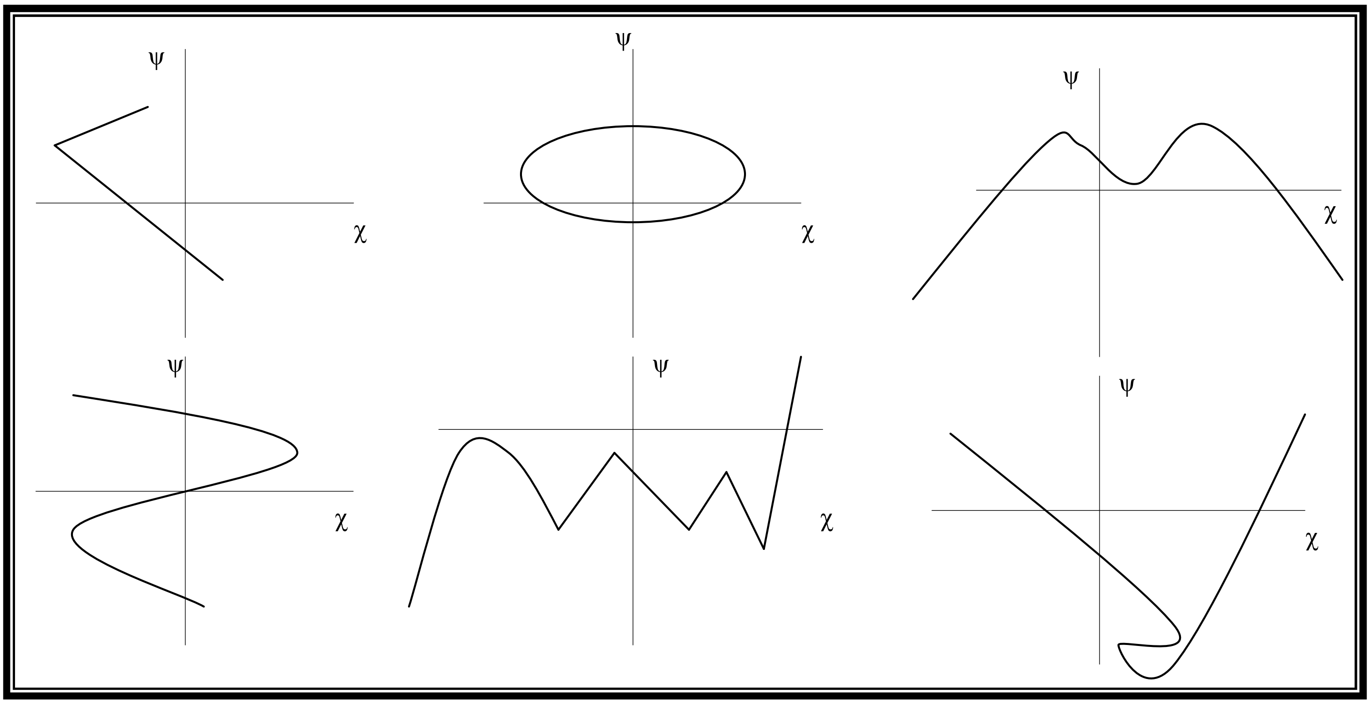
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Να εξετάσετε αν καθεμία από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις είναι γραφική παράσταση συνάρτησης ή όχι. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

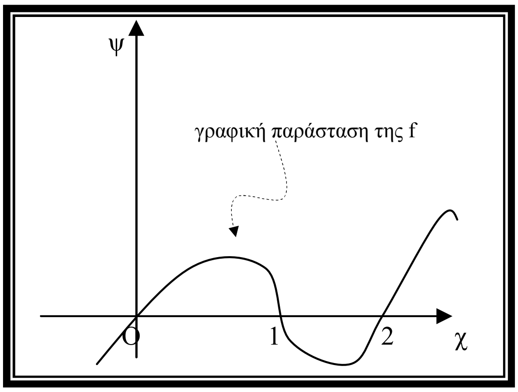


2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε:

(α) τις τιμές f(0),f(1) και f(2),

(β) τις ρίζες της εξίσωσης $[f(\chi)]^2=0$,

(γ) τις τιμές του χ για τις οποίες $f(\chi)>0$.

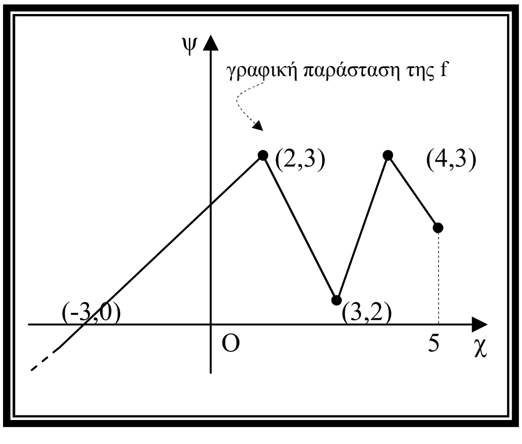


3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε:

(α) το πεδίο ορισμού της f,

(β) τις τιμές του χ για τις οποίες $f(\chi)<0$,

(γ) σε ποια σημεία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να τα προσδιορίσετε.



4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

(α) f(χ)=$\frac{1-\chi}{4-\chi^2}$ (β) f(χ)=$\sqrt{-\chi^2+5\chi-6}$ (γ) f(χ)=$\frac{\chi\cdot\eta\mu\sqrt{\chi}}{1-|\chi|}$.

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

(α) f(χ)=$\frac{\ln\chi}{\ln\chi+2}$ (β) f(χ)=$\frac{\chi+\sigma\upsilon\nu\chi}{\ln\chi-1}$ (γ) f(χ)=$e^{\sqrt{\chi-1}}$.

