

ΣΤΡΑΤΗΣ ΑΝΤΩΝΕΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$



$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$$



$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κεφάλαιο 1ο

Κεφάλαιο 1ο

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

- *Πράξεις με Πραγματικούς αριθμούς.*
- *Μονώνυμα - Πράξεις με μονώνυμα*
- *Πολυώνυμα - Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων*
- *Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων*
- *Αξιοσημείωτες ταυτότητες*
- *Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων*
- *Διαίρεση πολυωνύμων*
- *Ε.Κ.Π και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων*
- *Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις*
- *Πράξεις Ρητών παραστάσεων*

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

1.1. Ποιές είναι οι ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού;

Απάντηση:

Οι ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός	Ιδιότητα
$a + \beta = \beta + a$	$a \cdot \beta = \beta \cdot a$	αντιμεταθετική
$(a + \beta) + \gamma = a + (\beta + \gamma)$	$a \cdot (\beta \cdot \gamma) = (a \cdot \beta) \cdot \gamma$	προσεταιριστική
$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$	
$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1, a \neq 0$	
$a \cdot (\beta + \gamma) = a \cdot \beta + a \cdot \gamma$		επιμεριστική
$a \cdot 0 = 0$		

1.2. Να γράψετε τους ορισμούς και τις ιδιότητες των δυνάμεων.

Απάντηση:Ορισμοί:

Αν a πραγματικός αριθμός και n φυσικός με $n \geq 2$ τότε ορίζουμε:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-παράγοντες}}$$

Για $n = 1$ ορίζουμε $a^1 = a$.

Για $a \neq 0$, ορίζουμε $a^0 = 1$ και

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Είναι $\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-n} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^n, a, \beta \neq 0$

Ιδιότητες:

Με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται έχουμε:

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2. \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$3. a^n \cdot \beta^n = (a \cdot \beta)^n$$

$$4. \frac{a^n}{\beta^n} = \left(\frac{a}{\beta}\right)^n$$

$$5. (a^m)^n = a^{mn}$$

1.3. Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a ;Απάντηση:

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a , ονομάζουμε τον θετικό αριθμό που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό a .

Δηλαδή $\sqrt{a} = x$, τότε $x^2 = a$ ή $(\sqrt{a})^2 = a$.

Ακόμα ορίζουμε $\sqrt{0} = 0$.

1.4. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{a \cdot \beta}$, με $a, \beta \geq 0$.Απάντηση:

Υψώνουμε κάθε μέλος της ισότητας στο τετράγωνο και έχουμε:

Από το 1^ο μέλος: $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{\beta})^2 = a \cdot \beta$

Από το 2^ο μέλος: $(\sqrt{a \cdot \beta})^2 = a \cdot \beta$

Άρα $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{a \cdot \beta})^2$ και επομένως $\sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{a \cdot \beta}$.

1.5. Να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{a}{\beta}}$ με $a \geq 0$ και $\beta > 0$.

Απάντηση:

Υψώνουμε κάθε μέλος της ισότητας στο τετράγωνο και έχουμε:

$$\text{Από το 1}^\circ \text{ μέλος: } \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{\beta})^2} = \frac{a}{\beta}$$

$$\text{Από το 2}^\circ \text{ μέλος: } \left(\sqrt{\frac{a}{\beta}}\right)^2 = \frac{a}{\beta}$$

$$\text{Άρα } \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{\beta}}\right)^2 \text{ και επομένως } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{a}{\beta}}.$$

1.5.1. Αν $a > 0$ και $\beta > 0$ τότε $\sqrt{a+\beta} \neq \sqrt{a} + \sqrt{\beta}$

Η ισότητα $\sqrt{a+\beta} = \sqrt{a} + \sqrt{\beta}$ ισχύει αν ένας τουλάχιστον είναι ίσος με 0.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A' Ομάδα

1.6. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 2003 - \frac{6-10x+2(4x-y-3)}{3(x-z)+3(y+z)} - 2\left(x + \frac{1}{3}\right) - 2y,$$

αν είναι $x + y = 2003$.

[Απ. $A = -2003$]

1.12. Αν $x = 2$ και $y = 10^{-1}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 5^{-1} \cdot (x^{-1} - y^{-1} - 2x^{-1}y)$$

[Απ. $-\frac{48}{25}$]

1.7. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\Pi = \frac{12^{15} \cdot 18^{17}}{36^{24}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

[Απ. $\Pi = 1$]

1.13. Δείξτε ότι $\sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}} = 6$.

1.14. Δείξτε ότι $\sqrt{24\sqrt{6}\sqrt{9}\sqrt{16}} = 12$.

1.8. Να μετατρέψετε την παράσταση:

$$(5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5)^2 \cdot (2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2)^2$$

σε δύναμη με βάση το 10.

[Απ. 10^{12}]

1.15. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{24}$

β) $\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{12}{5}} \cdot \sqrt{\frac{45}{4}}$

[Απ. α) 12 β) 3]

1.9. Να μετατρέψετε την παράσταση:

$$(3^3)^3 : 3^3 + 3^3 \cdot 3^3 + \left(\frac{3^3}{3}\right)^3$$

σε δύναμη με βάση το 3.

[Απ. 3^7]

1.16. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $\frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{2}}$ β)

[Απ. α) 2 β)]

1.10. Αν ισχύει $\frac{3x+4y}{2x-2y} = 5$ να αποδείξετε ότι το κλάσμα

$$A = \frac{x^2+2y^2}{xy} \text{ έχει σταθερή τιμή.}$$

[Απ. $A=3$]

1.17. Να εξετάσετε αν η παράσταση:

$$\sqrt{\sqrt{16}} + 2\sqrt{\sqrt{81}} - \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$$

είναι πολλαπλάσιο του 7.

[Απ. $14 = \text{πολ. } 7$]

1.11. Αν $x = 0,03$ και $y = \frac{3}{10}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \left[(x^{-3}y^5)^{-2} \cdot \frac{x^7}{y^{11}} \right]^3.$$

[Απ. $A=1000$]

1.18. Αν α, β είναι μη αρνητικοί αριθμοί, να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\sqrt{49-2\beta + \sqrt{4\beta^2 + \alpha - \sqrt{\alpha^2}}}$$

[Απ. 7]

1.19. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{4+\sqrt{12}}{2} \quad \text{και} \quad B = \frac{8-\sqrt{20}}{2}$$

[Απ. $A=2+\sqrt{3}$, $B=4-\sqrt{5}$]

1.20. Αν x, y είναι μη αρνητικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι η παράσταση:

$$5x\sqrt{xy^3} - 2y\sqrt{x^3y} - 3\sqrt{x^3y^3}$$

είναι ίση με μηδέν.

1.21. Να βρείτε το εμβαδόν ενός τριγώνου με μια πλευρά $\sqrt{12}$ cm και αντίστοιχο ύψος $\sqrt{3}$ cm.

[Απ. $E=3\text{cm}^2$]

1.22. Να βρείτε το αποτέλεσμα:

i) $\sqrt{6-\sqrt{11}} \cdot \sqrt{6+\sqrt{11}}$
 ii) $\sqrt{\sqrt{19}+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3}}$

[Απ. i) 5 ii) 4]

1.23. Αν $A = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ και $B = \sqrt{12} - \sqrt{8}$, να υπολογιστούν οι παραστάσεις: $A+B$, $A-B$, $A \cdot B$.

[Απ. $A+B=3\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $A-B=3\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $AB=2$]

1.24. Να απλοποιήσετε οι παραστάσεις

i) $A = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ ii) $B = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{2}+5\sqrt{2}}{8\sqrt{8}}$

[Απ. i) $A=6$ ii) $B=\frac{1}{2}$]

1.25. Να βρείτε το αποτέλεσμα:

$$\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

[Απ. 7]

1.26. Να λύσετε την εξίσωση:

$$x\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{5}(1-x)$$

[Απ. $x=1$]

1.27. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{x+1}{\sqrt{5}+1}$$

[Απ. $x=\sqrt{5}$]

1.28. Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης

$$\left(\frac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + 13\right) : \sqrt{3} \quad \text{είναι ίση με } 6.$$

1.29. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{60} - \sqrt{\frac{3}{5}}\right) : \frac{32\sqrt{15}}{15} = 1.$$

1.30. Ένα τραπέζιο έχει βάσεις $\sqrt{27}$ cm και $\sqrt{12}$ cm και ύψος $2\sqrt{3}$ cm. Πόσες φορές είναι μεγαλύτερο το εμβαδόν του από το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς $\sqrt{5}$ cm;

[Απ. 3 φορές]

* * * * *

β' Ομάδα

3.1. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2})^2}} + \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2}+2)^2}} = 1.$

3.2. Να συμπληρώσετε το παρακάτω τετράγωνο ώστε να γίνει “**μαγικό**”, δηλαδή όλες του οι γραμμές, οι στήλες και οι διαγώνιοι να έχουν το ίδιο άθροισμα.

$\sqrt{32}$		
$9\sqrt{2}$	$\sqrt{50}$	
$\sqrt{8}$		

3.3. Να υπολογιστεί η παράσταση $\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$

[Απ. 16]

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.**ΜΟΝΩΝΥΜΑ - ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΜΟΝΩΝΥΜΑ****2.1. Τι ονομάζουμε αλγεβρικές παραστάσεις;****Απάντηση:**

Οι εκφράσεις που περιέχουν μεταβλητές, λέγονται **αλγεβρικές παραστάσεις**.

2.1.1. Για παράδειγμα, αλγεβρικές παραστάσεις είναι: $5x$, $4\alpha - 1$, $\sqrt{3} \alpha^2 + 9\beta$, $2,6\kappa^4 + \lambda\mu^3$

2.2. Τι ονομάζουμε αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης;**Απάντηση:**

Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις που σημειώνονται, προκύπτει ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** της αλγεβρικής παράστασης.

2.2.1. Για παράδειγμα: Αν για $\alpha = -2$ η τιμή της αλγεβρικής παράστασης $3\alpha^2 - 5\alpha - 8$ είναι
 $3(-2)^2 - 5(-2) - 8 = 3 \cdot 4 + 10 - 8 = 12 + 10 - 8 = 14$.

2.3. Τι ονομάζουμε μονώνυμο;**Απάντηση:**

Μονώνυμο ονομάζουμε την αλγεβρική παράσταση που σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού.

2.3.1. Παραδείγματα μονωνύμων: 3 , α , $\frac{3}{5}x^2$, $-\sqrt{2} \alpha^3\beta^4$, $4,35\kappa^6\lambda^2\mu^9$.

2.4. Ποια μονώνυμα λέγονται όμοια;**Απάντηση:**

Δύο ή περισσότερα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος λέγονται **όμοια μονώνυμα**.

2.4.1. Για παράδειγμα: Τα μονώνυμα $\frac{\sqrt{3}}{2} \alpha^2\beta\gamma^5$, $-9\alpha^2\beta\gamma^5$, $2,7\alpha^2\beta\gamma^5$ είναι όμοια.

2.5. Πως βρίσκουμε το άθροισμα όμοιων μονωνύμων;**Απάντηση:**

Το άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι ένα όμοια με αυτά μονώνυμο που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

2.5.1. **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:** Το άθροισμα των όμοιων μονωνύμων $5\alpha^2\beta$, $\alpha^2\beta$, $-2\alpha^2\beta$ είναι:
 $5\alpha^2\beta + \alpha^2\beta + (-2\alpha^2\beta) = (5 + 1 - 2)\alpha^2\beta = 4\alpha^2\beta$.

