η

Βρείτε το πλήθος ριζών των παρακάτω εξισώσεων στα αντίστοιχα διαστήματα

α) $\eta\mu x=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$ στο $(0,\pi)$ β) $x^2=\sigma\upsilon\nu x$ στο $[-\pi,\pi]$ γ) $x^3-3x+2=0$ στο R

δ) $\ln x=x-2$ στο $(0,+\infty)$ ε) $x^3-6x^2+9x-2=0$ στο (0, 1) στ) $x^2=2e\ln x$ στο $(0,+\infty)$

Άσκηση 115η

Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=2x\ln x+x^2-4x+3$

α) Να αποδείξετε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=x\ln x$ και $h(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$ έχουν μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Άσκηση 116η (Εξετάσεις 2002)

Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συναρτήσεις ώστε η σύνθεση fog να είναι 1 – 1, να αποδείξετε ότι:

α) Η g είναι 1 – 1

β) Η εξίσωση $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)$ έχει δύο ακριβώς θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Άσκηση 117η (Εξετάσεις 2007)

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta\in\mathbb{R}$ σταθερά με $\theta\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Κατηγορία 3η: Ανισοτικές σχέσεις (Ακρότατα εργαλείο 3ο για την απόδειξη ανισοτήτων)

Άσκηση 118η

Για κάθε x > 0 να αποδείξετε τα παρακάτω:

α) $e\ln x\le x$ β) $\frac{1}{x}+\ln x\ge 1$ γ) $1+\ln x\le\frac{e}{2}x^2$

Άσκηση 119η

Έστω η συνάρτηση $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=x^x\cdot(1-x)^{1-x}$

α) Να αποδείξετε ότι: $f'(x)=f(x)\cdot\left(\ln x-\ln(1-x)\right)$ για κάθε $x\in(0,1)$

β) Αν $\alpha,\beta>0$ ώστε $\alpha+\beta=1$ να αποδείξετε ότι: $\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\ge\frac{1}{2}$

Άσκηση 120η

Έστω $f:(0,e)\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $f(1)=0$ και $f(x)=\ln\left(x\cdot f'(x)\right)$ για κάθε $x\in(0,e)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0, e).

β) Να βρείτε τον τύπο της f

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f'

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $(1-\ln x)e^\alpha=1$, με $\alpha\in\mathbb{R}$

Κατηγορία 4η: Προβλήματα στην μονοτονία και ακρότατα

Σημείωση: *Θα την μελετήσουμε αναλυτικά σε ξεχωριστό ένθετο*

Μάθημα 11 – Κυρτότητα – Σημεία καμπής

Ερώτηση 24η «Ορισμός κυρτότητας»
α) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε η f λέγεται **κυρτή** και πότε **κοίλη** στο Δ; Πως συμβολίζεται η κυρτή και η κοίλη συνάρτηση;
Σημείωση: *Σε πολλά βιβλία όταν δίνεται μια συνάρτηση **κυρτή ή κοίλη**, θεωρείται και **παραγωγίσιμη** στο εσωτερικό του διαστήματος Δ, χωρίς να τονίζεται ιδιαίτερα.*
β) Δώστε την γεωμετρική ερμηνεία ορισμού κυρτής και κοίλης συνάρτησης στο Δ.
γ) Αν η f είναι κυρτή ή κοίλη στο Δ= [α, β] **συμπληρώστε** κατάλληλα τους παρακάτω πίνακες

x	**α**	**β**
f'	$\nearrow$	
f		

x	**α**	**β**
f'	$\searrow$	
f		

δ) Μέσω **των γραφικών παραστάσεων** (σελ. 136 – 139 σχ. βιβλίο) να διαπιστώσετε ποιες βασικές συναρτήσεις είναι κυρτές και ποιες κοίλες. Τι θεωρείται η ευθεία ; Κυρτή, κοίλη και τα δύο ή τίποτα;

Βασική Άσκηση 121η

α) Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι κυρτή στο R και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, τότε να αποδείξετε ότι αυτό είναι και ολικό ελάχιστο της f.

β) Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι κοίλη στο R και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, τότε να αποδείξετε ότι αυτό είναι και ολικό μέγιστο της f.

Βασική άσκηση 122η

Έστω f κυρτή και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα Δ. Αν $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha < \beta$, να αποδειχθεί ότι:

$$f(\alpha)+f(\beta) > 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Βασική άσκηση 123η

Έστω f κοίλη και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα Δ. Αν $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha < \beta$, να αποδειχθεί ότι:

$$f(\alpha)+f(\beta) < 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Βασική άσκηση 124η

α) Έστω συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο διάστημα Δ. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ και $\alpha < \beta < \gamma$ να δείξετε ότι:

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < \frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$$

β) Διαπιστώστε ανάλογο συμπέρασμα όταν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο Δ.