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

(α) f(χ)=ln(χ-2)-ln(6χ-χ^2),
(β) f(χ)=$\sqrt{\chi^3-\chi}$,
(γ) f(χ)=$\sqrt{|\chi-1|+|\chi-2|+e^{\chi}}$.

7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

(α) f(χ)=$\sqrt{1-\sqrt{1-\chi^2}}$, (β) f(χ)=log(log(logχ)).

8. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

(α) f(χ)=$\frac{1+\ln\chi}{\ln^2\chi-\ln\chi-2}$, (β) f(χ)=$\ln(\frac{2-\chi}{2+\chi})$.

9. Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία (αν υπάρχουν) των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

(α) f(χ)=$\frac{\chi+2}{\chi-1}$ και g(χ)=$\frac{8}{\chi}$,

(β) f(χ)=χ^2-3χ+2 και g(χ)= $\frac{6}{\chi}$.

10. (α) Αν f(χ)=$\frac{e^x}{1+e^x}$, χ∈ℝ να δείξετε ότι f(χ)+f(-χ)=1, για κάθε χ∈ℝ,

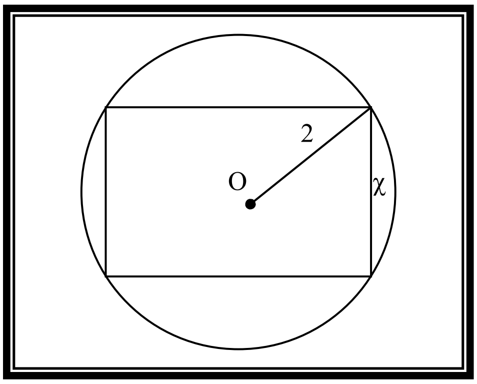
(β) Αν f(χ)=$\frac{\eta\mu\chi}{1+e^x}$, χ∈ℝ να δείξετε ότι f(χ)-f(-χ)=ημχ, για κάθε χ∈ℝ.

11. Αν f(χ)=$\ln(\frac{1-\chi}{1+\chi})$, -1<χ<1 , να δείξετε ότι: $f(\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta})=f(\alpha)+f(\beta)$, για όλα τα α,β∈(-1,1).

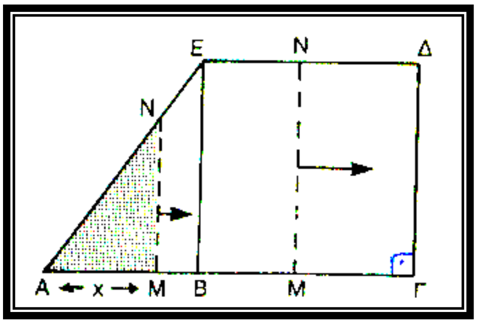
12. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi)=\dfrac{3\chi^3-\lambda\cdot\chi}{\chi+1}$ να διέρχεται από το σημείο (1,6).

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^3+\alpha\chi^2-\beta\chi+2$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β έτσι, ώστε τα σημεία Α(1,4) και Β(-2,16) να ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

14. Στο διπλανό σχήμα να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση της πλευράς του χ.
Για ποιες τιμές ορίζεται αυτή η συνάρτηση;



15. Στο διπλανό σχήμα το ΑΕΔΓ είναι τραπέζιο και το ΕΔΓΒ είναι τετράγωνο. Αν ΑΒ=3, ΑΓ=7 και ΓΔ=4 να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του x=ΑΜ, όταν το Μ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ.



16. Αν η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 1, να δείξετε ότι $\lim\limits_{\chi\to1}\dfrac{(\chi^2+\chi-2)f(\chi)}{\chi^2-1}=\dfrac{3}{2}f(1)$.

17. Αν $f(\chi)=\chi^2+1$, να βρείτε τα όρια:
(α) $\lim\limits_{\chi\to1}\dfrac{f(\chi)-f(1)}{\chi-1}$ (β) $\lim\limits_{\chi\to2}\dfrac{f(\chi)-f(2)}{\chi^2-5\chi+6}$ (γ) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h+4)-f(4)}{h}$.

18. Να βρείτε τα όρια: (α) $\lim\limits_{\chi\to5}\dfrac{\chi^2-25}{\chi^2-7\chi+10}$ (β) $\lim\limits_{\chi\to0}\dfrac{(1+\chi)^3-1}{\chi^2-\chi}$.

19. Να βρείτε τα όρια: (α) $\lim\limits_{\chi\to1}\dfrac{\chi^3-1}{\chi-1}$ (β) $\lim\limits_{\chi\to1}\dfrac{\sqrt{\chi}-1}{\chi-1}$.

20. Να βρείτε τα όρια: (α) $\lim\limits_{\chi \to 1} \frac{\sqrt{\chi+3}-2}{\chi-1}$ (β) $\lim\limits_{\chi \to 0} \frac{2\chi}{\sqrt{1+\chi}-\sqrt{1+2\chi}}$.

21. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(\chi)=\begin{cases} \frac{\chi^2+\chi-2}{\chi-1}, \alpha\nu \chi \neq 1 \\ \lambda, \alpha\nu \chi = 1 \end{cases}$

(α) να βρείτε το $\lim\limits_{\chi \to 1} f(\chi)$

(β) να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο 1.

22. Να βρείτε τα όρια: (α) $\lim\limits_{\chi \to 1} \frac{\chi^3-3\chi+2}{\chi^4-7\chi+6}$, (β) $\lim\limits_{\chi \to 4} \frac{\chi^2-5\chi+4}{\sqrt{\chi}-2}$.

23. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{\chi \to 0} \frac{(1+\chi)\sqrt{1+\chi}-1}{\chi}$.

24. Να βρείτε (με δύο τρόπους) την παράγωγο της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^2+\chi+2$ στο $\chi_o=1$.

25. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής στο μηδέν με f(0)=0.