2.6. Τι ονομάζουμε πολυώνυμο;**Απάντηση:**

Πολυώνυμο ονομάζουμε την αλγεβρική παράσταση που είναι άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια.

2.6.1. Για παράδειγμα: $3x^2 - 1$, $5\alpha^3\beta^2 + 3,2\alpha^2\beta^2$, $6\mu^2 - \sqrt{5} \mu\nu^3 + \frac{4}{3} \mu^2\nu\rho^5$.

2.7. Πως βρίσκουμε το γινόμενο μονωνύμων;**Απάντηση:**

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο που έχει συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και ως κύριο μέρος όλες τις μεταβλητές με εκθέτη σε καθεμιά το άθροισμα των εκθετών τους.

2.7.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Το γινόμενο των μονωνύμων $2\alpha^2\beta$, $-\frac{3}{4}a\beta^5\gamma^4$, $-a\beta\gamma^5x$ είναι:

$$(2\alpha^2\beta) \cdot (-\frac{3}{4}a\beta^5\gamma^4) \cdot (-a\beta x) = 2(-\frac{3}{4})(-1)\alpha^2 a \cdot \beta\beta^5\beta \cdot \gamma^4\gamma^3 \cdot x = \frac{3}{2}\alpha^4\beta^7\gamma^9x.$$

2.8. Πως βρίσκουμε το πηλίκο δύο μονωνύμων;**Απάντηση:**

Το πηλίκο δύο μονωνύμων βρίσκεται, όπως και στους αριθμούς, με πολλαπλασιασμό επί τον αντίστροφο του διαιρέτη.

2.8.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: (1) $12\alpha^5\beta^2\gamma : (-3\alpha^3\beta\gamma) = 12\alpha^5\beta^2\gamma \cdot \frac{1}{-3\alpha^3\beta\gamma} = \frac{12\alpha^5\beta^2\gamma}{-3\alpha^3\beta\gamma} = \frac{12}{-3} \cdot \frac{\alpha^5}{\alpha^3} \cdot \frac{\beta^2}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\gamma} = -4\alpha^2\beta.$

$$(2) (-10x^2y^2\omega) : (-5xy^4\omega) = (-10x^2y^2\omega) \cdot \frac{1}{-5xy^4\omega} = \frac{-10x^2y^2\omega}{-5xy^4\omega} = \frac{-10}{-5} \cdot \frac{x^2}{x} \cdot \frac{y^2}{y^4} \cdot \frac{\omega}{\omega} = \frac{2x^2}{y^2}.$$

2.8.2. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι το πηλίκο δύο μονωνύμων ΔΕΝ είναι πάντοτε μονώνυμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.9. Να βρείτε ποιες από τις επόμενες παραστάσεις είναι μονώνυμα

- i) $\sqrt{3}\alpha^3\beta^2\gamma$ ii) $-1,4x^4y^5$ iii) $\frac{2x^2}{y}$
 iv) $4x^6\omega^{-3}$ v) $x - \frac{1}{x}$ vi) $(1 + \sqrt{5})\kappa\lambda$

ii) $-\frac{1}{3}xy^3\omega - x\omega y^3 - \frac{2}{3}y^3\omega x + \frac{5xy^3\omega}{6}$

iii) $\frac{3}{4}\kappa^3\lambda^2\mu^4 - 2\kappa^3\lambda^2\mu^4 - 1,25\kappa^3\mu^4\lambda^2 + 1\frac{4}{5}\kappa^3\lambda^2\mu^4$

2.10. Αν $x+y = -2$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$x(x-3) + y(y-3) + 2xy$$

[Απ. 10]

2.15. Δίνονται τα μονώνυμα $-3x^{2\alpha-3}y^{\beta+2}$, $2x^3y^{4-\beta}$.
 Να βρείτε τις τιμές των α , β ώστε τα παραπάνω μονώνυμα να είναι όμοια.

[Απ. $\alpha=3$, $\beta=1$]

2.11. Να αντικαταστήσετε τα κενά με τα κατάλληλα μονώνυμα στην ισότητα

- a) $3ax^2y - 7ax^2y - 5x^3y^5 + 7ax^2y + \dots + \dots = 5ax^2y$
 β) $0,6\alpha^3\beta^2\gamma + \dots - \alpha^3\gamma^2 - \frac{3}{5}\alpha^3\beta^2\gamma + \dots + 4\gamma^2\alpha^3 = -2\alpha^3\gamma^2$

2.12. Για ποια τιμή του κ η αλγεβρική παράσταση $(5\kappa+4)\alpha^4\beta^3\gamma$

είναι το μηδενικό μονώνυμο;

2.13. Να βρείτε ποια από τα επόμενα μονώνυμα

$$-2x^2, \frac{1}{2}xy^2, -x^2y, yx^2, 2x^2y^2, -\frac{x^2}{3}, -\frac{1}{2}x^2$$

είναι όμοια.

2.14. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $2x^2y - 3x^2y - x^2y + \frac{1}{2}x^2y$

2.16. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους αριθμούς κ , μ ώστε να είναι μονώνυμο η αλγεβρική παράσταση:

$$2\alpha^{\kappa+1}x^2 + 5\alpha^3x^{\mu+2}$$

2.17. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους αριθμούς λ , μ ώστε να είναι μονώνυμο η αλγεβρική παράσταση:

$$-3\alpha^2x^2y^{\mu+7} + 2\alpha^2x^{\lambda+1}y^{12}$$

2.18. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $2xy^2 \cdot (-3x^2y^4)$ ii) $(-\frac{2}{3}\alpha^3) \cdot (-\frac{3}{4}ay^2)$

iii) $\frac{2}{5}x^2y^3\omega \cdot (-\frac{15}{8}x^5y^3\omega)$

iv) $2xy^2 \cdot (-4x^3y) \cdot (-x^4y^6)$

v) $xy \cdot (-\alpha^2\beta^2\gamma) \cdot 4\alpha^3\gamma^5 \cdot (-\frac{1}{2}\alpha^3\beta\gamma^2)$

2.19. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $(-\frac{1}{2}\alpha^2\beta)^3 \cdot (-2\beta^3\alpha^5) \cdot (-3\alpha\beta^4\gamma^2)$

ii) $(-2x^3y^2\omega)^2 \cdot (\frac{1}{2}x\omega^2y^4)^3$

$$\text{iii) } (-3\kappa\lambda^2\mu^3)^3 \cdot (-\kappa^4\lambda\mu^2)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\mu\kappa^5\lambda^6\right)^2$$

$$\text{v) } (-3a^4x^2\beta^5y)^3 \cdot (\sqrt{2}a\beta^4xy^3)^2 \cdot (-ax^6y^2)^4$$

2.20. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\text{i) } -12x^8 : (-6x^5)$$

$$\text{ii) } (-24a^9\beta^7) : (6a^5\beta^3)$$

$$\text{iii) } (-18a^2\beta^3) : (9a^3\beta)$$

$$\text{iv) } 10xy^4z^3 : (-15x^3y^4z^5)$$

2.21. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

$$\text{i) } [2x^3y^4 \cdot (-6x^2y)] : (-4x^5y^7)$$

$$\text{ii) } [(-4a^2\beta^3x) \cdot a^5x^3] \cdot \left(-\frac{1}{2}a^6\beta x\right) : (-14a^{11}\beta^5x^4)$$

$$\text{iii) } \left(-\frac{2}{3}a^3x^5\right)^3 : \left(-\frac{4}{9}a^4x^4\right)^2$$

$$\text{iv) } \left[\left(-\frac{1}{3}\kappa^2\lambda^3\mu\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\kappa\lambda^4\right)^3\right] : \left(-\frac{3}{4}\mu^2\lambda\right)^2$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.**ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ****3.1. Τι ονομάζουμε αναγωγή των όμοιων όρων;****Απάντηση:**

Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τους όμοιους όρους με το άθροισμά τους, η εργασία αυτή λέγεται **αναγωγή των όμοιων όρων**.

3.1.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $5a^2 - 3a + 6b + 2 + 9b - a^2 + 3 - b - 2 + a = 4a^2 - 2a + 14b + 3.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**3.2. Να κάνετε τις αναγωγές των όμοιων όρων**

- i) $4x^2 - 3x^3 + 5x - 2x^2 + 7 - x - 2 + 3x^2 + 4x^3$
- ii) $5x^4 - 3x^2 + 2x - 7x^4 - 3x^3 - 1 - 2x + 4 - 5x^2$
- iii) $ax^2 + 2x + 3ax^2 - x + 5 - 4x$
- iv) $2a^3x - 6a^2x^2 + 5a^3x + a^3 - 2a^4 + x^4$

3.3. Αν $A = x^2 - 3x + 1$, $B = -x^2 + 2x + 5$ και $\Gamma = 2x^2 - x - 3$

να βρεθούν τα επόμενα αθροίσματα

- i) $A + B$
- ii) $A + B + \Gamma$
- iii) $A - B - \Gamma$

3.4. Να κάνετε τις πράξεις:

- i) $3x^2 - [(5x^3 - x) + 4x^2 - (2x^2 + 6)] + (-2x^2 - 5x)$
- ii) $5a^3 - (2a^2 + a - 3) + [-(3a^2 - 2a - 4) + (-2 + 6a)]$

3.5. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

- i) $(2x - 3) - [-2x - (x^2 - 2)] - \{x^2 - [3x + 4 - (x^2 - 1)]\}$
- ii) $3x^2 - \{x^2 - [x - (1 - x^3)] + 2x\} - \{2x^3 + [x + (x^2 - 3) - 3x^2] - 1\} - 4$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.**ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ****4.1. Πως πολλαπλασιάζουμε μονώνυμο με πολυώνυμο;****Απάντηση:**

Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυώνυμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

4.1.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $(2\alpha^2\beta) \cdot (3\alpha\beta - \frac{1}{2}\beta^3\gamma^2 + 4) = 6\alpha^3\beta^2 - \alpha^2\beta^3\gamma^2 + 8\alpha^2\beta.$

4.2. Πως πολλαπλασιάζουμε δύο πολυώνυμα;**Απάντηση:**

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός με κάθε όρο του άλλου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

4.2.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $(\alpha - 2) \cdot (\alpha^2 - 3\alpha - 4) = \alpha^3 - 3\alpha^2 - 4\alpha - 2\alpha^2 + 6\alpha + 8$
 $= \alpha^3 - 5\alpha^2 + 2\alpha + 8$

4.2.2. ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Όταν κάνουμε τον πολλαπλασιασμό μονωνύμου με πολυώνυμο ή δύο πολυωνύμων, λέμε πολλές φορές ότι **αναπτύσσουμε** τα γινόμενα αυτά και το αποτέλεσμα λέγεται **ανάπτυγμα του γινομένου**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**4.3. Να γίνουν οι πράξεις:**

$$(x^2 - 2y)3y + (xy + y^2)(-x) + (x+y)(-2xy) - (x+3)2y^2.$$

Μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή του εξαγόμενου για $x = 2$ και $y = -1$.

