ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥ 3ΟΥ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ 1.

1. Θα πρέπει χ>0 και χ>-1 . Άρα χ>0. Πεδίο ορισμού Α=(0,+∞)

2. $\lim_{\chi\to+\infty}(\ln\chi + \ln(\chi+1) - \ln 2) = +\infty + (+\infty) - \ln 2 = +\infty$

$\lim_{\chi\to 0^+}(\ln\chi + \ln(\chi+1) - \ln 2) = -\infty + 0 - \ln 2 = -\infty$

3.
$f'(\chi)=\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi+1}$ $Αρα\ f'(1)=\frac{3}{2}\ και\ f(1)=$
0 $Αρα\ η\ εξίσωση\ της\ εφαπτομένης\ είναι$

$$\psi - 0 = \frac{3}{2}(\chi - 1) \Leftrightarrow 3\chi - 2\psi - 3 = 0$$

4. Έχουμε

$f(\chi_1) = f(\chi_2) \Leftrightarrow \ln\chi_1 + \ln(\chi_1+1) - \ln 2 = \ln\chi_2 + \ln(\chi_2+1) - \ln 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln[\chi_1(\chi_1+1)] = \ln[\chi_2(\chi_2+1)] \Leftrightarrow \chi_1(\chi_1+1) = \chi_2(\chi_2+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow {\chi_1}^2 + \chi_1 = {\chi_2}^2 + \chi_2 \Leftrightarrow {\chi_1}^2 - {\chi_2}^2 + \chi_1 - \chi_2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\chi_1-\chi_2)(\chi_1+\chi_2) + \chi_1 - \chi_2 = 0 \Leftrightarrow (\chi_1-\chi_2)(\chi_1+\chi_2+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \chi_1 - \chi_2 = 0$ δίοτι $\chi_1 + \chi_2 + 1 \neq 0$ αφου το πεδίο ορισμού είναο $(0,+\infty)$
άρα $\chi_1 = \chi_2$ και επομένως η f είναι 1-1. Άρα έχει αντίστροφη.

$\psi = f(\chi) \Leftrightarrow \psi = ln\frac{\chi(\chi+1)}{2} \Leftrightarrow e^{\psi} = \frac{\chi(\chi+1)}{2} \Leftrightarrow 2e^{\psi} = \chi^2 + \chi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \chi^2 + \chi - 2e^{\psi} = 0 \Leftrightarrow \chi = \frac{-1-\sqrt{1+8e^{\psi}}}{2} < 0$

$απορ.\ \ αφου\ πεδίο\ ορισμού\ είναι\ το\ (0,+\infty)\ \ και\ \chi = \frac{-1+\sqrt{1+8e^{\psi}}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^{-1}(\psi) = \frac{-1+\sqrt{1+8e^{\psi}}}{2}\ \ με\ \psi\epsilon R \Leftrightarrow f^{-1}(\chi) = \frac{-1+\sqrt{1+8e^{\chi}}}{2}\ ,\chi\epsilon R$

5.$\left(f^{-1}(\chi)\right)' = \frac{8e^{\chi}}{4\sqrt{1+8e^{\chi}}}$ και $\left(f^{-1}(0)\right)' = \frac{2}{3}$ και $f^{-1}(0) = 1$ άρα η εξίσωση της

εφαπτομένης είναι $\psi - 1 = \frac{2}{3}(\chi - 0) \Leftrightarrow 2\chi - 3\psi + 3 = 0$

6.

Για να βρούμε το σημείο τομής πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$3\chi - 2\psi - 3 = 0$

$2\chi - 3\psi + 3 = 0$ ⇔χ=3,ψ=3 άρατο σημείο τομης είναι (3,3)

χ-ψ=0

7.

πρέπει $\frac{\chi(\chi+1)}{2} > 0 \Leftrightarrow \chi\epsilon(-\infty,-1)U(0,+\infty)$

$$\lim_{\chi\to-\infty} ln\frac{\chi(\chi+1)}{2} = \lim_{\psi\to+\infty} ln\psi = +\infty \quad \delta\acute{\iota}o\tau\iota\ \alpha\nu\ \psi = \frac{\chi(\chi+1)}{2} \quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon$$

$\lim_{\chi\to+\infty} \psi = \lim_{\chi\to+\infty} \frac{\chi(\chi+1)}{2} = \lim_{\chi\to+\infty} \chi^2 = +\infty$