(α) Να βρείτε το $\lim\limits_{\chi \to 0} f(\chi)$

(β) Αν $g(t)=|t|.f(t)$, $t\in\mathbb{R}$, να βρείτε την $g'(0)$.

26. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

(α) $f(\chi)=(\chi^2+5\chi-3)^{10}$,

(β) $f(\chi)=\sqrt{\chi^2+e^{2\chi}}$,

(γ) $f(\chi)=\ln(\sqrt{\chi^2+1})$.

27. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

(α) $f(\chi)=\eta\mu^3\chi$,

(β) $f(\chi)=\eta\mu^3\chi^3$,

(γ) $f(\chi)=\eta\mu^2(\ln\chi)$.

28. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

(α) $f(\chi)=e^{\eta\mu\chi}$,

(β) $f(\chi)=[\ln(\chi^2+3)]^2$,

(γ) $f(\chi)=2^\chi(\ln\chi)$.

29. Δίνεται η συνάρτηση: $f(\chi)=\frac{1}{3}\chi^3+\frac{1}{2}\chi^2-12\chi+5$ $\chi\in\mathbb{R}$.

Να βρεθούν οι τιμές του χ για τις οποίες:

(α) $f'(\chi)=0$ (β) $f'(\chi)=-6$ (α) $f'(\chi)<0$.

30. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=\chi^2+\chi+1$. Να αντιστοιχίσετε κάθε τετμημένη χ_o (στήλη Α) με τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\chi_o, f(\chi_o))$ με τον άξονα χχ'.

Στήλη Α (χ_o)	**Στήλη Β** (γωνία)
-1 •	• 0
0 •	• $\frac{\pi}{6}$
$-\frac{1}{2}$ •	• $\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ •	• $\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{3}-3}{6}$ •	• $\frac{\pi}{2}$
	• $\frac{2\pi}{3}$
	• $\frac{3\pi}{4}$
	• $\frac{5\pi}{6}$

31. Να βρείτε πολυώνυμο f(χ) τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε $f(0)=2004$, $f'(0)=2$, $f'(1)=5$ και $f''(1)=6$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^4-14\chi^2+24\chi$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν τρία σημεία της γραφικής παράστασης της f τέτοια, ώστε οι εφαπτομένες της f να είναι παράλληλες προς τον άξονα χχ'.

33. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων: $f(\chi)=\chi^2$ και $g(\chi)=2\chi^2-4\chi+3$ στα κοινά τους σημεία.

34. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^2-\chi-6$ στα σημεία όπου αυτή τέμνει τους άξονες.

35. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi)= -4\chi^2+5$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=8$.

36. Να βρεθούν τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^2-5\chi+2$ στα οποία οι εφαπτομένες τους διέρχονται από το σημείο (0, -2).

37. Να δειχθεί ότι η ευθεία $\psi=-\chi$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^2+5\chi+9$ και να βρεθεί το σημείο επαφής.

38. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ=4cm και ΒΓ=$\sqrt{t}$ cm (όπου t είναι ο χρόνος σε sec). Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής ως προς το χρόνο:

(α) της περιμέτρου του ορθογωνίου, όταν t=4 sec,

(β) του εμβαδού του ορθογωνίου, όταν ΒΓ=3cm.

39. Αν $f(\chi)=\chi+\sqrt{\chi^2-1}$, $\chi>1$, να δείξετε ότι

(α) $f(\chi)=\sqrt{\chi^2-1}\cdot f'(\chi)$ και

(β) $(\chi^2-1)f''(\chi) + \chi f'(\chi)=f(\chi)$, για κάθε $\chi>1$.

40. (α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi)=\ln^2\chi$ στο σημείο $(\alpha,f(\alpha))$, $\alpha>0$.

(β) Ποια είναι η εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης όταν αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

41. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση: $f(\chi)=3\chi^4+8\chi^3-18\chi^2+7$.

42. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις:

(α) $f(\chi)=\ln(\frac{1}{\chi})$ (β) $f(\chi)=\sqrt{1-\chi^2}$ (γ) $f(\chi)=\frac{\chi}{1+\chi^2}$.

43. Για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ισχύει: $f'(\chi)=4(\chi+1)(\chi-2)^2(\chi+3)^3$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$.

(α) Να λύσετε την εξίσωση $f'(\chi)=0$,

(β) Να βρείτε τις θέσεις και το είδος των ακροτάτων της f.

44. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^2+\alpha\chi+\beta$ να έχει στο 2 ελάχιστο το 1.

45. Να βρεθεί το α>0 ώστε η συνάρτηση $f(\chi)=2\chi^3-\alpha\chi^2+8$ να είναι γνησίως φθίνουσα μόνο στο διάστημα [0,2].

46. Απ' όλους τους θετικούς αριθμούς που έχουν σταθερό γινόμενο 64, να βρείτε εκείνους που έχουν ελάχιστο άθροισμα.

47. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β,γ ($\alpha\neq 0$) ώστε η συνάρτηση $f(\chi)=\alpha\chi^2-2\beta\chi+4\gamma$ να έχει ακρότατο στο –1 το 3 και η γραφική της παράσταση να τέμνει τον άξονα ψψ' στο σημείο Α(0,2).

48. Να εξετασθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(\chi)=\chi+e^{\chi}-\eta\mu\chi$.

49. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης: $f(\chi)= - \chi^4+4\chi^3$.

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\chi(\ln^2\chi-5\ln\chi+7)$.

(α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f καθώς και η συνάρτηση f '

(β) Να λύσετε την εξίσωση $f'(\chi)=0$,

(γ) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f,

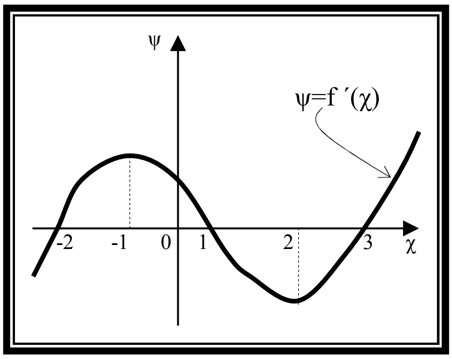
(δ) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

51. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f ' μια συνάρτησης f.