4.4. Να δείξετε ότι η αλγεβρική παράσταση

$$2x(\alpha^2 - \alpha + 1) - (\alpha + 1)(\alpha - 2) - x(\alpha^2 + 2) + \alpha$$

έχει σταθερή τιμή για τις διάφορες τιμές των α, x .

4.5. Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις και μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή του εξαγόμενου για τις τιμές των μεταβλητών που αναφέρονται.

α) $(2x+3)(x^2+x-1) - (x^2-1)(x+2) - 2x^3$, $x = -2$.

β) $(x^2y - 2xy^2)(2x - y) - 2x^3(x+y) - (x-y)(-2y^3)$, $x = -1$, και $y = 2$.

4.6. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $3x(x^2 - 1) - 4x^2(x + 2) - 3x + 4(x^2 - 1)$

β) $-5x^2(x^3 - 2x^2 + 4) + (1 - 2x)(-4x^3) - x(x - 1) - 2x$

γ) $2\alpha(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) - \beta^3 - (\alpha - \beta)(-3\alpha\beta) - 4\alpha^2\beta$

δ) $3[x^2 - (x+4) - 3] - 2x^2[x + (x-2)] - 5$

ε) $2\alpha\{\alpha\beta - [\alpha^2 - (-\alpha\beta + 4)] + 2\} - 3(\alpha^2 - 2)$

4.7. Να αντικατασταθούν οι παρακάτω αστερίσκοι έτσι, ώστε να ισχύει κάθε μια από τις ισότητες:

α) $* \cdot (4\beta^2 - 7\beta + 8) = 28\beta^3 - 49\beta^2 + 56\beta$

β) $* \cdot (3x^2 + 8x - 7) = 36x^5 + * - *$

γ) $5\alpha^2\beta^3(* - 9\beta^2 + *) = 20\alpha^5\beta^7 - * + \alpha^4\beta^9$

4.8. Να εκτελέσετε τους πολλαπλασιασμούς:

α) $(3x+1)(2x-3)$

β) $(3x^2 - 2x + 4)(2x - 5)$

γ) $(x+2)(x-2)(x+5)$

δ) $(x+1)(x+2)(x+3)$

4.9. Να εκτελέσετε τους πολλαπλασιασμούς:

α) $(\kappa - 2)(1 - \kappa)(2\kappa - 3)$

β) $\mu(\mu - 3)(4\mu + 1)(2 - \mu)$

γ) $(x - 1)(2x - 5)(x^2 + 5x - 1)$

δ) $(\alpha + 3)(2 - \alpha)(\alpha^2 - 2\alpha - 1)(4 - \alpha^2)$

4.10. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $(x-3)(1-x) + (x^2-x+2)(x-2+x^2)$

ii) $a(a+1)(2-a) - (2a^2+a-3)(3-a+2a^2)$

4.11. Αν $A = a^2 - a + 1$, $B = a + 2$ και $\Gamma = a - 1$ να βρεθούν τα εξαγόμενα:

$$A \cdot B, B \cdot \Gamma, A \cdot \Gamma \text{ και } A \cdot B + B \cdot \Gamma - \Gamma \cdot A.$$

4.12. Αν $K = 4x - 1$, $\Lambda = x - 2$ και $M = x^2 + x - 1$ να βρεθούν τα εξαγόμενα:

$$K \cdot \Lambda, \Lambda \cdot M, K \cdot M \text{ και } K \cdot \Lambda - K \cdot (\Lambda \cdot M - K \cdot M).$$

4.13. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

$$(x-2y)(4x-3y) - \left[(2x-5y) \left(2x - \frac{11}{3}y \right) - \left(\frac{37}{3}y^2 - 2xy \right) \right]$$

4.14. Ένα τραπέζιο έχει βάσεις x , $2x$ και ύψος $\frac{x}{2}$.

Ένα τετράγωνο έχει πλευρά x . Να βρείτε το λόγο των εμβαδών του τραπεζίου και του τετραγώνου.

[Απ. $\frac{3}{4}$]

ΕΝΟΤΗΤΑ 5.**ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ****5.1. Τι ονομάζουμε ταυτότητα;****Απάντηση:**

Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών λέγεται **ταυτότητα**.

5.1.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

(i) $a(a - 2) = a^2 - 2a$

(ii) $(x + 2)(x + 5) = x^2 + 7x + 10$

(iii) $\kappa^2 + \lambda^2 = (\kappa + \lambda)^2 - 2\kappa\lambda$

Τετράγωνο αθροίσματος**5.2. Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.****Απάντηση:**

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } (\alpha + \beta)^2 &= (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) \\ &= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 \\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2. \end{aligned}$$

5.2.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: (i) $(\alpha + 3)^2 = \alpha^2 + 2\alpha \cdot 3 + 3^2 = \alpha^2 + 6\alpha + 9$.

(ii) $(5x + 4y)^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 4y + (4y)^2 = 25x^2 + 40xy + 16y^2$.

(iii) $(2\mu^3 + \frac{1}{4}v^2)^2 = (2\mu^3)^2 + 2 \cdot 2\mu^3 \cdot \frac{1}{4}v^2 + (\frac{1}{4}v^2)^2 = 4\mu^6 + \mu^3v^2 + \frac{1}{16}v^4$.

Τετράγωνο διαφοράς**5.3. Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$.****Απάντηση:**

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) \\ &= \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 \\ &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2. \end{aligned}$$

5.3.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: (i) $(\beta - 11)^2 = \beta^2 - 2\beta \cdot 11 + 11^2 = \beta^2 - 22\beta + 121$.

(ii) $(-6x^2 + 7a)^2 = (7a - 6x^2)^2 = (7a)^2 - 2 \cdot 7a \cdot 6x^2 + (6x^2)^2 = 49a^2 - 84ax^2 + 36x^4$.

$$\begin{aligned} \text{(iii) } \left(-\frac{\kappa^4}{2} - 4\lambda\mu^3\right)^2 &= \left[-\left(\frac{\kappa^4}{2} + 4\lambda\mu^3\right)\right]^2 = \left(\frac{\kappa^4}{2} + 4\lambda\mu^3\right)^2 = \left(\frac{\kappa^4}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\kappa^4}{2} \cdot 4\lambda\mu^3 + (4\lambda\mu^3)^2 \\ &= \frac{\kappa^8}{4} + 4\kappa^4\lambda\mu^3 + 16\lambda^2\mu^6. \end{aligned}$$

Κύβος αθροίσματος5.4. Να αποδείξετε την ταυτότητα $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.Απάντηση:

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Κύβος διαφοράς5.5. Να αποδείξετε την ταυτότητα $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.Απάντηση:

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } (a - b)^3 &= (a - b)(a - b)^2 \\ &= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \end{aligned}$$

Γινόμενο αθροίσματος επί διαφοράς5.6. Να αποδείξετε την ταυτότητα $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.Απάντηση:

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } (a + b)(a - b) &= a^2 - ab + ba - b^2 \\ &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

5.6.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: (i) $(9ax + 2by)(9ax - 2by) = (9ax)^2 - (2by)^2 = 81a^2x^2 - 4b^2y^2$.

(ii) $(-3\mu^5 + \lambda^3\nu^2)(3\mu^5 + \lambda^3\nu^2) = (\lambda^3\nu^2 - 3\mu^5)(\lambda^3\nu^2 + 3\mu^5) = (\lambda^3\nu^2)^2 - (3\mu^5)^2 = \lambda^6\nu^4 - 9\mu^{10}$.

Διαφορά κύβων - Άθροισμα κύβων5.7. Να αποδείξετε τις ταυτότητες (i) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
(ii) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.Απάντηση:(i) Το 2^ο μέλος της ταυτότητας γράφεται:

$$\begin{aligned} (a - b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3. \end{aligned}$$

(ii) Το 2^ο μέλος της ταυτότητας γράφεται:

$$\begin{aligned} (a + b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + b^3. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣΑ' Ομάδα

5.8. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\begin{array}{lll} \alpha) (x + 5)^2 & \beta) (2x - 3)^2 & \gamma) (3a - 7b)^2 \\ \delta) (3xy + 2)^2 & \epsilon) (x^2 - 4y)^2 & \sigma\tau) (2a^3 - ab^2)^2 \end{array}$$

5.9. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\begin{array}{ll} \alpha) \left(\frac{3}{2}x^2 + 4xy\right)^2 & \beta) \left(7a - \frac{3}{2}b^2\right)^2 \\ \gamma) \left(3a - \frac{1}{2a}\right)^2 & \delta) \left(-\frac{3}{4a^2} + 2a^3b\right)^2 \\ \epsilon) \left(\frac{5}{6}x^2y^4 - \frac{2}{xy}\right)^2 & \sigma\tau) \left(\frac{1}{2}ab^2\gamma^3 - \frac{6}{\beta\gamma^2}\right)^2 \end{array}$$

5.10. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\begin{array}{ll} \alpha) (-a^2 + 2b^4)^2 & \beta) (-2x^3 + \frac{y^2}{4})^2 \\ \gamma) \left(-\frac{2}{3}a^2x^3 - \frac{3}{4}b^5\right)^2 & \delta) \left(-\frac{1}{4}x^2y^3 - \frac{11}{6x^2y}\right)^2 \end{array}$$

5.11. Να μετατρέψετε την παράσταση $(a + b)^2 + 2(a\gamma + b\gamma)$ σε μία δύναμη.

5.12. Να συμπληρώσετε τα κενά έτσι ώστε να προκύψουν τέλεια τετράγωνα και μετά να τα γράψετε ως τέλεια τετράγωνα:

$$\begin{array}{ll} \alpha) x^2 + 2ax + \dots & \beta) 4x^2 + 4xy + \dots \\ \gamma) 9a^2 - 6ab + \dots & \delta) x^2 + 4y^2 + \dots \end{array}$$

$$\begin{aligned} \epsilon) & 25\alpha^2 + 4\beta^2 + \dots \\ \zeta) & 40\chi\gamma + 16x^2 + \dots \\ \theta) & 12\mu^3\nu^2 + 4\nu^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\tau) & 81\mu^2 + 49\nu^2 - \dots \\ \eta) & -60\kappa\lambda + 9\kappa^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\delta) (2x+3)^2 + (2x-3)^2 + (2x+3)(2x-3) - 3(x-5)^2$$

5.13. Να συμπληρώσετε τα κενά έτσι ώστε να προκύψουν τέλεια τετράγωνα και μετά να τα γράψετε ως τέλεια τετράγωνα:

$$\begin{aligned} \alpha) & \alpha^2 - \alpha\beta + \dots & \beta) & \alpha^2 + \frac{1}{4} + \dots \\ \gamma) & x^2 + \frac{6}{5}x + \dots & \delta) & 49\alpha^6 + \beta^8 + \dots \\ \epsilon) & \frac{9}{4}x^2 - 6xy + \dots & \sigma\tau) & \frac{25}{4}\alpha^2 - 5\beta + \dots \end{aligned}$$

5.14. Αν $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

5.15. Να αποδείξετε ότι η αριθμητική τιμή της παράστασης $A = (2\nu+3)^2 - (2\nu-3)^2$ είναι πάντοτε πολλαπλάσιο του 24, όταν ο ν παίρνει ακέραιες τιμές.