Βασική άσκηση 125η

Έστω οι συναρτήσεις f, g δύο φορές παραγωγίσιμες στο R. Αν η f είναι κυρτή στο R και η g κοίλη στο R τότε να αποδείξετε ότι:

α) Οι C_f, C_g έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

β) Αν οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη σε κάποιο κοινό σημείο τους, τότε οι C_f και C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

Ερώτηση 25η «Εργαλείο εύρεσης κυρτότητας»
α) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Γράψτε ποιο **Θεώρημα** συνδέει το **πρόσημο της** f'' με την **κυρτότητα** της f ;
β) Να **διατυπώσετε** και να αποδείξετε ότι **<u>δεν</u>** ισχύει το **αντίστροφο** του παραπάνω θεωρήματος. Πως μπορούμε να το διατυπώσουμε για να ισχύει;
γ) Αν θέλουμε σε μια άσκηση να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη, ποια **πρόταση** θα χρησιμοποιούμε, τον ορισμό ή το θεώρημα; Να γίνει διάκριση περιπτώσεων.
δ) Να **συμπληρώσετε** κατάλληλα τον πίνακα για να ισχύει το **θεώρημα** που διατυπώσατε στο ερώτημα **(α).** Αν ισχύει για την πρώτη στήλη, η πρώτη γραμμή (f'') τότε προκύπτουν οι άλλες δύο ; Με ανάλογο σκεπτικό δώστε συμπεράσματα όταν ισχύει η δεύτερη ή η τρίτη γραμμή, τότε ισχύουν και οι άλλες δύο ;

x	**α**		**β**
f''	+	+	+
f'		+	-
f			

x	**α**		**β**
f''	-	-	-
f'		-	+
f			

<u>Άσκηση 126η</u>
Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία ορίζεται η συνάρτηση f, αν είναι κυρτή ή κοίλη:

i) $f(x)=x\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ ii) f(x) = $x e^{\frac{1}{x}}$ iii) f(x) = $\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$

iv) f(x) = $x e^{\frac{1}{x}}$ v) f(x) = $\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{3}{4}\cdot x^2$ vi) f(x) = $\frac{x^5}{20}-\frac{x^4}{12}-3x+1$

<u>Άσκηση 129η</u>
Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = -x^4+2\alpha x^3-6x^2+3x-1$ να είναι κοίλη στο R.

<u>Άσκηση 130η</u>
Έστω μια συνάρτηση f : R->R για την οποία ισχύει $f'(x) < \frac{f''(x)+f(x)}{2}$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)\, e^{-x}$ είναι κυρτή στο R.

<u>Άσκηση 131η</u>
Έστω μια συνάρτηση f : R→R για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x\in R$ και η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν $g(x) = \ln f(x)$ και $g''(x) > 0$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = e^{\lambda x} f(x)$ είναι κυρτή στο R, για κάθε $\lambda\in R$.

<u>Άσκηση 132η</u>
Δίνεται η συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $f(x) < x$ και $f'(x)=\frac{x}{x-f(x)}$ για κάθε x > 0.

Να δείξετε ότι:
α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

γ) Η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$

Άσκηση 133η
Έστω f μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in$ R. Αν η συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$ είναι κυρτή στο R με $g'(x) \neq 0$, $x \in$ R, να αποδειχθεί ότι και η f είναι κυρτή στο R.

Ερώτηση 26η «Σημείο Καμπής»
α) Τι εννοούμε όταν λέμε «**σημείο καμπή**» στην καθημερινή μας ζωή ; Δώστε παραδείγματα
β) Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$. Τι λέγεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f;
γ) Μέσω των γραφικών παραστάσεων βασικών συναρτήσεων, να βρείτε τα σημεία καμπής.
Σημείωση: *Για την μελέτη της κυρτότητας και σημείων καμπής, εντός ύλης είναι οι συναρτήσεις που είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες δύο τουλάχιστον φορές σε κάθε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμούς τους.*

Άσκηση 134η
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3 & ,x<1 \\ (x-2)^4 & ,x\geq 1\end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι παραγωγίζεται στο σημείο $x_0=1$
β) Βρείτε την δεύτερη παράγωγο της f ,όπου ορίζεται
γ) Βρείτε τα διαστήματα κυρτότητας και τα σημεία καμπής της συνάρτησης