(α) Να λύσετε την εξίσωση $f'(\chi)=0$,

(β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f,

(γ) Να βρείτε τις θέσεις και το είδος των ακροτάτων της f.



52. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{\ln\chi}{\chi}$.

(α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f καθώς και η συνάρτηση f '

(β) Να λύσετε την εξίσωση $f'(\chi)=0$,

(γ) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

(δ) Να δείξετε ότι: $\ln\chi \leq \dfrac{\chi}{e}$, για κάθε χ>0.

53. Απ' όλα τα ισοσκελή τρίγωνα που έχουν σταθερή περίμετρο 12cm, να βρεθεί εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

54. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση: $f(\chi)=\ln(\ln\chi) - \ln\chi$.

55. Ένα εργοστάσιο ζαχαροπλαστικής παρασκευάζει ταψάκια γαλακτομπούρεκου. Υπολογίστηκε ότι η παρασκευή χ ταψιών την εβδομάδα κοστίζει $C(\chi)=\frac{\chi^2}{500}-2\chi+100$ ευρώ. Η τιμή πώλησης του κάθε ταψιού είναι $p(\chi)=4-\frac{\chi}{250}$ ευρώ. Πόσα ταψάκια γαλακτομπούρεκου πρέπει να παράγει την εβδομάδα το εργοστάσιο ώστε να έχει το μεγαλύτερο κέρδος; Ποιο είναι το μέγιστο κέρδος;

Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η

56. Στον διπλανό πίνακα δίνονται οι συχνότητες των τιμών της μεταβλητής Χ: «αριθμός παιδιών σε μια οικογένεια» για ένα δείγμα 32 οικογενειών.
(α) Να συμπληρωθεί ο πίνακας ως προς τις σχετικές συχνότητες, τις αθροιστικές συχνότητες και τις σχετικές αθροιστικές συχνότητες
(β) Να βρείτε πόσες οικογένειες έχουν:
  (i) το πολύ 2 παιδιά,
  (ii) τουλάχιστον 2 παιδιά,
  (iii) από 1 μέχρι και 4 παιδιά
(γ) Να βρείτε το ποσοστό των οικογενειών που έχουν:
  (i) τουλάχιστον 2 παιδιά,
  (ii) από 1 μέχρι και 4 παιδιά.

Αριθμός παιδιών χ_i	Συχνότητα ν_i
0	4
1	6
2	10
3	6
4	4
5	2
Σύνολο	32

57. Δίνεται ο διπλανός πίνακας των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων της μεταβλητής Χ: «μέγιστη θερμοκρασία μια πόλης στη διάρκεια μιας ημέρας».
(α) να βρείτε τα όρια της 5ης κλάσης και την κεντρική τιμή της 2ης κλάσης,.
(β) να συμπληρωθεί ο πίνακας με τις αθροιστικές συχνότητες και τις σχετικές αθροιστικές συχνότητες,
(γ) να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο συχνοτήτων,
(δ)) να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων και το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

Θερμοκρασία (σε ^oC)	Συχνότητα ν_i
[20,22)	3
[22,24)	9
[24,26)	30
[26,28)	15
[28,30)	3
Σύνολο	60

58. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας με τα στοιχεία που λείπουν:

Καταστάσεις υγείας	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
άριστη	2	
πολύ καλή	8	
καλή	13	
σχεδόν καλή		25
κακή		
Σύνολο	32	

59. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας με τα στοιχεία που λείπουν:

Κλάσεις	χ_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
				10	
			15		
					60
[12,16)					
		15			
Σύνολο		50			

60. Στο διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή του αριθμού παιδιών σε ένα δείγμα οικογενειών που πήραμε. Να βρείτε:

(α) το μέγεθος του δείγματος,

(β) πόσες οικογένειες έχουν:

- (i) 1 τουλάχιστον παιδί,
- (ii) 6 παιδιά,
- (iii) πάνω από 3 παιδιά,
- (iv) το πολύ 6 παιδιά,
- (v) από 3 έως και 5 παιδιά.

Αριθμός παιδιών χ_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i
0	5
1	15
2	30
3	38
4	43
5	47
6	50

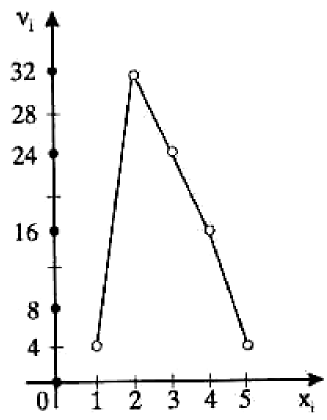
61. Από μια έρευνα που έγινε σε 80 οικογένειες ενός χωριού ως προς τον αριθμό των παιδιών τους, προέκυψε το διπλανό πολύγωνο συχνοτήτων.

(α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.

(β) Να σχεδιάσετε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων,

(γ) Ποιο είναι το ποσοστό των οικογενειών που έχουν:

- (i) 2 παιδιά,
- (ii) τουλάχιστον 3 παιδιά,
- (iii) από 1 έως και 3 παιδιά.



62. Αν $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu$ είναι ένα δείγμα μεγέθους ν με μέση τιμή $\overline{\chi}$ τότε να δείξετε ότι $\sum_{i=1}^{\nu}(\chi_i-\overline{\chi})=0$. Ειδικά αν $\chi_1=\chi_2=\ldots=\chi_\nu=\alpha$, τότε να βρεθούν η μέση τιμή $\overline{\chi}$ και η τυπική απόκλιση s.