5.16. i) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\kappa^2 + \lambda^2$ και $2\kappa\lambda$.
ii) Με τη βοήθεια της προηγούμενης σύγκρισης να αποδείξετε ότι:
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

5.17. Να βρείτε τα γινόμενα:

$$\begin{aligned} \alpha) & (4x+3)(4x-3) & \beta) & (\alpha\beta+2)(\alpha\beta-2) \\ \gamma) & (5\alpha-2\beta^3)(5\alpha+2\beta^3) & \delta) & (2x^2y^4-3a^3x)(2x^2y^4+3a^3x) \end{aligned}$$

5.18. Να βρείτε τα γινόμενα:

$$\begin{aligned} \alpha) & (7a+4\beta)(4\beta-7a) \\ \beta) & \left(\frac{2}{5}x^2y^3 - \omega^2\right)(\omega^2 + \frac{2}{5}x^2y^3) \\ \gamma) & (4\alpha x^3 - 9\beta^2y)(-4\alpha x^3 - 9\beta^2y) \\ \delta) & (\sqrt{2}x^3 - a^4\kappa)(-a^4\kappa - \sqrt{2}x^3) \end{aligned}$$

5.19. Να βρείτε τα γινόμενα:

$$\begin{aligned} \alpha) & (x+y-1)(x+y+1) \\ \beta) & (2x+y-3\omega)(2x+y+3\omega) \\ \gamma) & (2\alpha+\beta-3\gamma)(2\alpha-\beta+3\gamma) \\ \delta) & (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1) \\ \epsilon) & (\alpha-x+\beta-y)(\alpha+x+\beta+y) \end{aligned}$$

5.20. Αν $\alpha = \sqrt{2} - 1$, $\beta = \sqrt{2} + 1$, να υπολογιστούν:

$$\begin{aligned} \text{i)} & \alpha \cdot \beta & \text{ii)} & \alpha + \beta & \text{iii)} & \frac{\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha + \beta} \end{aligned}$$

[Απ. i) 1 ii) $2\sqrt{2}$ iii) 6]

5.21. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\begin{aligned} \alpha) & (x+4)^3 & \beta) & (2x-3)^3 & \gamma) & (2x-3y)^3 \\ \delta) & (3xy+2)^3 & \epsilon) & (-x^2+2y)^3 & \sigma\tau) & (-2a^3-ax^2)^3 \end{aligned}$$

5.22. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\begin{aligned} \alpha) & (\alpha+3\beta)^2 - (\alpha-2\beta)^2 - 5\beta^2 \\ \beta) & (x-\alpha)^2 - (\alpha-\beta)(\alpha+\beta-3x) - (x-\beta)^2 \\ \gamma) & (x^3+2y^2)^2 - (y^2+2x^3)^2 + (x^3-2y^2)(x^3+2y^2) \end{aligned}$$

5.23. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} \alpha) & (x+3)^2 + (x-3)^2 + (x-2)^2 - (x+2)^2 + (x+3)(x-3) - \\ & \hspace{15em} (x+2)(x-2) \\ \beta) & (2x+5)^2 - (x-5)^2 + (3x-1)^2 - (2x+1)^2 - (2x-3)(2x+3) \\ \gamma) & -(2x+1)^2 + (2x+1)(-2x-1) - (x+3)(x-3) - \\ & \hspace{15em} (x-3)(-x-3) \\ \delta) & (x^2+1)^2 + (2x^2-3)^2 - (3x^2+4)^2 + (x^2-2)^2 + \\ & \hspace{15em} (x^2-3)(x^2+3) \end{aligned}$$

5.24. Να αποδείξετε ότι:

$$(3x+2)(3x-2)(x-1) - (2x-1)^3 - x(x-2)(x-5) + 5 = 10(x-1)^2.$$

5.25. Αν $\alpha = 2\sqrt{4-\sqrt{15}}$ και $\beta = \sqrt{6}-\sqrt{10}$ τότε:

- Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\alpha^2 - \beta^2$.
- Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι.

5.26. Οι κάθετες πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ δίνονται από τις ισότητες

$$\beta = \sqrt{7-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7+2\sqrt{6}} \quad \text{και} \quad \gamma = \frac{3}{4-\sqrt{14}} + \frac{3}{4+\sqrt{14}}.$$

Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου.

[Απ. Π=30, Ε=30]

5.27. Αν αφαιρέσουμε από το τετράγωνο του ημιαθροίσματος δύο αριθμών, το τετράγωνο της ημιαφοράς τους, βρίσκουμε τον αριθμό 1. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί αυτοί είναι αντίστροφοι.

5.28. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\rho = 10 + 5\sqrt{2}$ είναι λύση της εξίσωσης: $x^2 - 20x + 50 = 0$.

5.29. Αν $x^2 - 6xy + 11y^2 - 8y + 8 = 0$

- Να δείξετε ότι: $(x-3y)^2 + 2(y-2)^2 = 0$.
- Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου $A(x,y)$ που επαληθεύουν την παραπάνω εξίσωση.

[Απ. β) Α(6,2)]

5.30. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \alpha) & \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta). \\ \beta) & \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

5.31. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

$$\begin{aligned} \alpha) & (x-1)^3 - (3x+2)^3 - x(x-2)(x+2) \\ \beta) & (x+y)^3 - y(x-y)(x+y) - x(x-y) \\ \gamma) & (x+2)^3 - 3x(x-1)^2 + (x-1)(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

5.32. Να βρείτε τα εξαγόμενα:

$$\begin{aligned} \text{i)} & (x+1)^3 + 3(x+1)^2(x-1) + 3(x+1)(x-1)^2 + (x-1)^3 \\ \text{ii)} & (x-y)^3 - 3(x-y)^2(x+y) + 3(x-y)(x+y)^2 - (x+y)^3 \\ \text{iii)} & (\kappa+\lambda)^3 - (\kappa-\lambda)^3 - 3(\kappa+\lambda)^2(\kappa-\lambda) + 3(\kappa+\lambda)(\kappa-\lambda)^2 \end{aligned}$$

$$\text{iv) } \left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{5}\right)^3 + \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{5}\right)^3 + 3\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{5}\right) + 3\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{5}\right)^2$$

5.33. Να αποδείξετε ότι:

- α) $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$
- β) $(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$
- γ) $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta$
- δ) $(x + 3y)^2 - (x - 2y)^2 - 5y^2 = 10xy$
- ε) $(\alpha^2 + 4)(x^2 + 1) - (\alpha x + 2)^2 = (2x - \alpha)^2$
- στ) $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$

5.34. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{α) } \left[\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\right]^2 = \alpha^3$$

5.35. Αν $\mu > \nu$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\mu^2 + \nu^2$, $\mu^2 - \nu^2$ και $2\mu\nu$ είναι πλευρές ορθογώνιου τριγώνου.

5.36. Αν $\mu > 1$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί μ , $\frac{\mu^2 - 1}{2}$ και $\frac{\mu^2 + 1}{2}$ είναι πλευρές ορθογώνιου τριγώνου.

5.37. Να αποδείξετε ότι:

- α) $(\alpha + \beta)^2 + (\beta + \gamma)^2 + (\gamma + \alpha)^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2$
- β) $(x^2 + y^2 + xy)^2 = x^2y^2 + (x + y)^2(x^2 + y^2)$
- γ) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 + (\alpha + \beta - \gamma)^2 + (\alpha - \beta + \gamma)^2 + (\alpha - \beta - \gamma)^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$

5.38. Να αποδείξετε ότι:

$$(3x^2 + 2)^2 - (2x^2 + 3)^2 - 2(2x^2 - 1)^3 + 27x^2 = 5(x^4 - 1) - (x^2 - 2)(4x^2 + 1)^2$$

5.39. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

- α) $999^2 + 1998 + 1$
- β) $1001^2 + 1 - 2002$
- γ) $1001 \cdot 999 = (1000 + 1)(\dots - \dots)$
- δ) $99^3 + 3 \cdot 99^2 + 3 \cdot 99 + 1$
- ε) $101^3 - 3 \cdot 101^2 + 303 - 1$

5.40. Να συμπληρώσετε τα κενά:

- i) $(2\alpha + \dots)^2 = \dots + \dots + 9\beta^2$
- ii) $(3\alpha + \dots)^2 = \dots + \dots + 4\kappa^4$
- iii) $(\dots - 3\gamma^3)^2 = 25\kappa^4 - \dots + \dots$
- iv) $(\dots - 3\kappa)^2 = \dots - 24\mu^2\kappa + \dots$
- v) $(\dots + \dots)^2 = 4\alpha^2 + 9\beta^4 + \dots$
- vi) $(\dots - \dots)^2 = 9x^2 - 9x + \dots$

5.41. Να συμπληρώσετε τα κενά:

$$\text{i) } (5\alpha^3 + \dots)(\dots - 8\beta^2) = \dots - \dots$$

$$\text{ii) } (\dots - \dots)(\dots + \dots) = 121\alpha^8x^2 - \frac{9}{4}\beta^2y^6$$

$$\text{iii) } (\dots - \dots)\left(\frac{1}{2}x^3 + \dots\right) = \dots - 3\alpha^2\beta^4$$

5.42. Να συμπληρώσετε τα κενά:

- i) $(\dots + \dots)^3 = 64\alpha^3 + \dots + \dots + 125\beta^3$
- ii) $(\dots + \dots)^3 = 8\alpha^3 + 12\alpha^2\beta + \dots + \dots$
- iii) $(\dots - 3\alpha)^3 = 1000x^3 - \dots + \dots - \dots$

5.43. Να αποδείξετε τις ισότητες:

- i) $(\alpha + 1)^3 = \alpha(\alpha - 3)^2 + (3\alpha - 1)^2$
- ii) $(\alpha + \beta)^3 = \alpha(\alpha - 3\beta)^2 + \beta(\beta - 3\alpha)^2$
- iii) $(x^3 + y^3)^2 - (x^2 + y^2)^3 + 3x^2y^2(x + y)^2 = (2xy)^3$

5.44. Αν $x = \alpha^2 - \beta^2$, $y = 2\alpha\beta$ και $\omega = \alpha^2 + \beta^2$, να αποδείξετε ότι θα είναι $x^2 + y^2 = \omega^2$.

5.45. Αν $\alpha = (x + 1)^2$, $\beta = (x - 1)^2$ και $\gamma = \alpha + 8$ τότε αποδείξετε ότι:

$$\alpha - \beta + \gamma = (x + 3)^2$$

5.46. Αν $x + y = 3$ και $xy = -1$, να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

- i) $x^2 + y^2$
- ii) $x^3 + y^3$

[Απ. i) 11 ii) 36]

5.47. Αν $x + y = \alpha$ και $xy = \beta$, να αποδείξετε ότι:

- i) $x^2 + y^2 = \alpha^2 - 2\beta$
- ii) $x^3 + y^3 = \alpha^3 - 3\alpha\beta$

5.48. Αν $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{5} - \sqrt{2}$, να βρεθεί η τιμή των επόμενων παραστάσεων:

- i) $A = \alpha^2 - 3\alpha\beta + \beta^2$
- ii) $B = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$

5.49. Να βρεθούν δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί που τα τετράγωνα τους να διαφέρουν κατά 99.