Άσκηση 135η
Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της C_f ,όταν:

i) $f(x) = \sqrt{x}\ln\sqrt{x}$ ii) $f(x) = \dfrac{x^5}{20}-\dfrac{x^3}{6}$ iii) $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{x^2}{2}$, $x \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

iv) $f(x) = x\,e^{-x^2}$ v) $f(x) = x^2\ln x$ vi) $f(x) = \ln(\ln x)$

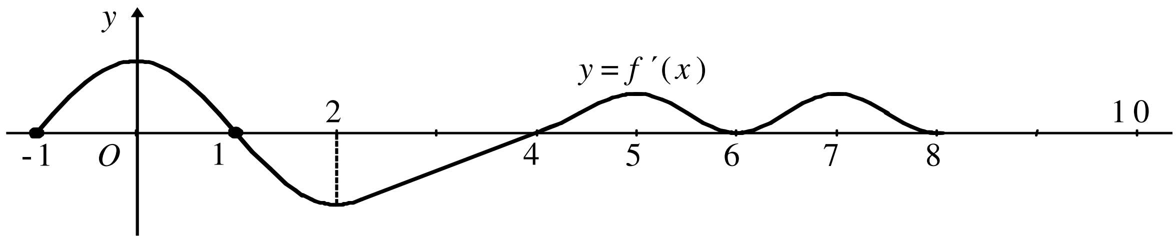
vii) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ viii) $f(x) = x^4-6x\ln x^2-12$ ix) $f(x) = \dfrac{1}{4}e^{2x}-3e^x+2$ x) $f(x) = (1+x^2)e^{-x}$

Άσκηση 136η (Εξετάσεις 2004)
Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2\ln x$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα
β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Άσκηση 137η
Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{\alpha\cdot x^3}{3}+\dfrac{(\alpha^2+1)\cdot x^2}{2}+\alpha x-2,\ \alpha\in\mathbb{R}$ δεν έχει σημεία καμπής.

Άσκηση 138η
Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha \neq 0$ και $\beta^2 = 3\alpha\gamma$ δέχεται στο σημείο καμπής της οριζόντια εφαπτομένη.

Άσκηση 139η
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1,8]$.



Μελετήστε,
Α) Την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f,
Β) Την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης f
Γ) Μπορούμε να βρούμε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f ;

Ερώτηση 27η «Ιδιότητες σημείων καμπής»
α) Αν το $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη , τότε τι ισχύει για το $f''\left(x_0\right)$;
1) Ποιο θεώρημα σας θυμίζει; 2) Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης ισχύει; Δώστε ένα παράδειγμα που να το αποδεικνύει. 3) Τι μας πληροφορεί το αντιθεταντίστροφο της παραπάνω πρότασης;
β) Ποιες είναι οι **διαφορές** τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής;
γ) Ποιες είναι οι **πιθανές θέσεις** σημείων καμπής;
δ) (**Κριτήριο σημείων καμπής**) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Πότε η f παρουσιάζει καμπή στη θέση x_0;

Άσκηση 140η (σχ. βιβλίο 5 /σελ. 279)

Έστω μια συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (- 2, 2), για την οποία ισχύει:

$$f^2\left(x\right) - 2f\left(x\right) = 3 - x^2 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής
β) Ποιος είναι ο ρόλος του διαστήματος (-2, 2) στην εκφώνηση αφού δεν χρειάζεται στην απόδειξη της άσκησης;
γ) Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f για $x \in \left(-2, 2\right)$ που έχουν την ιδιότητα (1)

[*Υπόδειξη*: $\left(f\left(x\right) - 1\right)^2 = 4 - x^2$ και διατήρηση πρόσημου...]

Άσκηση 141η

Έστω g μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $(g(x))^2 = 5g(x) - e^x - \alpha^x + 2011$ για κάθε $x \in$ R και $1 \neq \alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δεν έχει σημεία καμπής.

Άσκηση 142η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 1$, $\beta > 6$ και $\alpha, \beta, \gamma \in$ R.

Αν η f παρουσιάζει στο xo=1 καμπή και στο A(1,f(1)) η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια εφαπτομένη, να αποδείξετε ότι

α) Η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

β) Η f παρουσιάζει μοναδικό ελάχιστο

γ) $\alpha + \beta + \gamma < -2$

δ) Η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς δυο ρίζες στο R

Ερώτηση 28η «Εργαλείο 4: Κυρτότητα και εφαπτομένη»
Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη σε ένα διάστημα Δ, τότε ποια είναι η **σχετική θέση της** C_f και της **εφαπτομένης** σε κάθε σημείο x_0 του Δ; Πότε θα χρησιμοποιούμε αυτή την πρόταση;

Βασική άσκηση 143η

α) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο (α, β) *(άρα και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του διαστήματος)* και $\xi \in (\alpha,\beta)$ τότε να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$

β) Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο (α, β) *(άρα και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του διαστήματος)* και $\xi \in (\alpha,\beta)$ τότε να αποδείξετε ότι: $f(x) \leq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$

Άσκηση 144η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sqrt{x} + \beta \ln x + \beta x$.

(A) Να βρείτε τα α, β ∈R, ώστε το A(1,3) να είναι σημείο καμπής της C_f.

(B) Για α = 4 και β = -1:

a) Να βρείτε τα διαστήματα που η C_f είναι κυρτή ή κοίλη.

b) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της.

c) Να δείξετε ότι $4\sqrt{x} - \ln x \leq x + 3$ για κάθε $x \geq 1$.