63. Της Μαρίας ο διάμεσος βαθμός σε τρία test είναι 90, ο μέσος βαθμός είναι 92 και το εύρος 6. Ποιοι είναι οι βαθμοί της στα τρία test;

64. Η μέση τιμή επτά αριθμών είναι 5. Οι πέντε από αυτούς τους αριθμούς είναι οι 11,3,6,5,4. Να βρείτε τους άλλους δύο αριθμούς αν είναι γνωστό ότι ο ένας είναι διπλάσιος του άλλου και στην συνέχεια να υπολογίσετε την διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

65. Το μέσο ύψος 65 μαθητών μιας τάξης είναι 175cm. Πόσο θα γίνει το μέσο ύψος των μαθητών αν φύγουν 2 μαθητές με ύψος 190cm ο καθένας και έρθουν τρεις μαθήτριες με ύψος 180cm η καθεμία;

66. (α) Αν για ένα σύνολο παρατηρήσεων $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu$ ισχύει: $s=\sqrt{2}$, $\overline{\chi}=3$ και $\sum_{i=1}^{\nu}\chi_i^{\,2}=55$, να υπολογιστεί το ν.

(β) Αν για ένα σύνολο παρατηρήσεων $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu$ ισχύει: $\overline{\chi}=20$, cv=10% και $\sum \chi_i^{\,2}\nu_i=3232$, να υπολογιστεί το ν.

67. Αν $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις ενός δείγματος με μέση τιμή $\overline{\chi}$ και τυπική απόκλιση s, να δείξετε ότι οι τιμές $\psi_i=\dfrac{\chi_i-\overline{\chi}}{s}$ (i=1,2,…,ν) έχουν μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση 1.

68. (α) Βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών: 20,35,50,60,85.

(β) Στους παραπάνω πέντε αριθμούς προσθέστε άλλους τέσσερις έτσι, ώστε το νέο σύνολο αριθμών να έχει την ίδια μέση τιμή με τους πέντε αρχικούς αριθμούς.

69. Ο διπλανός πίνακας δείχνει την κατανομή των δωματίων των σπιτιών μιας πόλης. Αν είναι $\overline{\chi}=2{,}64$ τότε να συμπληρωθεί ο πίνακας.

Αριθμός δωματίων χ_i	Σχετ. συχνότητα f_i
1	0,16
2	
3	
4	0,25

70. (α) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας για δύο θετικές μεταβλητές Χ και Υ,

	χ	ψ	χ^2	ψ^2	$\chi\psi$
	1	1			
			9		6
	4	4			
				16	24
		64	25		
	9				63
	11				88
		9	196		
σύνολο					

(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων της μεταβλητής Υ πάνω στην Χ,

(γ) Να εκτιμήσετε το ψ, όταν χ=12.

71. Για επτά ζεύγη τιμών (χ,ψ) δύο μεταβλητών Χ και Υ ισχύει ότι: $\bar{\chi} = \bar{\psi} = 4$, $\sum_{i=1}^{7} \chi_i \psi_i = 94$ και $\sum_{i=1}^{7} \chi_i^2 = 124$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων της μεταβλητής Υ πάνω στην Χ,

(β) Αν το σημείο $(5, \hat{\psi})$ είναι σημείο της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων του ερωτήματος (α), με πόσο ισούται το ψ;

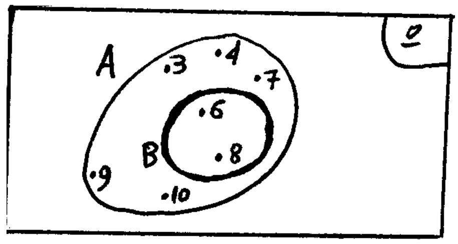
72. ν ζεύγη παρατηρήσεων (χ_i, ψ_i) έδωσαν τα εξής αποτελέσματα:

$\bar{\chi} = 10$, $\bar{\psi} = 8$, $\sum \chi\psi = 72\nu$ και $s_x^2 = 4$, όπου s_x^2 η διακύμανση των τιμών χ_i της

$\bar{\chi} = 10$ μεταβλητής Χ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων της μεταβλητής Υ πάνω στην Χ.

Π ΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ...

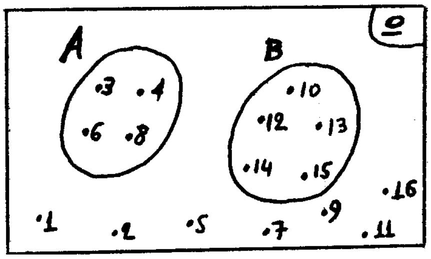
73. Με τη βοήθεια του διπλανού διαγράμματος Venn να βρείτε τα ενδεχόμενα: Α , Β , $A \cup B$, $A \cap B$ και Α-Β.



74. Με τη βοήθεια του διπλανού διαγράμματος Venn:

α) να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω και τα ενδεχόμενα Α , Β και $A' \cup B'$

β) να εξετάσετε αν είναι σωστός ή λανθασμένος ο ισχυρισμός: $A \cup B = \varnothing$.



75. Δίνεται ο δειγματικός χώρος Ω={1,2,3,4,5,6,7,8,9} ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα Α={2,3,4,5} και Β={4,5,7,8}.
Να δείξετε ότι $N(A)+N(B)=N(A \cup B)+N(A \cap B)$.

76. Ρίχνουμε ένα ζάρι μια φορά. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
Α=''η πλευρά χ που εμφανίζεται κατά τη ρίψη ικανοποιεί τη σχέση $6\chi-\chi^2>0$'',
Β=''η πλευρά χ που εμφανίζεται κατά τη ρίψη ικανοποιεί τη σχέση $\chi^2-5\chi+6=0$'',
Γ='' η πλευρά χ που εμφανίζεται κατά τη ρίψη ικανοποιεί τη σχέση $\chi>5$''
Να βρεθούν τα ενδεχόμενα Α , Β , Γ' και $A \cap B'$.