[Απ. 49, 50]

5.50. Αν $\alpha - \frac{1}{\alpha} = 7$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

- i) $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$
- ii) $\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3}$

[Απ. i) 51 ii) 364]

5.51. Αν $x > 0$ και $(x + \frac{1}{x})^2 = 9$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

[Απ. 18]

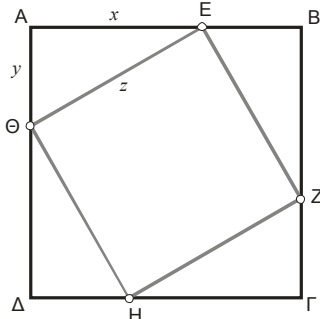
5.52. Να αποδείξετε τις επόμενες ανισότητες:

- i) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$
- ii) $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$
- iii) $\frac{x^2 + 1}{2} \geq x$

iv) $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$, $\alpha > 0$

Πότε ισχύει η ισότητα σε κάθε μία από αυτές;

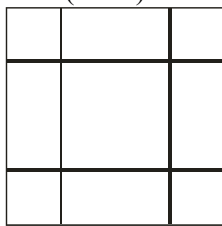
5.53. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο EZHΘ είναι εγγεγραμμένο στο τετράγωνο ΑΒΓΔ.



Να χρησιμοποιήσετε την ισότητα που προκύπτει από τα εμβαδά των δύο τετραγώνων και των ίσων τεσσά-

B' Ομάδα

5.55. Χρησιμοποιήστε το πιο κάτω σχήμα για να δικαιολογήσετε τον τύπο: $(\alpha + 2)^2 = \alpha^2 + 4\alpha + 4$.



5.56. Αν οι αριθμοί x, y, z είναι πλευρές ορθογώνιου τριγώνου με υποτεινούσα το x , τότε δείξτε ότι και οι αριθμοί $\alpha = 3x + 2y + 2z$, $\beta = 2x + y + 2z$, $\gamma = 2x + 2y + z$ είναι πλευρές ορθογώνιου τριγώνου.

5.57. Να δείξετε ότι το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών φυσικών αριθμών αυξημένο κατά μια μονάδα είναι τέλειο τετράγωνο. Δηλαδή,

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

5.58. Αν $x \cdot y = 6$ και $x^2y + xy^2 + x + y = 35$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $x^2 + y^2$.

[Απ. 13]

5.59. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση:

$$A = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8$$

- α) Να μετασχηματίσετε την παράσταση A σε άθροισμα τετραγώνων.
- β) Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η παράσταση A παίρνει την ελάχιστη τιμή.

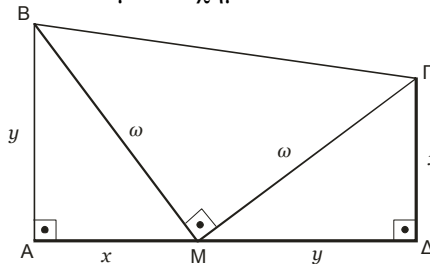
[Απ. β) $\alpha=10, \beta=2$]

5.60. Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z, w ισχύει η ισότητα $x^2 + 10y^2 + 10z^2 + 9w^2 = 6(xy + yz + zx)$.

- α) Να μετασχηματίσετε την ισότητα ώστε στο ένα μέλος να γραφεί σαν άθροισμα τριών τέλειων τετραγώνων και στο άλλο μέλος το 0.
- β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους x και w .

ρων ορθογώνιων τριγώνων για να συμπεράνετε το Πυθαγόρειο θεώρημα, δηλαδή ότι: $x^2 + y^2 = z^2$.

5.54. Δίνεται το επόμενο σχήμα:



Να χρησιμοποιήσετε την ισότητα που προκύπτει από τα εμβαδά των δύο σχημάτων για να συμπεράνετε το Πυθαγόρειο θεώρημα, δηλαδή ότι: $x^2 + y^2 = \omega^2$.

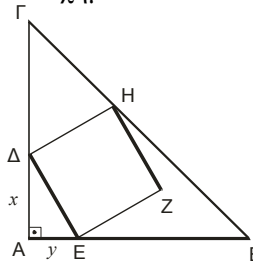
[Απ. $x=27w$]

5.61. Να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β και γ οι οποίοι ικανοποιούν την παρακάτω σχέση:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + 14 = 0$$

[Απ. $\alpha=1, \beta=2, \gamma=3$]

5.62. Για το επόμενο σχήμα δίνεται ότι:



Το τρίγωνο ABG είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. $AD = x$, $AE = y$, $AG = 2x + y$.

Το εμβαδόν (ΔΕΖΗ) του τετραγώνου ΔΕΖΗ ισούται με τα $\frac{2}{5}$ του εμβαδού (ΑΒΓ) του τριγώνου

ΑΒΓ. Να υπολογίσετε:

- i) Το λόγο $\frac{x}{y}$
- ii) Το λόγο $\frac{(A\Delta E)}{(A\Delta B)}$

[Απ. i) 2 ii) $\frac{2}{5}$]

ΕΝΟΤΗΤΑ 6.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

6.1. Τι ονομάζουμε παραγοντοποίηση;

Απάντηση:

Η διαδικασία να μετατρέπουμε μια παράσταση από άθροισμα σε γινόμενο, λέγεται **παραγοντοποίηση**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κοινός παράγοντας

6.2. Να γίνουν οι παραγοντοποιήσεις:

- α) $2\alpha\beta - 4\alpha\gamma$
 β) $6x^3 + 3x^2$
 γ) $12x^2y + 6xy^2 - 3xy$
 δ) $15\alpha^2\beta - 25\alpha\beta\gamma + 30\alpha\beta^2\gamma$

6.3. Να γίνουν οι παραγοντοποιήσεις:

- α) $\alpha(x-1) - x + 1$
 β) $\kappa(\alpha-2) + 6 - 3\alpha$
 γ) $\alpha(2x+3y) - 7\beta(2x+3y) - (3y+2x)$

6.4. Να γίνουν οι παραγοντοποιήσεις:

- α) $(\alpha-\beta)^2 + (\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta) - 2\beta(\alpha^2+\beta^2)$
 β) $(5\alpha-2\beta)(4x-3y) + (3y-4x)\alpha$

6.5. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$3^{n+3} - 3^{n+2} + 3^n$$

είναι πολλαπλάσιο του 19.

Ομαδοποίηση

6.6. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τις αλγεβρικές παραστάσεις

- α) $\alpha x + 2\alpha y + 3x + 6y$
 β) $5y - 5\omega - \lambda\omega + \lambda y$
 γ) $4\alpha y - 2\beta y + 2\alpha\omega - \beta\omega$
 δ) $15x\alpha + 6x\beta - 20y\alpha - 8y\beta$
 ε) $xy - 2x + 3y^2 - 6y$
 στ) $x^3 + x^2 + x + 1$
 ζ) $\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$

6.7. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

- α) $\alpha + \alpha\beta - \beta - 1$
 β) $x^2 + xy - x - y$
 γ) $3\alpha^3 - 6\alpha^2 + 5\alpha - 10$
 δ) $\alpha^3 - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \beta^3$
 ε) $8xy^3 - 24y^2 - 7\alpha xy + 21\alpha$

στ) $2x^2 + x - 2xy - y$

ζ) $\alpha\beta x - \alpha\beta y - \alpha\gamma x + \alpha\gamma y$

η) $x^3 - 5x^2 + 3x - 15$

6.8. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

- α) $x^2 + (5-y)x - 5y$
 β) $\alpha(\alpha-\gamma) - \beta(\beta-\gamma)$
 γ) $x(x-3\beta) + y(\alpha-x) - \alpha(x-3\beta)$
 δ) $xy(\alpha^2+\beta^2) + \alpha\beta(x^2+y^2)$
 ε) $\kappa\lambda(\mu^2-\nu^2) + \mu\nu(\kappa^2-\lambda^2)$

6.9. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

- α) $(\alpha+\beta)(\lambda+\mu) - \gamma\lambda - \gamma\mu$
 β) $\kappa x - 2\kappa y - \lambda x + 2\lambda y + \mu x - 2\mu y$
 γ) $\alpha x - \beta x + \beta y + \gamma y - \gamma x - \alpha y$
 δ) $\alpha^2\beta - \alpha^2 + \alpha + \beta - \alpha\beta - 1$
 ε) $x^2y + xy\omega + xy\phi + y\phi\omega + x^2 - \omega^2$

6.10. Οι αριθμοί x, y είναι μη μηδενικοί και διάφοροι

μεταξύ τους. Αν $\frac{x^2+1}{y^2+1} = \frac{x}{y}$ τότε να δείξετε ότι οι

x, y είναι αντίστροφοι.

Διαφορά τετραγώνων

6.11. Να κάνετε τις παραγοντοποιήσεις:

- α) $81\alpha^2 - 49\beta^2$
 β) $3xy^3 - 27x^3y$
 γ) $45x^2y^4 - 80\omega^2$
 δ) $20\kappa^2 - 15$
 ε) $\frac{x^2y^2}{9} - \frac{1}{4}$
 στ) $1 - 4x^2$
 ζ) $1 - x^8$
 η) $16\alpha^6 - 49\beta^8$

6.12. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

α) $1001^2 - 1$ β) $\frac{1540^2 - 463^2}{1077}$
 γ) $\frac{62,31^2 - 37,69^2}{24,62}$ δ) $\frac{225,12^2 - 72,12^2}{297,24}$
 ε) $\frac{2004^2 - 1834^2}{1924^2 - 1914^2}$

6.13. Να κάνετε τις παραγοντοποιήσεις:

α) $a^2b - a^2 + a + b - ab - 1$
 β) $81x^4 - 16y^4$
 γ) $x^8 - 1$
 δ) $27x - 3x^3$
 ε) $20x - 5x^3$

6.14. Να κάνετε τις παραγοντοποιήσεις:

α) $a^3 - 5a^2 - 4a + 20$
 β) $2x^2y - 18y + 3x^2 - 27$
 γ) $a^2x^2 - 4a^2 - x^2 + 4$
 δ) $a^5 - 1 + a^4 - a$
 ε) $ax^2 + \beta x^2 - ay^2 - \beta y^2$
 στ) $ax^3 - a^3x(y+z)^2$
 ζ) $9a^2x^2 - 4a^2 - 9\beta^2x^2 + 4\beta^2$

6.15. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τις αλγεβρικές παραστάσεις

i) $(5x-6)^2 - 9$
 ii) $(\mu-3\nu)^2 - 16\nu^2$
 iii) $(3\alpha-2\beta)^2 - (3\beta-2\alpha)^2$
 iv) $(x-5y)^2 - 9(x+2y)^2$
 v) $9(\alpha-2\beta)^2 - 16(\alpha+2\beta)^2$
 vi) $x^3 - x(y-z)^2$

6.16. Αν ο x είναι φυσικός αριθμός, τότε η παράσταση $(x^2+3x+1)^2 - 1$ είναι γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών φυσικών αριθμών.

6.17. Να γίνουν οι παραγοντοποιήσεις:

α) $(4x^2-3x-18)^2 - (4x^2+3x)^2$
 β) $5(4-x^2) - (x-2)^2$
 γ) $(5-3x)(x+4) + (3x-5)(2x-3) + 9x^2 - 25$

6.18. Αν ο κ είναι ακέραιος τότε δείξτε ότι ο

$\kappa^3 - \kappa$ γράφεται σαν γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων.

6.19. Έστω ν θετικός ακέραιος και $A = \nu^3 - \nu^2 + \nu - 1$.