Άσκηση 145η

Έστω f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f(x)-2x}{x-2}\right)=3$ και $f(3) = 4$

a) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 2$.

b) Αν η f είναι κυρτή στο R να δείξετε ότι $f(x) - 5x + 6 \geq 0$.

c) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (2,3)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο.

Άσκηση 146η

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x - \ln x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύει η σχέση: $e^x \geq (e-1)x + \ln x + 1$

Άσκηση 147η

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση *f* είναι κυρτή, ενώ η συνάρτηση g είναι κοίλη.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο A(0,1) και της C_g στο B(0,1)

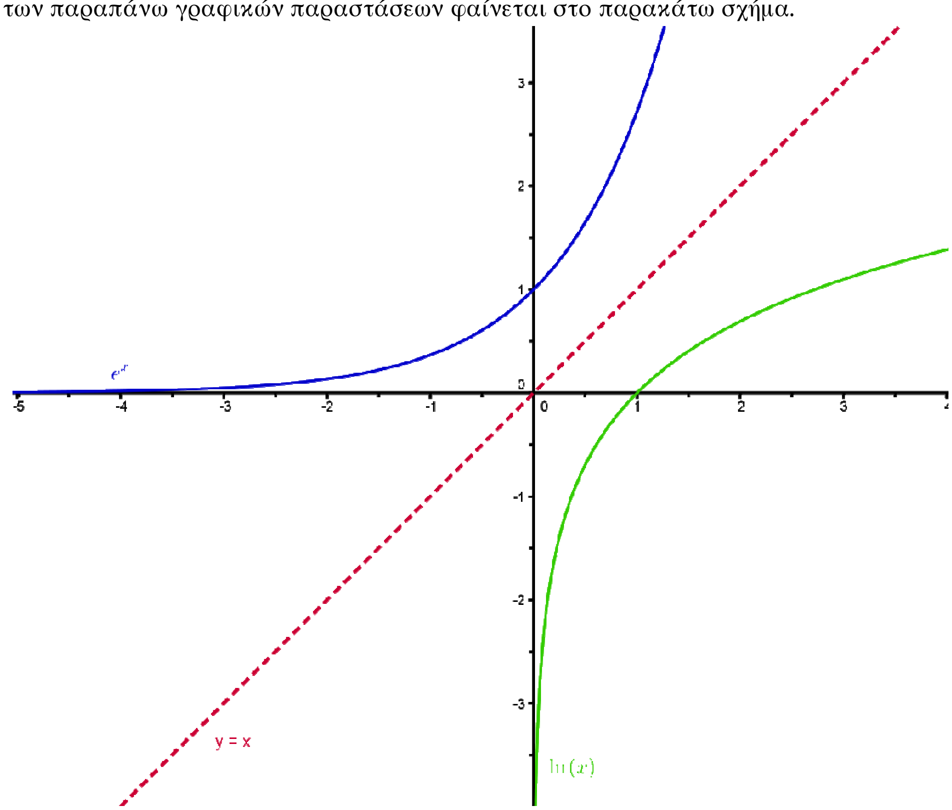
γ) Να αποδείξετε ότι: $e^x \geq x+1$, $x \in \mathcal{R}$ και $\ln x \leq x-1$, $x \in (0,+\infty)$. Πότε ισχύουν οι ισότητες;

δ) Να αποδείξετε ότι: $e^x \geq \ln x$ για $x \in (0,+\infty)$

Σημείωση: Κάποιες βασικές ανισότητες που πρέπει να έχουμε κατά νου (και προκύπτουν από την τελευταία άσκηση):

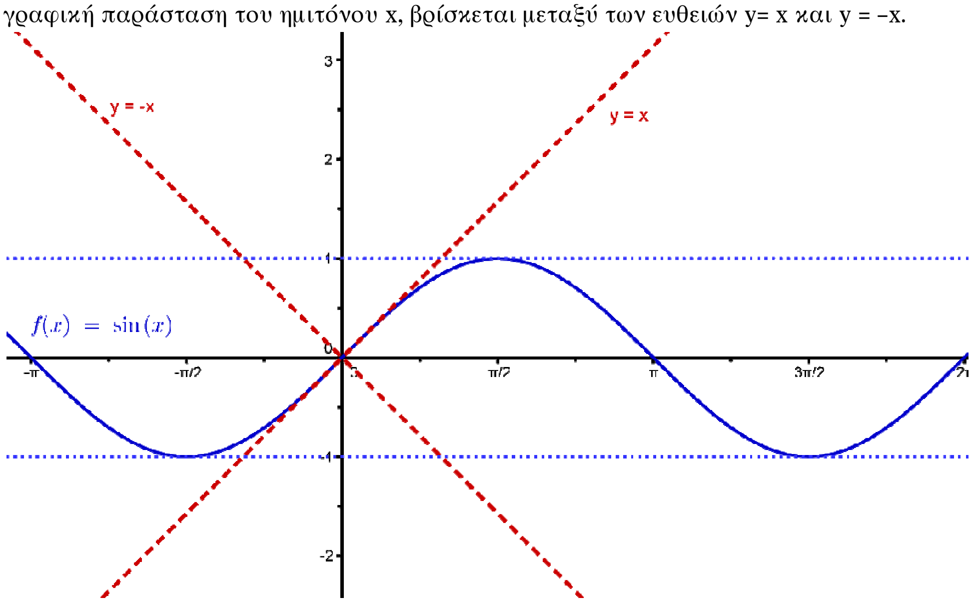
α) Αποδείξαμε ότι $e^x - x \geq 1 > 0$ άρα $\boxed{e^x - x > 0}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Αποδείξαμε ότι $\ln x - x \leq -1 < 0$ άρα $\boxed{\ln x - x < 0}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα ισχύει: $\boxed{\ln x < x < e^x}$. Η σχετική θέση των παραπάνω γραφικών παραστάσεων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