77. (Α)Ρίχνουμε πρώτα ένα νόμισμα και έπειτα ένα ζάρι.
(α) να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος,
(β) να βρεθεί το ενδεχόμενο Α=''να φέρουμε άρτιο αριθμό''.
(Β)Να απαντήσετε στα παραπάνω ερωτήματα (α) και (β) στην περίπτωση όπου ρίχνουμε πρώτα το ζάρι και έπειτα το νόμισμα.

78. Έχουμε δύο κουτιά α και β. Το κουτί α περιέχει άσπρες (Α) κόκκινες (Κ) και μαύρες (Μ) μπάλες. Το κουτί β περιέχει άσπρες και μαύρες μπάλες. Διαλέγουμε τυχαία ένα κουτί και έπειτα τυχαία μια μπάλα από αυτό.
(i) να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος,
(ii) να βρείτε το ενδεχόμενο Α=''η μπάλα να είναι κόκκινη'' .

79. Ένα ζευγάρι αποφάσισε να αποκτήσει το πολύ 4 παιδιά.
Συμφώνησαν όμως να σταματήσουν όταν αποκτήσουν ένα κορίτσι και ένα αγόρι, ανεξάρτητα από τη σειρά εμφάνισης τους.
Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος και το ενδεχόμενο
Ε=''να αποκτήσουν μόνο αγόρια ή μόνο κορίτσια''.

80. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$.
(α) αν $P(\omega_1)=\frac{1}{2}$, $P(\omega_3)=\frac{1}{4}$, $P(\omega_4)=\frac{1}{8}$, να βρείτε την $P(\omega_2)$
(β) αν $P(\omega_3)=P(\omega_4)=\frac{2}{5}$, $P(\omega_1)=3\,P(\omega_2)$, να βρείτε τις $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$
(γ) αν $A=\{\omega_2,\omega_3\}$, $B=\{\omega_2,\omega_4\}$, με $P(A)=\frac{3}{5}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ και $P(\omega_2)=\frac{1}{4}$, να βρείτε την $P(\omega_1)$.

81. Αν Α,Β δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύουν $A\cup B=\Omega$, $P(A)=\chi$, $P(B)=3\chi^2+\chi$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό χ.

82. Αν Α , Β είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύει $P(A)=2\chi$, $P(B)=4\chi$ και $P(A\cup B)=3(\chi+\frac{1}{8})$, να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Ι στο ίσο του της στήλης ΙΙ:

Στήλη Ι	Στήλη ΙΙ
$P(A)$.	. 0,5
$P(B)$.	. 0,4
$P(A\cup B)$.	. 0,75
$P(A\cup B')$.	. 0,25

83. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα στον αέρα τρεις φορές και καταγράφουμε τις ενδείξεις. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
Α=''οι ενδείξεις είναι ίδιες''
Β=''το πολύ μια ένδειξη είναι «γράμματα»''
Γ=''τουλάχιστον δύο ενδείξεις είναι «γράμματα»''.

84. Οι αριθμοί 1,2,…,19,20 γράφονται σε ομοιόμορφες κάρτες και έπειτα ανακατεύονται. Μια κάρτα επιλέγεται στην τύχη. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
Α=''ο αριθμός της κάρτας που επιλέξαμε είναι άρτιος''
Β=''ο αριθμός της κάρτας που επιλέξαμε είναι περιττός''
Γ=''ο αριθμός της κάρτας που επιλέξαμε είναι τέλειο τετράγωνο''

Δ=''ο αριθμός της κάρτας που επιλέξαμε είναι άρτιος και τέλειο τετράγωνο''
Ε=''ο αριθμός της κάρτας που επιλέξαμε είναι άρτιος ή περιττός''

85. Αν Α είναι ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύει: $P(A)+3[P(A')]^2=\frac{5}{3}$, να βρείτε την πιθανότητα P(A).

86. Αν Α , Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με P(A)=2P(B') και P(B)=3P(A'), να αποδείξετε ότι:

(α) $[P(A)]^2+[P(B)]^2=1$,

(β) τα Α , Β δεν είναι ασυμβίβαστα,

(γ) $P(A\cup B)\geq\frac{4}{5}$,

(δ) $\frac{2}{5}\leq P(A\cap B)\leq\frac{3}{5}$.

87. Αν Α,Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(B')=\frac{1}{2}$ και $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$ να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α.

88. (α)Αν Α , Β είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, να δείξετε ότι $P(A)\leq P(B')$,
(β) Αν Α , Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $B\subset A$, να δείξετε ότι P(A-B)= P(A)- P(B).

89. Ένα κουτί περιέχει 12 άσπρες, χ κόκκινες και ψ μαύρες μπάλες. Παίρνουμε τυχαία μια μπάλα. Η πιθανότητα να πάρουμε κόκκινη μπάλα είναι 1/2 και η πιθανότητα να πάρουμε μαύρη μπάλα είναι 1/3. Να βρείτε πόσες μπάλες υπάρχουν μέσα στο κουτί αρχικά.

90. Αν P(A) είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύει η σχέση $|P(A)+2|-12\lambda=|P(A)-3|-3\lambda$ $(\lambda\in\Re)$, να δείξετε ότι $|\lambda|\leq\frac{1}{9}$.