- i) Να παραγοντοποιήσετε τον A .
 ii) Να βρείτε τις τιμές του ν , για τις οποίες ο A είναι πρώτος αριθμός.

[Απ. ii) $\nu=2$]

Διαφορά & άθροισμα κύβων

6.20. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

i) $a^3 - 125$ ii) $8\kappa^3 + 27$ iii) $27a^3 + 64\beta^3$
 iv) $216\omega^3 - 1$ v) $x^4 - 64x$

6.21. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

i) $64x^3y^6 + 27$ ii) $\frac{\kappa^6}{\mu^3} - \frac{1}{8}$
 iii) $a^6 + 64\beta^3$

Ανάπτυγμα τετραγώνου

6.22. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

α) $1 - 2x + x^2$
 β) $\kappa^2 - 4\kappa\nu + 4\nu^2$
 γ) $9x^2 + 48xy + 64y^2$
 δ) $\frac{9}{16}x^2 - \frac{3}{5}xy + \frac{4}{25}y^2$
 ε) $x^2 - x + \frac{1}{4}$
 στ) $\frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4}$

6.23. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τις αλγεβρικές παραστάσεις

α) $a(a+2) + 1$
 β) $9(x+y)^2 - 6y(x+y) + y^2$
 γ) $x + 1 + 2\sqrt{x}$, $x > 0$
 δ) $y^2 - 2\sqrt{3}xy + 3x^2$

6.24. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τις αλγεβρικές παραστάσεις

α) $2ax^2 - 12ax + 18a$
 β) $x^2 - 4x^3 + 4x^4$
 γ) $x^3 + 2x^2 + x + xy + y$

Τριώνυμο

6.25. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

α) $x^2 - 10x + 24$
 β) $a^2 + 12a + 27$
 γ) $y^2 + 3y - 10$
 δ) $a^2 + 2a - 15$
 ε) $3x^2 - 6x - 24$
 στ) $2x^2 - 2x - 40$
 ζ) $14 - 5x - x^2$
 η) $-x^2 + 2x + 15$
 θ) $x^2 - 17x - 84$
 ι) $\beta x^2 + 6\beta x + 5\beta$

6.26. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = x^2 - 5x + 6$ παίρνει θετικές τιμές, για κάθε $x > 3$.

6.27. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

α) $x^2 + 9ax + 14a^2$
 β) $a^2 - 4a\beta + 3\beta^2$
 γ) $\mu^2 + 4\mu\nu - 5\nu^2$

Ανάπτυγμα τετραγώνου και διαφορά τετραγώνων

6.28. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

α) $x^2 - a^2 + 6a - 9$

- β) $x^2 - 4y^2 + 4y - 1$
- γ) $9 - 9a^2 - b^2 + 6ab$
- δ) $9a^2 - 12a + 4 - 4b^2$
- ε) $1 + a^2 + 2b\gamma - 2a - b^2 - \gamma^2$
- στ) $9y^2 - 4x^2 + 4x - 1$
- ζ) $4x^2 - 36x^2 + 81 - y^2$
- η) $16y^2 - 9x^2 + 12x - 4$

6.29. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- i) $a^2 + b^2 + 2(ab - 8)$
- ii) $\kappa^2\lambda^2 - x^2y^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 2\kappa\lambda\beta - 2\gamma\chi\gamma$
- iii) $y^2 - 4\gamma\omega + 3\omega^2 - 2x\omega - x^2$

6.30. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

- i) $a^4 + a^2 + 1$
- ii) $a^4 + a^2b^2 + b^4$
- iii) $a^4 - 11a^2b^2 + b^4$
- iv) $x^4 + 3x^2 + 4$
- v) $y^4 - 2y^2 + 1$
- vi) $25a^4 + 31a^2b^2 + 16b^4$

6.31. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

- i) $\kappa^4 + 4\lambda^4 + 3\kappa^2\lambda^2$
- ii) $x^4 + 9y^2 + 5x^2y^2$
- iii) $\kappa^4 - 13\kappa^2 + 36$

Ανάπτυγμα κύβου

6.32. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

- α) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$
- β) $8a^3 - 12a^2 + 6a - 1$
- γ) $a^3x + 6a^2x + 12ax + 8x$

6.33. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

- α) $(x+y)^3 - 3(x+y)^2 \cdot y + 3(x+y) \cdot y^2 - y^3$
- β) $(\kappa+\lambda)^3 + (\kappa-\lambda)^3 + 3(\kappa+\lambda)^2 \cdot (\kappa-\lambda) + 3(\kappa+\lambda) \cdot (\kappa-\lambda)^2$

Όλες οι περιπτώσεις

6.34. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

- α) $(2x-1)(x+3) + 1 - 2x$
- β) $(a+b)(2b-a) + (a-2b)^2 - (a^2-4b^2)$
- γ) $(x^2-9)^2 - (x+3)^2$
- δ) $(2x^2-5x+2)^2 - 4x^2 + 4x - 1$
- ε) $5\kappa^3 - \frac{9}{5}\kappa$
- στ) $y^2 + 4x - 16x^2 - y$

6.35. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- i) $\kappa^2 + \lambda^2 - \kappa + \lambda - 2\kappa\lambda$
- ii) $x^2 + (2a+1)x + a^2 + a$
- iii) $\gamma^2 + 9(\beta^2 - a^2) + 6\beta\gamma$
- iv) $a^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 - 2a\beta + 2\gamma\delta$
- v) $a^2 + a(\beta+1) + \beta(\alpha+1) + \beta^2$

6.36. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

- i) $a^2 + 2a\beta + \beta^2 - x^2 + 4x - 4$

- ii) $9x^2 - 4y^2 - 4y - 1$
- iii) $x^2 - y^2 - \omega^2 + 2x - 2y\omega + 1$
- iv) $x^4 + 5x^2y^2 + 9y^4$
- v) $9(x+y)^2 - 6\gamma(x+y) + \gamma^2$
- vi) $(a^3 - 1) - 2(a^2 - 1) - (a - 1)^2$
- vii) $(\omega - 1)^3 (\omega^2 - 4) + (4 - \omega^2)$

6.37. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

- i) $(x^2-5x+6)(x-1) - (x-3)(x^2-1)$
- ii) $4(a\delta + \beta\gamma)^2 - (a^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2)^2$
- iii) $(5a^2 + 2a - 3)^2 - (a^2 - 2a - 3)^2$
- iv) $(3x - 6)(x^2 - 1) - (5x - 10)(x - 1)^2$
- v) $(\omega^2 - 9)^2 - (\omega + 3)^2$

6.38. Να γίνει γινόμενο η παράσταση:

$$(v^2 + 3v + 1)^2 - 1.$$

[Απ. v (v+1) (v+2) (v+3)]

6.39. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

- α) $\kappa^4 - \lambda^4 - (\kappa+\lambda)(\kappa-\lambda)^3$
- β) $(a^2 + 1)^2 - 4a^2$
- γ) $a^6 - 1$
- δ) $(a^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4a^2\beta^2$

6.40. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

- α) $4a^2 - 4a + 1 - 2a(2a-1) + 18a^3 - 9a^2$
- β) $\kappa^5 + 2\kappa^4 + \kappa^3 - \kappa^2 - 2\kappa - 1$

6.41. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

- i) $1 - x^3$
- ii) $(2+x+x^2)^2 - 1$
- iii) $(2+x+x^2)^2 - x^2$
- iv) $x^3 + 2x^2 - 3$

6.42. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

- i) $a^3 + \beta^3 - a - \beta - a^2\beta - a\beta^2$
- ii) $a\beta^2 - a^2\beta + \beta\gamma^2 - \beta^2\gamma + a^2\gamma - a\gamma^2$
- iii) $a\beta^2 + a^2\beta + \beta\gamma^2 + \beta^2\gamma + a^2\gamma + a\gamma^2 + 2a\beta\gamma$
- iv) $a^3\beta^2 - a^2\beta^3 + \beta^3\gamma^2 - \beta^2\gamma^3 + \gamma^3a^2 - \gamma^2a^3$

Θέματα με παραγοντοποίηση

6.43. i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή των μη αρνητικών ακεραίων α, β με $\alpha > \beta$ ο αριθμός

$$\kappa = \frac{(2\alpha+1)^2 - (2\beta+1)^2}{4}$$

είναι θετικός ακέραιος.

ii) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α, β για τις οποίες ο κ είναι πρώτος, δηλαδή είναι $\kappa > 1$ και οι μοναδικοί θετικοί διαιρέτες του είναι οι αριθμοί 1 και κ .

[Απ. ii) $\alpha=1, \beta=0$]

6.44. Αν ισχύει $(10^5 + 25)^2 - (10^5 - 25)^2 = 10^v$, όπου v φυσικός αριθμός, να βρεθεί η τιμή του v .

[Απ. $v=7$]

6.45. Να απλοποιηθεί το κλάσμα:

$$K = \frac{2+4+6+8+\dots+2002}{3+6+9+12+\dots+3003}.$$

[Απ. $K = \frac{2}{3}$]

6.46. Να γίνει γινόμενο η παράσταση

$$\Pi = \alpha^3 + \beta^3 - \alpha - \beta - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2.$$

6.47. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = (2 + x + x^2) - x^3$$

(Υπόδειξη: Προσθέστε και αφαιρέστε τον 1.)

[Απ. $A = (1+x+x^2)(4+x^2)$]

6.48. α) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση:

$$x^4 + 4y^4.$$

β) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι και $y \geq 2$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x^4 + 4y^4$ είναι σύνθετος.

6.49. Δίνεται το άθροισμα

$$S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2.$$

α) Να αποδείξετε ότι $100^2 - 99^2 = 100 + 99$ και έπειτα ότι $S = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1$.

β) Να υπολογίσετε το S χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που εφάρμοσε ο Gauss όταν ήταν μικρός.

[Απ. β) $S=5050$]

ΕΝΟΤΗΤΑ 7.**ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ****ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

7.1. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

- i) $(x^3 - x^2 - 21x + 45) : (x + 5)$
- ii) $(18x^3 + 9x^2 - 50x - 25) : (3x - 5)$
- iii) $(2x^3 - 3x^2 - 17x - 12) : (2x + 3)$
- iv) $(15a^3 - 14a^2 + 7a + 6) : (5a + 2)$

7.2. Να εκτελέσετε τις διαιρέσεις:

- i) $(x^3 + 4x^2 - 18x + 2) : (x^2 + 1)$
- ii) $(\omega^3 + 4\omega^2 - 11\omega - 30) : (\omega^2 - \omega - 6)$
- iii) $(-2y^4 + 8y^3 - 16y + 8) : (2y^2 - 4)$
- iv) $(2x^5 + 4x^6 + x^2 - 6 + 5x - 3x^3) : (x - 3 + x^2 + 2x^3)$

7.3. Να γίνουν οι διαιρέσεις:

- i) $[(3x+5)^2 + (2x+3)^2 - 3x(2x+4) - (x+1)^2] : (3x - 2)$
- ii) $[(x^2-9)^2 - (x+5)(x-3)^2] : (x^2 + x - 12)$
- iii)

7.4. Να βρεθεί το πολυώνυμο, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο με το $x^2 - x + 1$ να δίνει γινόμενο το $x^4 - x^2 + 2x - 1$.