γ) Επίσης γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$ άρα $\eta\mu x \leq |\eta\mu x| \leq |x| \Rightarrow -x \leq \eta\mu x \leq x \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\eta\mu x - x \leq 0} \\ \text{και} \\ \boxed{\eta\mu x + x \geq 0} \end{cases}$

δηλαδή η γραφική παράσταση του ημιτόνου x, βρίσκεται μεταξύ των ευθειών y= x και y = –x.



Μάθημα 12 – Ασύμπτωτες – Κανόνας De l’ Hospital

Σημείωση: Συστήνουμε να ξεκινήσετε το διάβασμά σας από τον κανόνα του Hospital (για να σας διευκολύνει στην εύρεση ορίων των ασύμπτωτων)

Ερώτηση 29η «Ασύμπτωτες»
α) Γράψτε 3 είδη ασύμπτωτων για μια γραφική παράσταση συνάρτησης.
Σημείωση: *Όταν λέμε* ***ασύμπτωτη*** *, αναφέρεται στην* ***γραφική παράσταση συνάρτησης*** *και όχι στην συνάρτηση, δηλαδή είναι λάθος να γράψουμε ότι η ασύμπτωτη της f είναι η x =1, αλλά παρόλα ταύτα για λόγους ευκολίας θα το δεχόμαστε κατανοώντας τι θέλει να εκφράσει η άσκηση.*
β) Που μας εξυπηρετούν οι ασύμπτωτες;
γ) **Σωστό ή Λάθος:** Η ασύμπτωτη μιας γραφικής παράστασης συνάρτησης μπορεί να έχει κοινά σημεία με αυτήν. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

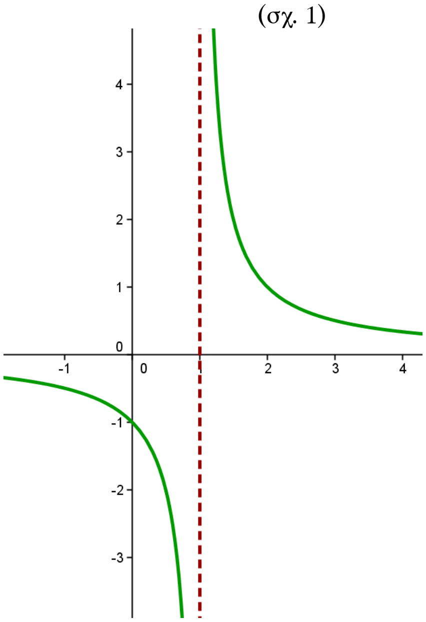
<u>Βασική Άσκηση 148η</u>

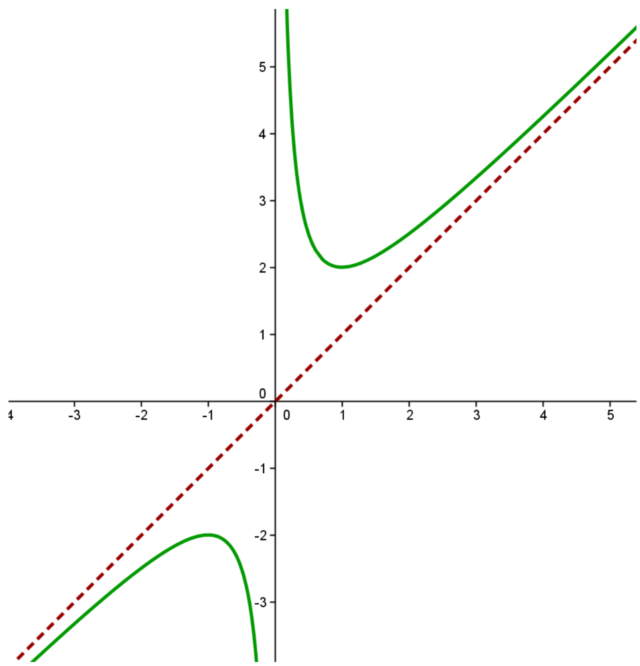
Γράψτε όλες τις βασικές γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που έχουν ασύμπτωτες και ποιο είδος παρουσιάζουν κάθε φορά.