91. Ένα test έχει τέσσερις ερωτήσεις και κάθε ερώτηση πρέπει να απαντηθεί ή με ένα ΝΑΙ ή με ένα ΟΧΙ. Ένας μαθητής δίνει εντελώς τυχαία τις απαντήσεις στις ερωτήσεις. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει μια τουλάχιστον σωστή απάντηση;

92. Σε έναν αγώνα παίρνουν μέρος τρία αυτοκίνητα. Το 1^o έχει διπλάσια πιθανότητα να κερδίσει απ' ότι το 2^o και το 2^o έχει διπλάσια πιθανότητα να κερδίσει απ' ότι το 3^o. Ποια είναι η πιθανότητα κάθε αυτοκινήτου να κερδίσει τον αγώνα;

93. Μια τάξη έχει 12 αγόρια και 16 κορίτσια. Τα μισά αγόρια και τα μισά κορίτσια έχουν μαύρα μάτια. Παίρνουμε τυχαία ένα άτομο. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι αγόρι ή να έχει μαύρα μάτια.

94. Έστω $\Omega=\{0,1,2,3,4,5\}$ένας δειγματικός χώρος που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Επιλέγουμε τυχαία ένα απλό ενδεχόμενο $\omega\in\Omega$. Αν $f(\chi)=\chi^3-2\omega\chi^2+\omega^2\chi+2\omega+1$, να βρείτε την πιθανότητα η γραφική παράσταση της f να έχει στο σημείο $M(1,f(1))$ εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $\psi=3\chi+4$.

95. Έστω $\Omega=\{0,1,3,4,7,15\}$ένας δειγματικός χώρος που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Επιλέγουμε τυχαία ένα απλό ενδεχόμενο $\omega\in\Omega$. Αν $f(\chi)=2\chi^2-4\chi+\omega$, να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση $f(\chi)=0$

(α) να μην έχει πραγματικές ρίζες,

(β) να έχει μοναδική πραγματική ρίζα.

96. Έστω $\Omega=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ένας δειγματικός χώρος που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Επιλέγουμε τυχαία ένα απλό ενδεχόμενο $\omega\in\Omega$. Αν $f(\chi)=2\chi^3-3\omega\chi^2+6\chi+\omega$, να βρείτε την πιθανότητα η συνάρτηση f να μην έχει τοπικά ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

97. Σε μια έκθεση μεταχειρισμένων αυτοκινήτων, το 20% δεν έχει μηχανή, το 40% δεν έχει λάστιχα και το 15% δεν έχει ούτε μηχανή ούτε λάστιχα. Να βρείτε την πιθανότητα ένα τυχαίως επιλεγέν αυτοκίνητο της έκθεσης να έχει λάστιχα και μηχανή.

98. Σε μια τάξη με 30 μαθητές, οι 15 έχουν ποδήλατο, οι 10 έχουν μοτοσικλέτα και 4 έχουν και τα δύο. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή της τάξης, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α=''να μην έχει ποδήλατο ούτε μοτοσικλέτα''

Β=''να έχει ποδήλατο αλλά όχι μοτοσικλέτα''

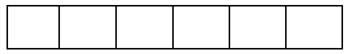
Γ=''να έχει ποδήλατο ή μοτοσικλέτα ή και τα δύο''.

α σ κ ή σ ε ι ς   σ υ ν δ υ α σ τ ι κ ή ς...

99. (α) Πέντε σημεία ενός κύκλου πόσα τρίγωνα ορίζουν;
(β) Να βρεθεί το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου με ν πλευρές.

100. Πόσους εξαψήφιους αριθμούς πολλαπλάσια του 5 μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1,2,3,4,5,6, αν τα ψηφία κάθε αριθμού είναι διαφορετικά μεταξύ τους;

101. Καθένα από τα τετράγωνα της διπλανής ταινίας θα χρωματιστεί με ένα από 10 διαφορετικά χρώματα που έχουμε στη διάθεσή μας. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι χρωματισμού της ταινίας υπάρχουν τέτοιοι, ώστε να μην υπάρχουν δύο τετράγωνα με το ίδιο χρώμα;



102. Με πόσους τρόπους τρεις ταξιδιώτες μπορούν να καταλύσουν σε πέντε ξενοδοχεία μιας πόλης;

103. Ένας μαθητής πρέπει να απαντήσει στις εξετάσεις της Χημείας σε 6 από 9 ερωτήσεις. Πόσες επιλογές έχει;

104. Πόσους διαφορετικούς 5-ψήφιους αριθμούς μπορούμε να γράψουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1 ή 2;

105. Έξω από ένα ταχυδρομικό κατάστημα υπάρχουν 3 γραμματοκιβώτια. Κάποιος θα ρίξει 5 επιστολές. Με πόσους τρόπους μπορεί να διανείμει τις επιστολές στα γραμματοκιβώτια;

106. Σε ένα διαγωνισμό τραγουδιού λαμβάνουν μέρος 20 χώρες. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να συμπληρωθούν οι τρεις πρώτες θέσεις.

107. Σε ένα παιχνίδι 5 παίκτες σκέπτονται ο καθένας έναν αριθμό από τους 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου δύο τουλάχιστον παίκτες να σκέπτονται τον ίδιο αριθμό.

108. Πέντε άτομα μπαίνουν σε ένα ασανσέρ στο ισόγειο ενός 7-όροφου κτηρίου. Κάθε άτομο μπορεί να κατέβει σε οποιοδήποτε όροφο, αρχής γενομένης από τον 1ο όροφο. Να βρείτε την πιθανότητα να κατέβουν όλα τα άτομα σε διαφορετικούς ορόφους.

109. Από τις 20 ασφάλειες φώτων αυτοκινήτου που έχει ένα συνεργείο, οι 5 είναι ελαττωματικές. Ένας οδηγός αγοράζει 3 ασφάλειες. Ποια η πιθανότητα να μην αγόρασε καμία ελαττωματική ασφάλεια;

110. (α) Να βρείτε πόσους αναγραμματισμούς έχει η λέξη «ΠΟΤΑΜΙ»
(β) Πόσοι από τους αναγραμματισμούς αυτούς αρχίζουν με σύμφωνο και τελειώνουν σε φωνήεν;

111. Με τα ψηφία 2,3,4,5 και 6 φτιάχνουμε τριψήφιους αριθμούς τέτοιους, ώστε τα ψηφία τους να είναι διαφορετικά ανά δύο. Να βρείτε πόσοι από τους αριθμούς αυτούς
(α) είναι μικρότεροι του 400,
(β) είναι άρτιοι.