$\lim_{\chi\to+\infty} ln\frac{\chi(\chi+1)}{2} = +\infty$ παρόμοια με το προηγούμενο

$\lim_{\chi\to-1^-} ln\frac{\chi(\chi+1)}{2} = \lim_{\psi\to 0^-} ln\psi = -\infty\ \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ \alpha\nu\ \psi = \frac{\chi(\chi+1)}{2}\ \ \tau\acute{o}\tau\varepsilon$

$\lim_{\chi\to-1^-} \psi = \lim_{\chi\to-1^-} \frac{\chi(\chi+1)}{2} = 0\ \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\ \frac{\chi(\chi+1)}{2} > 0$

$\lim_{\chi\to 0^+} ln\frac{\chi(\chi+1)}{2} = -\infty$ παρόμοια με το προηγούμενο.

8.

g’ (χ)=$\frac{2\chi+1}{\chi(\chi+1)}$ με χ$\epsilon(-\infty,-1)U(0,+\infty)$

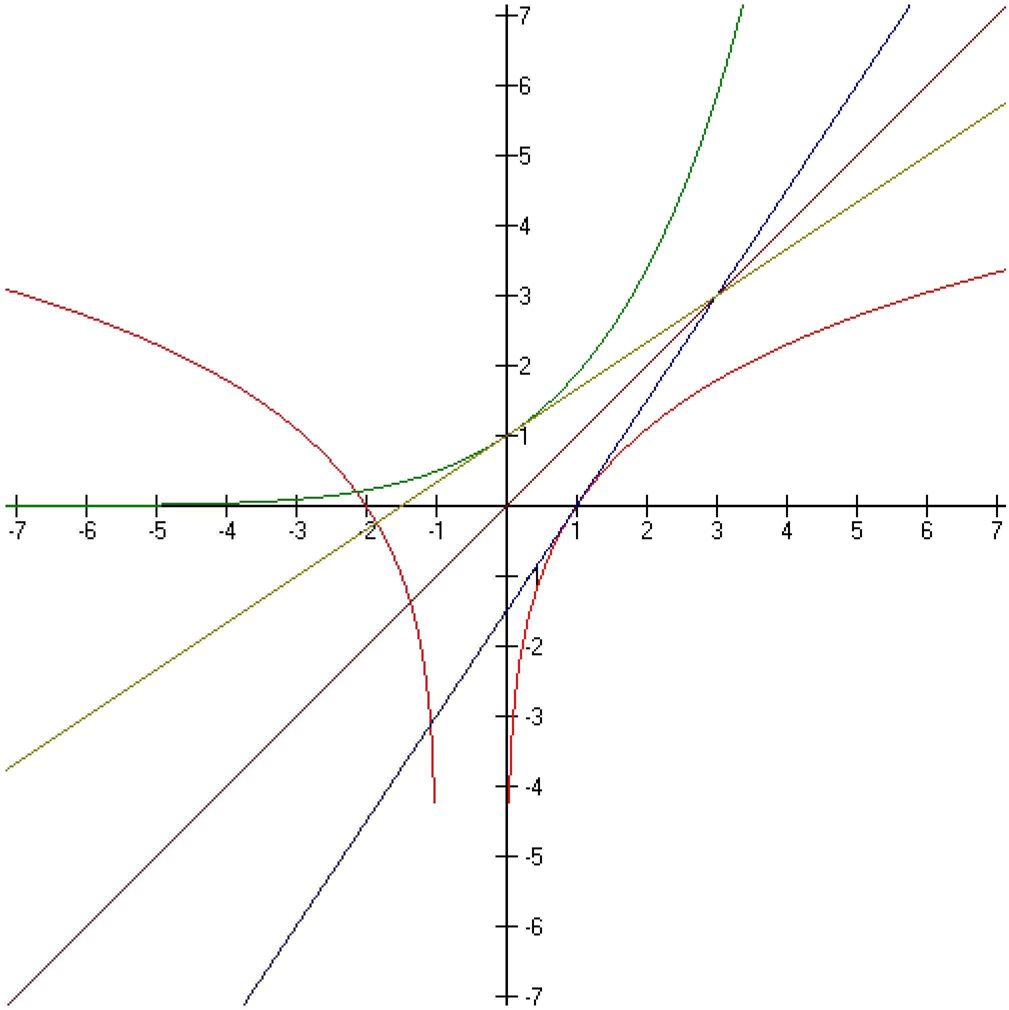
και το πρόσημο της g΄ δίνεται από τον επόμενο πίνακα.