<u>Άσκηση 149η</u>

Βρείτε το είδος και την εξίσωση των παρακάτω ασύμπτωτων (σχ. 1 και 2)

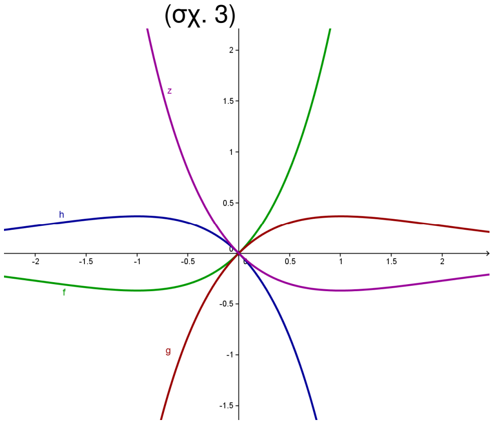
(σχ. 1)





(σχ. 2)

(σχ. 3)



<u>Άσκηση 150η</u>

Δίνονται οι τέσσερεις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, h, z, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα3.

α) Βρείτε ποια είναι η σχέση των γραφικών παραστάσεων.

β) Ποιες είναι ασύμπτωτές τους;

γ) Τελικά η ασύμπτωτη μπορεί να τέμνει την γραφική παράσταση συνάρτησης;

Ερώτηση 30η «Κατακόρυφη ασύμπτωτη»
α) Δώστε τον **ορισμό** της **κατακόρυφης ασύμπτωτης** $x = x_0$ για την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
β) Αν ο άξονας y'y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, τότε τι θα ισχύει;
γ) Σε ποια **σημεία** αναζητούμε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης; Αν μια συνάρτηση είναι **συνεχής** στο R ή σε κλειστό διάστημα, τότε παρουσιάζει κατακόρυφες ασύμπτωτες; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
δ) Σε ποια σημεία των ρητών συναρτήσεων αναζητούμε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες;
ε) Πόσες κατακόρυφες ασύμπτωτες μπορεί να έχει μια συνάρτηση;
Σημείωση: *Επανάληψη στα μη πεπερασμένα όρια (**Φυλλάδιο: Μάθημα 7**/ Ανάλυση – 10 Κεφάλαιο, ενώ από το σχολικό βιβλίο: παράγραφος 1.6 / σελ. 176)*

Βασική Άσκηση 151η
α) Βρείτε μια γνωστή συνάρτηση που η γραφικής της παράσταση έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες.
β) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες; Δικαιολογήστε την απάντησή σας
γ) Οι συνεχείς συναρτήσεις στο R έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες; Δικαιολογήστε την απάντησή σας

Άσκηση 152η
Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων για τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x)=\begin{cases} x & ,x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & ,x>0 \end{cases}$ β) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$ γ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

Άσκηση 153η
Δίνεται συνάρτηση $f:(-\infty,1)\bigcup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2+\lambda x-2}{x-1}$ και λ πραγματικός αριθμός.
α) **Σωστό ή Λάθος;** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x = 1.
β) Για ποια τιμή του λ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη;

Ερώτηση 31η «Οριζόντια ασύμπτωτη»
α) Δώστε τον ορισμό της οριζόντιας ασύμπτωτης $y = y_0$ για την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
β) Αν ο άξονας x'x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, τότε τι θα ισχύει;
γ) Σε ποια σημεία αναζητούμε την οριζόντια ασύμπτωτη μιας συνάρτησης; Σε ποια διαστήματα του πεδίου ορισμού αναζητούμε τις οριζόντιες ασύμπτωτες;
δ) Ποιες ρητές συναρτήσεις έχουν οριζόντια ασύμπτωτη;
ε) Πόσες οριζόντιες ασύμπτωτες μπορεί να έχει μια συνάρτηση που ορίζεται στο R;
Σημείωση: *Επανάληψη στα όρια που το $x\to\pm\infty$ (Φυλλάδιο : Μάθημα 8 / Ανάλυση 1 κεφάλαιο, ενώ από το σχολικό βιβλίο παράγραφος 1.7 σελ. 182)*

Βασική άσκηση 154η
α) Αν η περιττή συνάρτηση f ορίζεται στο R και έχει (η γραφική της παράσταση) οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=\lambda$, τότε να αποδείξετε ότι η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη και στο $-\infty$ της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
β) Δώστε σχήμα μιας τέτοιας συνάρτησης.

Βασική άσκηση 155η
Να αποδείξετε ότι οι πολυωνυμικές συναρτήσεις δεν έχουν οριζόντιες ασύμπτωτες.