112. Να βρεθεί πόσους αριθμούς μεταξύ των 3000 και 5000 μπορούμε να σχηματίσουμε από τα ψηφία 0,1,2,3,4,8,9 και κάθε ψηφίο να μην επαναλαμβάνεται.

113. Αν οι διατάξεις των ν αντικειμένων ανά 4 είναι πενταπλάσιες των διατάξεων των ν αντικειμένων ανά 3, να βρεθεί το ν.

114. (α) Αν $\Delta_{\kappa}^{4}=24$ και $\binom{4}{\kappa}=4$, να βρεθεί το κ.
(β) Αν $\binom{\nu}{2}=45$, να βρεθεί ο φυσικός αριθμός ν.

115. (α) Από μια τράπουλα με 52 χαρτιά παίρνουμε τυχαία 6 χαρτιά. Ποια η πιθανότητα να πάρουμε 2 μαύρα και 4 κόκκινα;
(τα μισά χαρτιά της τράπουλας είναι μαύρα και τα άλλα μισά κόκκινα)
(β) Από μια τράπουλα με 52 χαρτιά παίρνουμε τυχαία 2 χαρτιά. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι και τα δύο χαρτιά ντάμες;

116. Σε μια συζήτηση παίρνουν μέρος 3 μαθηματικοί, 5 χημικοί και 4 φυσικοί. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν στη σειρά έτσι, ώστε τα μέλη της ίδιας ειδικότητας να κάθονται μαζί;

α σ κ ή σ ε ι ς   δ ε σ μ ε υ μ έ ν η ς   π ι θ α ν ό τ η τ α ς...

117. Αν ισχύει $P(A\cap B)\neq 0$ και $P(A) > P(B)$, να δειχθεί ότι $P(A|B) > P(B|A)$.

118. Να αποδειχθεί ότι αν για ένα ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A)>0$, τότε:

(α) $P(\Omega|A)=1$,

(β) αν $A\subset B$ τότε $P(B|A)=1$,

(γ) αν $B\subset A$ τότε $P(B|A)=\frac{P(B)}{P(A)}$.

119. (α) Αν για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{2}{5}$ και $P(A\cup B)=\frac{3}{5}$ να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα.

(β) Αν για δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A)=\frac{1}{4}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{7}$, να βρείτε την πιθανότητα $P(A\cup B)$.

(γ) Αν για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(B|A)=\frac{4}{5}$, $P(B|A')=\frac{1}{4}$ και $P(A)=\frac{2}{5}$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(B)$ και $P(A|B)$.

120. Ένα κουτί περιέχει 20 σφαίρες που κάθε μια φέρει έναν αριθμό από το 1 έως και το 20. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Αν ο αριθμός της σφαίρας που επιλέξαμε διαιρείται με το 5, να βρείτε την πιθανότητα ο αριθμός αυτός να είναι άρτιος.

121. Έστω Α είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(\chi)=(\frac{6}{\chi})!$. Ρίχνουμε ένα ζάρι και παρατηρούμε ότι εμφανίζεται ένας αριθμός από το σύνολο Α. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει εμφανισθεί ο αριθμός 3;

122. Ένα κουτί έχει 14 λάμπες εκ των οποίων οι 5 είναι ''καμένες''. Διαλέγουμε τυχαία δύο λάμπες τη μια μετά την άλλη χωρίς επανατοποθέτηση. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:
Α='' και οι δύο λάμπες που πήραμε είναι καμένες''
Β=''καμία λάμπα δεν είναι καμένη''
Γ=''τουλάχιστον μια λάμπα είναι καμένη''.

123. Ένα χαρτί λαμβάνεται τυχαίως από μια τράπουλα με 52 φύλλα. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
Α=''το χαρτί που πήραμε είναι σπαθί''
Β=''το χαρτί που πήραμε είναι άσος''.
Να βρείτε την πιθανότητα $P(A|B)$. Είναι τα ενδεχόμενα Α , Β ανεξάρτητα;

124. Έχουμε δύο δοχεία Δ_1 και Δ_2. Το Δ_1 έχει 10 άσπρες σφαίρες και 6 μαύρες και το Δ_2 έχει 8 άσπρες και 12 μαύρες. Παίρνουμε μια σφαίρα από κάθε δοχείο. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:
Α=''και οι δύο σφαίρες είναι άσπρες''
Β=''οι δύο σφαίρες είναι διαφορετικού χρώματος''.

125. Η πιθανότητα να ζει κάποιος μετά 30 έτη είναι $\frac{2}{3}$ ενώ η πιθανότητα να ζει η σύζυγός του μετά 30 έτη είναι $\frac{3}{5}$. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
Α='' να ζουν και οι δύο μετά 30 έτη''
Β=''να ζει μόνο η σύζυγος μετά 30 έτη''
Γ=''να ζει τουλάχιστον ένας μετά 30 έτη''
Δ=''να ζει μόνο ο ένας μετά 30 έτη''.

126. Μια κάλπη Ι περιέχει 3 άσπρα και 2 μαύρα σφαιρίδια ενώ μια άλλη κάλπη ΙΙ περιέχει 2 άσπρα και 1 μαύρο σφαιρίδιο. Κάνουμε το εξής πείραμα: Διαλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την κάλπη Ι και το μεταφέρουμε στην κάλπη ΙΙ. Στη συνέχεια παίρνουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την κάλπη ΙΙ. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου από την κάλπη ΙΙ.