7.5. Να βρεθεί το πολυώνυμο, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο με το $x + 3$ γίνεται $x^3 - 5x^2 + 7x + 95$.

7.6. Αν είναι $\varphi(x) = 2x^2 - 5x + 3$, να εκτελεστεί η διαίρεση:

$$[\varphi(x) + \varphi(x-2) - \varphi(x-1)] : (x - 3)$$

7.7. Αν είναι $\varphi(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, να γίνει η διαίρεση:

$$[\varphi(x+1) + \varphi(x-1) - \varphi(x)] : (x - 2)$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 8.***Ε.Κ.Π. & Μ.Κ.Δ. ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ*****ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

8.1. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $12a^3b^2\gamma$, $15a^2b^3\gamma$, $6a^4b^3$

β) $8a^2x^3$, $4a^3x^5$, $12a^3x^3$

γ) $3a^2(a-\beta)^2$, $6a^2\beta(a-\beta)^2(a+\beta)$

8.2. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $4(x^2-y^2)$, $6(x+y)^2$, $3(x-y)^2$

β) $a^2-\beta^2$, $(a-\beta)^2$, $a^3-\beta^3$

γ) $a^3-6a^2+12a-8$, a^2-4 , a^2-2a

δ) a^2-3a+2 , a^2+3a-4 , a^3-a , a^2-2a+1

ΕΝΟΤΗΤΑ 9.

ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

9.1. Τι ονομάζουμε κλασματική αλγεβρική παράσταση;

Απάντηση:

Μια αλγεβρική παράσταση που περιέχει μεταβλητή στον παρονομαστή, λέγεται **κλασματική αλγεβρική παράσταση**.

Για παράδειγμα: Οι παραστάσεις $\frac{1}{x}$, $\frac{2\alpha}{\beta+3}$, $\frac{x^2-5y}{xy-3y^4}$ είναι κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9.2. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \frac{33\alpha^2\lambda\mu}{22\alpha\lambda} & \text{ii)} \frac{\alpha^2-3\alpha}{6\alpha^3-18\alpha^2} \\ \text{iii)} \frac{a^2-4}{3a^2-6a} & \text{iv)} \frac{a^2-4\beta^2}{a^2-2a\beta} \end{array}$$

9.3. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \frac{3\alpha-3\beta}{4\beta-4\alpha} & \text{ii)} \frac{4x^2-xy}{12xy-3y^2} \\ \text{iii)} \frac{x^3-x}{x^2+x} & \text{iv)} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3} \end{array}$$

9.4. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \frac{x^2-1}{(1-x)^2} & \text{ii)} \frac{\alpha^2-4\alpha\beta+4\beta^2}{\alpha^2-4\beta^2} \\ \text{iii)} \frac{\alpha\lambda-\alpha\mu+\lambda x-\mu x}{\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta x-\gamma x} & \text{iv)} \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2} \end{array}$$

9.5. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \frac{9x^2-4y^2}{9x^2-12xy+4y^2} & \text{ii)} \frac{xy^2-7y^2+x-7}{x^2-14x+49} \\ \text{iii)} \frac{49x^2-16y^2}{49x^2-56xy+16y^2} & \text{iv)} \frac{3\alpha\beta^3+3\alpha^3\beta-6\alpha^2\beta^2}{6\alpha\beta^3-6\alpha^3\beta} \end{array}$$

9.6. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \frac{\omega^4-81}{\omega^2-9} & \text{ii)} \frac{x^2-6x+9}{x^2-4x+3} \\ \text{iii)} \frac{(\alpha\beta-1)^2-(\alpha+1)^2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} & \text{iv)} \frac{(x^2-4)^2-(x+2)^2}{x^2-4x+3} \end{array}$$

$$9.7. \text{ Δίνεται το κλάσμα } K = \frac{4x^2+4x-48}{2x^2-8x+6}.$$

i) Για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα;

ii) Να απλοποιήσετε το κλάσμα;

iii) Για ποιες τιμές του x παίρνει την τιμή μηδέν;

[Απ. i) $x \neq 1$ και 3 ii) $x = -4$]

9.8. Για ποιες τιμές του κ το παρακάτω κλάσμα παίρνει την τιμή μηδέν;

$$\frac{\kappa^2-14\kappa+49}{\kappa^2-49}$$

[Απ. κομμίσι]

$$9.9. \text{ Δίνεται η παράσταση } A = \frac{(3\alpha-2\beta)^2-(2\alpha-3\beta)^2}{(5\alpha-4\beta)^2-(4\alpha-5\beta)^2}$$

και οι αριθμοί α, β δεν είναι ίσοι ούτε αντίθετοι.

Να δείξετε ότι $A > \frac{1}{2}$.

9.10. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \frac{x^3+2x^2-2-x}{x^2+3x+2} & \text{ii)} \frac{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}{\alpha^3\beta-\beta^4} \\ \text{iii)} \frac{\alpha^4x-\beta^4x}{2\alpha^3+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+2\beta^3} & \text{iv)} \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\alpha-\beta-\beta^2} \end{array}$$

9.11. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{x^5-x^4y-xy^4+y^5}{x^4-yx^3-y^2x^2+y^3x}$$

$$9.12. \text{ Δίνεται το κλάσμα } A = \frac{(x-2)^2+2x^2-4x}{9x^2-4}$$

i) Ποιες τιμές δεν μπορεί να πάρει το x ;

ii) Να απλοποιήσετε το κλάσμα.

iii) Να λυθεί η εξίσωση $A = 1$.

[Απ. iii) $x = -2$]

9.13. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 36}$,

$$B = \frac{x^2 + 7x + 6}{x^2 - 1}.$$

i) Για ποιες τιμές του x ορίζονται οι δύο παραστάσεις;

ii) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις A και B .

iii) Να αποδείξετε ότι: $(A+B)^2 - (A-B)^2 = 4$.

9.14. Να δείξετε ότι:

$$\frac{x^7 - 2x^4y^3 + xy^6}{x^5 - x^2y^3 - x^4y + xy^4} = x^2 + xy + y^2$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 10.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πολλαπλασιασμός – Διάρθρωση ρητών παραστάσεων

10.1. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\frac{3x+2}{5x^2} \cdot \frac{2x}{9x^2-4} \cdot \frac{3x-2}{4}$ ii) $\frac{x^2-1}{\alpha+\beta} : \frac{x+1}{\alpha^2-\beta^2}$

10.2. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\frac{\alpha^2-3}{6\alpha\beta} \cdot \frac{12\beta}{5\alpha^4-15\alpha^2}$ ii) $\frac{\alpha^2-16}{\alpha^2-8\alpha+16} : \frac{3\alpha+12}{3\alpha-9}$
 iii) $\frac{3\kappa^2-6\kappa}{1-2\kappa+\kappa^2} : \frac{12-3\kappa^2}{2\kappa^2+2\kappa-4}$

[Απ. i) $\frac{2}{5\alpha^2}$ ii) $\frac{\alpha-3}{\alpha-4}$ iii) $\frac{2\kappa}{1-\kappa}$]

10.3. Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$A = \frac{x^2y^2-y^4}{x^3-y^3} : \frac{xy^2+y^3}{x^2+xy+y^2}$ είναι σταθερή.

[Απ. A=1]

10.4. Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$\frac{8x^3}{x^3-y^3} : \frac{4x^2y}{x^2+xy+y^2} : \frac{2x}{xy-y^2}$ είναι σταθερή.

[Απ. 1]

10.5. Δίνεται το κλάσμα $A = \frac{x^3-x^2-4}{x^2-5x+6}$

- i) Για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα;
- ii) Να απλοποιήσετε το κλάσμα.

10.6. Να δείξετε ότι:

$\frac{\alpha^2+2\alpha\sqrt{2}+2}{5+4\alpha} : \frac{\alpha^2-2}{16\alpha^2+25+40\alpha} = \frac{(4\alpha+5)(\alpha+\sqrt{2})}{\alpha-\sqrt{2}}$.

Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

10.7. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

i) $\frac{3}{5} - \frac{5+9\alpha}{15\alpha}$ ii) $\frac{\beta+4}{4\beta} - \frac{1}{\beta}$

[Απ. i) $-\frac{1}{3\alpha}$ ii) $\frac{1}{4}$]

10.8. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4}{x^2-1}$
 ii) $\frac{2}{x-y} + \frac{4y}{y^2-x^2}$
 iii) $\frac{1}{\alpha-2} + \frac{1}{\alpha+2} - \frac{4}{\alpha^2-4}$
 iv) $\frac{1}{\alpha+3} + \frac{1}{\alpha-3} - \frac{6}{\alpha^2-9}$
 v) $\frac{x-\alpha}{x-\beta} + \frac{x-\beta}{x-\alpha} - \frac{(\alpha-\beta)^2}{(x-\alpha)(x-\beta)}$

[Απ. i) $\frac{3}{x+1}$ ii) $\frac{2}{x+y}$ iii) $\frac{2}{\alpha+2}$ iv) $\frac{2}{\alpha+3}$ v) 2]

10.9. Αν οι αριθμοί x, y, z είναι διαφορετικοί ανά δύο, να δείξετε ότι:

$\frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)} = 0$.

10.10. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\frac{x+y}{x-y} - \frac{4xy}{x^2-y^2}$
 ii) $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\alpha\beta} + \frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$
 iii) $\frac{\alpha^2}{\alpha\beta+\beta^2} - \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\alpha\beta}$
 iv) $\frac{\alpha^2}{xy} + \frac{(\alpha+x)^2}{x^2-xy} - \frac{(\alpha+y)^2}{xy-y^2}$
 v) $\frac{1-\alpha}{\alpha-2} - \frac{\alpha-3}{\alpha+2} - \frac{4}{4-\alpha^2}$

[Απ. i) $\frac{x-y}{x+y}$ ii) $-\frac{\beta}{\alpha}$ iii) $-\frac{\beta}{\alpha}$ iv) 1 v) $-\frac{2\alpha}{\alpha+2}$]

10.11. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\frac{3}{2\alpha+2} - \frac{2}{3\alpha-3} + \frac{5\alpha+3}{6\alpha^2-6}$
 ii) $\frac{1}{\alpha^2-\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2+\alpha\beta} - \frac{1}{2\alpha^2-2\alpha\beta}$
 iii) $\frac{2\beta}{\alpha-2\beta} + \frac{\alpha}{2\beta+\alpha} - \frac{4\alpha\beta}{\alpha^2-4\beta^2}$

$$\text{iv) } \frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2+x-2} + \frac{1}{x^2-4}$$

$$\text{v) } \frac{2x-1}{x^2-x-2} - \frac{2x+1}{x^2+x-6} + \frac{2x+4}{x^2-4x+4}$$

10.12. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\text{i) } \frac{6\alpha\beta}{9\alpha^2-\beta^2} + \frac{3\alpha}{3\alpha+\beta} + \frac{\beta}{3\alpha-\beta}$$

$$\text{ii) } \frac{x}{x-2} + \frac{x}{3x+3} - \frac{x^2}{x^2-x-2}$$

$$\text{iii) } \frac{\kappa}{3-\kappa} - \frac{\kappa}{1+\kappa} + \frac{4}{\kappa^2-2\kappa-3}$$

$$[\text{Απ. i) } \frac{3\alpha+\beta}{3\alpha-\beta} \text{ ii) } \frac{x}{3(x-2)} \text{ iii) } \frac{2(\kappa-2)}{3-\kappa}]$$

10.13. Δίνεται η παράσταση $A = 1 - \frac{6x}{x^2-9} + \frac{3}{x-3}$.