Άσκηση 156η
Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων για τις παρακάτω συναρτήσεις:
α) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ β) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+x$ γ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

Άσκηση 157η
Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}+\lambda x$, όπου λ πραγματικός αριθμός
Βρείτε την τιμή του λ έτσι ώστε η $\mathbb{C}_f$ να έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Άσκηση 158η
Έστω μια συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{-x}\le xf(x)\le 1$ για κάθε $x>0$. Να δείξετε ότι ο άξονας χ΄χ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

Ερώτηση 32η «Πλάγια ασύμπτωτη»
α) Δώστε τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης $y=\lambda x+\beta$ για την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
β) Σε ποια σημεία αναζητούμε τις πλάγιες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης; Σε ποια διαστήματα του πεδίου ορισμού αναζητούμε τις οριζόντιες ασύμπτωτες;
γ) Δικαιολογήστε γιατί η οριζόντια ασύμπτωτη είναι ειδική περίπτωση της πλάγιας ασύμπτωτης;
δ) Ποιες ρητές συναρτήσεις έχουν πλάγια ασύμπτωτη (όχι οριζόντια);
ε) Πόσες πλάγιες ασύμπτωτες μπορεί να έχει μια συνάρτηση που ορίζεται στο R;
στ) **Εργαλείο εύρεσης πλάγιας – οριζόντιας ασύμπτωτης :**
Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\beta\in\mathbb{R}$ τότε ποια είναι η εξίσωση της πλάγιας ασύμπτωτης $\mathbb{C}_f$ στο $+\infty$; Ισχύει το αντίστροφο; Διατυπώστε και περιγράψτε το. Πότε θα το χρησιμοποιούμε; Τι συμβαίνει αν λ = 0 ;
ζ) Πότε χρησιμοποιούμε τον **ορισμό** της πλάγιας ασύμπτωτης μιας γραφικής παράστασης συνάρτησης και πότε το **εργαλείο**; Υπάρχουν ασκήσεις που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και τα δύο ταυτόχρονα σε ένα ερώτημα;

Βασική Άσκηση 159η
Σωστό ή Λάθος;
α) Αν η $\mathbb{C}_f$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, τότε δεν μπορεί να έχει και πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$
β) Αν η $\mathbb{C}_f$ έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, τότε δεν μπορεί να έχει και οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$
γ) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που ορίζεται στο R, μπορεί να έχει 4 το πολύ οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες
δ) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που ορίζεται στο R, μπορεί να έχει 2 το πολύ οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες

Άσκηση 160η
Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$
α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=-x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$
β) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Άσκηση 161η

Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\sqrt{x^2-x}-x$

α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να δείξετε ότι δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

γ) Βρείτε τις πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f στο $\pm\infty$

Άσκηση 162η (Εξετάσεις 2005)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(2-\alpha)x^2-\kappa x+2}{x-3}$ με $\alpha,\kappa\in\mathbb{R}$ και $x\neq 3$. Αν η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$, τότε να αποδείξετε ότι: α = 1 και κ =3.

Άσκηση 163η

Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+2g(x)\right)=3$ και ότι η ευθεία $y=x+3$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2$

β) Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Άσκηση 164η

Δίνεται ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x+3}-(\alpha x+\beta)\right)=0$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί. Βρείτε τα α, β.

[Υπόδειξη: Να λυθεί με την βοήθεια των ασύμπτωτων ...]

Άσκηση 165η

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία y =x+ 2, να βρείτε τον $\mu\in\mathbb{R}$,

ώστε: $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}\cdot f(x)+3\mu\cdot x^2+4}{x^2\cdot f(x)+\sqrt{x^4+1}-x^3+2}=10$$

Άσκηση 166η – Εξετάσεις 2000

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x)-g(x)=x-4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y=3x-7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{xf(x)-3x^2+1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g καθώς $x\to+\infty$

Άσκηση 167η

Έστω μια συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$ για κάθε x > 0. Αν η ευθεία ε: $y=x-1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f τότε να βρείτε την f.

Ερώτηση 33η «Κανόνας De L' Hospital»
α) Διατυπώστε τους δύο κανόνες (θεωρήματα) του De L' Hospital (προφέρεται: Ντελοπιτάλ) (συντομογραφικά D – L)
Ιστορικά σχόλια – κουτσομπολιά: *O De L Hospital ήταν μαθητής του γνωστού μαθηματικού Johann Bernoulli (1667-1748) και φημολογείται ότι οι κανόνες που διατύπωσε άνηκαν στον καθηγητή του!*
β) Ο D – L για ποιες απροσδιόριστες μορφές αναφέρεται; Μπορεί να λειτουργήσει και σε άλλες απροσδιόριστες μορφές; Δώστε τρόπους και παραδείγματα

Βασική άσκηση 168η

α) Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο διάστημα (α, β) με $g(x)\neq 0$ κοντά στο $\xi\in(\alpha,\beta)$ και $f(\xi)=g(\xi)=0$ με $g'(\xi)\neq 0$ τότε να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. β) Τι σας θυμίζει το όριο αυτό;

Άσκηση 169η

Δίνονται δύο συναρτήσεις $f(x)=x^2\eta\mu\dfrac{1}{x},\ x\neq 0$ και $g(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$.