χ	-∞	-1	$-\frac{1}{2}$	0	+∞
χ	-			+
χ+1	-			+
2χ+1	-			+
g΄(χ)	-			+

g΄΄(χ)=$\frac{-2(\chi^2+2\chi+1)}{\chi^2(\chi+1)^2}$<0και έχουμε το πίνακα μεταβολών της g

χ	-∞	-1	0	+∞
g’ (χ)	-		+
g΄΄(χ)	-		-

g(χ)	↷		⤴



ΘΕΜΑ 2

Έστω $P(\chi)=\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta$ οπότε $P'(\chi)=3\alpha\chi^2+2\beta\chi+\gamma$, $P''(\chi)=6\alpha\chi+2\beta$ και

$P'''(\chi)=6\alpha$ Οπότε $P(0)=\delta$, $P'(0)=\gamma$, $P''(0)=2\beta$ και $P'''(0)=6\alpha$ Αρα

$P(\chi)=\frac{\chi^3}{6}P'''(0)+\frac{\chi^2}{2}P''(0)+\chi P'(\chi)+P(0)$

Η f είναι συνεχής στο $[e,e^2]$. Είναι η $f'(\chi)=-\frac{1}{\chi^2}+\frac{1}{\chi}=\frac{\chi-1}{\chi^2}>0\ \alpha\nu\ \chi\epsilon[e,e^2]$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e,e^2]$ και $f([e,e^2])=[f(e),f(e^2)]=$

$=\left[1+\frac{1}{e},2+\frac{1}{e^2}\right]$ και επειδή το $\frac{3}{2}\epsilon[f(e),f(e^2)]$ υπάρχει $\chi_0\epsilon[e,e^2]$ τέτοιο ώστε

$$f(\chi_0) = \frac{3}{2}.$$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και μοναδικό

ΘΕΜΑ 3.

$\left(2 + \frac{3}{2}i\right)z - \frac{5}{2}\bar{z}i = \left(2 + \frac{3}{2}i\right)(\chi + \psi i) - \frac{5}{2}(\chi - \psi i)i =$

$= 2\chi + 2\psi i + \frac{3}{2}\chi i - \frac{3}{2}\psi - \frac{5}{2}\chi i - \frac{5}{2}\psi = 2\chi - 4\psi + (2\psi - \chi)i$

Αρα $\mathrm{Re}f(z) = 2\chi - 4\psi$ και $\mathrm{Im}f(z) = -\chi + 2\psi$

'Εστω Μ(α,β) τότε α=2χ-4ψ και β=-χ+2ψ τότε 2β=-2χ+4ψ=-α άρα 2β+α=0
Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των Μ είναι η ευθεία χ+2ψ=0

$|f(z)|\sqrt{(2\chi - 4\psi)^2 + (-\chi + 2\psi)^2} = \sqrt{2^2(\chi - 2\psi)^2 + (\chi - 2\psi)^2} =$

$= \sqrt{5(\chi - 2\psi)^2} = |\chi - 2\psi|\sqrt{5}$

4. $= |\chi - 2\psi|\sqrt{5} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |\chi - 2\psi| = 1 \Leftrightarrow \chi - 2\psi = 1 \;\; \eta \;\; \chi - 2\psi = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \chi - 2\psi - 1 = 0 \;\; \eta \; \chi - 2\psi + 1 = 0$

Έστω w=χ+ψi και z=α+βi τότε $\alpha^2 + \beta^2 = 4$ και χ+ψi $= \alpha + \beta i + \frac{1}{\alpha + \beta i} = \alpha + \beta i + \frac{\alpha - \beta i}{\alpha^2 + \beta^2}$

τότε χ+ψi $= \frac{4\alpha + 4\beta i + \alpha - \beta i}{4} = \frac{5\alpha}{4} + \frac{3\beta}{4}i$ *άρα* $\chi = \frac{5\alpha}{4}$ *και* $\psi = \frac{3\beta}{4}$ *τότε* $\alpha = \frac{4\chi}{5}, \beta = \frac{4\psi}{3}$ *και*

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{16\chi^2}{25} + \frac{16\psi^2}{9} = 4 \Rightarrow \frac{4\chi^2}{25} + \frac{4\psi^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{\chi^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{\psi^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$$