Α) Να δείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ β) Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει γ) Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει

Β) Τι συμπέρασμα βγάζετε από την παραπάνω άσκηση;

Άσκηση 170η «Μορφή 0 /0»

Βρείτε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-1}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}$

Άσκηση 171η «Μορφή $\pm\infty/\pm\infty$»

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+\ln x}{x+\ln x}$ i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}+2x+1}{4e^{-x}+x+3}$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^3)}{\ln(2+x^2)}$

Άσκηση 172η «Μορφή $0\cdot(\pm\infty)$»

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ iii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln x\ln(x+1)\right]$

Άσκηση 173η «Μορφή $1^\infty, 0^0, \infty^0$»

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\varepsilon\varphi x}$

Άσκηση 174η

Ένας μαθητής υπολόγισε το όριο ως εξής: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7-6x+5}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^6-6}{2x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{42x^5}{2}=21$. Σχολιάστε την λύση του.

Άσκηση 175η

Έστω μια συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και συνεχής έως την δεύτερη παράγωγο, τότε να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x)$

Μάθημα 12 + 1 : Σχεδιασμός γραφικής παράστασης συνάρτησης

Ερώτηση 34η «Σχεδιασμός της C_f»
α) **Μαθητής**: «*Κύριε κύριε; Για ποιο λόγο τα μαθαίνουμε όλα αυτά* (αναφέρεται σε όλες τις έννοιες από το 1ο και 2ο κεφάλαιο της Ανάλυσης)»; Τι πρέπει να απαντήσει ο **καθηγητής** σε σχέση με την τελευταία παράγραφο του Διαφορικού Λογισμού;
β) Συνεχίζει ο **μαθητής**: «*Γιατί ο σχεδιασμός της γραφικής παράστασης συνάρτησης είναι τόσο σημαντικός*»; Για την καλύτερη απάντηση, αναφέρεται ένα από τα βασικά σχήματα και δώστε όλες τις πληροφορίες που μας δίνει ένα σχήμα (πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα, σημεία καμπής, ασύμπτωτες κτλ)
γ) Για να σχεδιάσουμε μια γραφική παράσταση συνάρτησης ποια βήματα ακολουθούμε; Δώστε ένα παράδειγμα

<u>Άσκηση 175η</u>

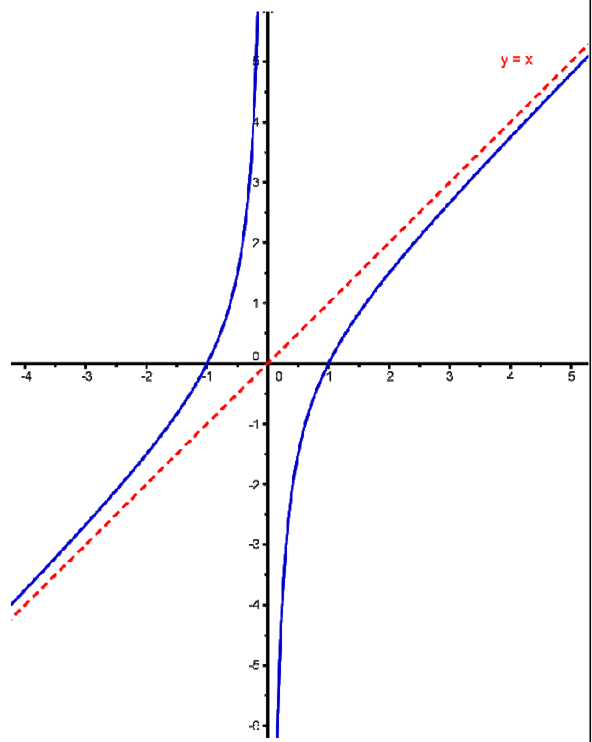
Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ β) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ γ) $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$

<u>Άσκηση 176η</u>

Δίνεται στο παρακάτω σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f («πεταλούδα»), συμπληρώστε τα παρακάτω κενά και απαντήστε στις επόμενες ερωτήσεις.

x	….. ….	….
$f''(x)$	………..…….	…………………...
$f'(x)$	………………	…………………
$f(x)$	……………….	…………………



Βρείτε, αν υπάρχουν,

α) Τα ακρότατα της συνάρτησης

β) Τα σημεία καμπής

γ) Τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

δ) Πεδίο ορισμού – Σύνολο τιμών

ε) Άξονες συμμετρίας

στ) Τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$

ζ) Τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$

η) Ορίζεται αντίστροφη συνάρτηση της f;

θ) Βρείτε τα όρια, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = ...$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = ...$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = ...$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = ...\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x) - x\right] = ...$

ι) Είναι συνεχής συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της;