- i) Για ποιες τιμές του x έχει έννοια η παράσταση;
 ii) Να εκτελέσετε τις πράξεις που σημειώνονται στην παράσταση.

$$[\text{Απ. i) } x \neq -3 \text{ και } 3 \text{ ii) } A = \frac{x}{x+3}]$$

10.14. Δίνεται η παράσταση

$$\Pi = \frac{x^2-x-6}{x^2-9} + \frac{2x+1}{x} - \frac{x^2+x-3}{x^2+3x}$$

- α) Για ποιες τιμές του x έχει έννοια η παράσταση;
 β) Να γράψετε την παράσταση σε απλούστερη μορφή, αφού εκτελέσετε τις πράξεις.

$$[\text{Απ. α) } x \neq 0, -3 \text{ και } 3 \text{ β) } \Pi = \frac{2(x+1)}{x}]$$

10.15. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\text{i) } \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{x^2 y^2}{x^2 - y^2}$$

$$\text{ii) } \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right) : \left(\frac{1}{(\alpha+\beta)^2} + \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\right)$$

$$\text{iii) } \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right) \cdot \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta} + 1\right) \cdot \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\text{iv) } \left(\alpha - \frac{4y^2}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta - \frac{4x^2}{\beta}\right) : \left(1 + \frac{2x}{\beta} + \frac{2y}{\alpha} + \frac{4xy}{\alpha\beta}\right)$$

10.16. Να δείξετε ότι η παράσταση:

$$\frac{4\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2} - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \text{ είναι σταθερή.}$$

10.17. Να εκτελεστούν οι πράξεις στην παράσταση:

$$\left(\frac{1}{x^2+x-6} - \frac{1}{4-x^2} - \frac{2}{x^2+2x}\right) : \frac{x+4}{x^3-4x}$$

$$[\text{Απ. } \frac{3}{x+3}]$$

10.18. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

$$\text{i) } \frac{1-x}{1+\frac{1}{x}} \quad \text{ii) } \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$$

10.19. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

$$\text{i) } \frac{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}-2}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}$$

$$\text{ii) } \frac{\alpha - \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}}{1 - \frac{\alpha^2+\alpha\beta}{1+\alpha\beta}}$$

$$[\text{Απ. i) } \beta-\alpha \text{ ii) } -\beta]$$

10.20. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

$$\text{i) } \frac{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-1}{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}+1}$$

$$\text{ii) } \frac{\frac{\alpha-\beta}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}}{\alpha-\beta + \frac{\beta^2}{\alpha+\beta}}$$

$$[\text{Απ. i) } \frac{\beta}{\alpha} \text{ ii) } \frac{1}{\beta}]$$

10.21. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\text{i) } \frac{\frac{a}{1+a} + \frac{1-a}{a}}{\frac{a}{1+a} - \frac{1-a}{a}}$$

$$\text{ii) } \frac{3}{1+\frac{a}{\beta+\gamma}} + \frac{3}{1+\frac{\beta}{\alpha+\gamma}} + \frac{3}{1+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}}$$

$$[\text{Απ. i) } \frac{1}{2\alpha^2-1} \text{ ii) } 6]$$

10.22. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta} - \alpha\right) \cdot \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^3+\beta^3} : \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$[\text{Απ. } \alpha]$$

10.23. Αν $\alpha = \frac{1}{1+x}$, $\beta = \frac{1}{1-x}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\Gamma = \frac{\alpha+\beta x}{\beta-\alpha x}$$

10.24. Αν υποθέσουμε ότι: $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$, $x = \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$,

$$y = \frac{\beta}{\alpha+\gamma} \text{ και } z = \frac{\gamma}{\alpha+\beta}, \text{ να αποδείξετε ότι:}$$

$$y = \frac{2xz}{x+z}.$$

10.25. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2}{v(v+1)(v+2)} = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right) - \left(\frac{1}{v+1} - \frac{1}{v+2}\right)$$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{1999 \cdot 2000 \cdot 2001}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4000} + \frac{1}{4002}$$

10.26. Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$\left(\frac{\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta} + 2\alpha}{\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta} - 2\alpha} - \frac{2\beta + \frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}}{2\beta - \frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}} \right) : \frac{\frac{4\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}}{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$$

είναι σταθερή.

[Απ. 5]

10.27. Αν οι αριθμοί x, y, ω είναι διαφορετικοί ανά δύο, να δείξετε ότι:

$$\frac{x^2}{(x-y)(x-\omega)} + \frac{y^2}{(y-\omega)(y-x)} + \frac{\omega^2}{(\omega-x)(\omega-y)} = 1.$$

Κεφάλαιο 2ο

Κεφάλαιο 2ο

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

- Η εξίσωση $ax + b = 0$
- Εξισώσεις δευτέρου βαθμού
- Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού
- Κλασματικές εξισώσεις
- Ανισότητες - Ανισώσεις με έναν άγνωστο

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

Η ΕΞΙΣΩΣΗ $ax + \beta = 0$

1.1. Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση;

Τι γνωρίζετε για τις λύσεις μιας γραμμικής εξίσωσης;

Απάντηση:

Μια εξίσωση της μορφής $ax + \beta y = \gamma$ λέγεται **γραμμική εξίσωση**.

Οι λύσεις της γραμμικής εξίσωσης βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(3 - x) \cdot 2^{-1} = x$

β) $10^{-1} \cdot (x - 3) = 5 \cdot 10^{-2}$

[Απ. α) 1 β) 3, 5]

β) Να βρεθεί η τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει λύση $x = 3$.

[Απ. α) -1, 1 β) $\alpha = 5$]

1.7. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x}{2} - \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{3x + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} + \frac{15}{2} = 0.$$

[Απ. $x = -1$]

1.2. Ποιος είναι ο ίδιος αριθμός, που πρέπει να τοποθετήσουμε σε κάθε ένα από τα παρακάτω τετραγώνια, ώστε να ισχύει η ισότητα;

$$\frac{\square}{6} + \frac{\square}{30} = \frac{\square}{\square}.$$

[Απ. 5]

1.3. Να βρεθούν δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί που τα τετράγωνα τους να διαφέρουν κατά 15.

[Απ. 7, 8]

1.4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{33}{10} + \frac{2x+1}{3} - \frac{2(x+3)}{5} = \frac{3x+2}{6} - \frac{2x-1}{10}$$

[Απ. $x = 60$]

1.5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3} (1-x)$

β) $\frac{2x-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2x+1}{\sqrt{5}+1}$

[Απ. α) 1 β) $\frac{\sqrt{5}}{2}$]

1.6. Δίνεται η εξίσωση $\frac{ax-2}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{2a}{x^2-1}$.

α) Ποιοι αριθμοί δεν μπορούν να είναι λύση της εξίσωσης αυτής;

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.**ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^ο ΒΑΘΜΟΥ**

2.1. Να αποδείξετε τον τύπο που δίνει τις λύσεις μιας εξίσωσης 2^ο βαθμού.

Απάντηση:

Μια δευτεροβάθμια εξίσωση έχει τη γενική μορφή $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$.

Έχουμε διαδοχικά

$$ax^2 + bx + \gamma = 0$$

$$4a \cdot ax^2 + 4a \cdot bx + 4a \cdot \gamma = 0$$

[πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με $4a$]

$$4a^2x^2 + 4abx = -4a\gamma$$

[μεταφέρουμε το σταθερό όρο στο 2^ο μέλος]

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot \beta = -4a\gamma$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot \beta + \beta^2 = \beta^2 - 4a\gamma$$

[στο 1^ο μέλος προσθέτουμε το β^2 για να γίνει συμπλήρωση τετραγώνου]

$$(2ax + \beta)^2 = \beta^2 - 4a\gamma$$

Αν συμβολίσουμε την παράσταση $\beta^2 - 4a\gamma$ με Δ (διακρίνουσα) τότε η εξίσωση γράφεται:

$(2ax + \beta)^2 = \Delta$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\Delta > 0$ τότε έχουμε:

$$2ax + \beta = \pm \Delta$$

$$2ax = -\beta \pm \Delta$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Αν $\Delta = 0$ τότε έχουμε:

$$2ax + \beta = 0$$

$$2ax = -\beta$$

$$x = -\frac{\beta}{2a}$$

- Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη).

2.1.1. Συμπέρασμα:

Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$

- Αν $\Delta > 0$ έχει δύο άνισες λύσεις τις $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Αν $\Delta = 0$ έχει μία διπλή λύση την $x = -\frac{\beta}{2a}$
- Αν $\Delta < 0$ δεν έχει λύση (αδύνατη).

[Απ. i) Η Κ όταν $x \neq \pm \frac{1}{2}$, η Λ όταν $x \neq 0$ και -1

iii) $x = \frac{1}{4}$]

2.18. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = x^3 - x^2 - 4x + 4 \quad \text{και} \quad B = (x-3)^2 - 4.$$

i) Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{A}{B}$ και να βρείτε τις τιμές που μπορεί να παίρνει το x ώστε αυτό ορίζεται.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{A}{B} = -12$.

[Απ. i) $x \neq \pm 1$ και 5 , $\frac{A}{B} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-5}$ ii) $x = -16, x = 4$]

2.19. Να λυθεί η εξίσωση:

$$(x+1)^3 - 3(x-1)^2 - 2(x-1)(x+1) = (x-1)^3 + 8$$

[Απ. $-7, 1$]

2.20. Να λύσετε την επόμενη εξίσωση με άγνωστο το x .

$$(x-\alpha)^2 + (x+\alpha)^2 = (x-\alpha)(x+\alpha) + 4\alpha x.$$

[Απ. $\alpha, 3\alpha$]

2.21. Να λυθεί η εξίσωση:

$$(x^2 - 4)(x - 1) = (x^2 - 1)(x - 2)$$

[Απ. $1, 2$]

2.22. Για τον θετικό αριθμό α ισχύει η ισότητα:

$$\frac{2}{\alpha^2} + \frac{3}{\alpha} = 2.$$

i) Να βρείτε τον α .

ii) Για την τιμή του α που θα βρείτε, να λύσετε την εξίσωση: $\alpha^{x-x^2} = \frac{1}{4}$.

[Απ. i) $\alpha = 2$ ii) $-1, 2$]

2.23. Να λυθεί η εξίσωση: $5^{(x^2+3x+1)^2} = 5$.

[Απ. $-3, -2, -1, 0$]

2.24. i) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = x^3 - 3x + 2 \quad \text{και} \quad B = x^5 - x^3 - x + 1.$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{B}{x+1} = A$.

[Απ. i) $A = (x-1)^2(x+2)$, $B = (x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$ ii) $x = 1$]

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 3.1.** Δίνεται ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις $x + 3$ και $x - 3$. Το εμβαδόν του είναι 40 cm^2 .
 i) Να δείξετε ότι η αλγεβρική παράσταση που εκφράζει την περίμετρο του ορθογώνιου είναι μονώνυμο και να βρείτε το συντελεστή και το κύριο μέρος του.
 ii) Να βρείτε το x .
 iii) Να υπολογίσετε την περίμετρό του.
 [Απ. i) $4x$ ii) $x=7$ iii) 28cm]
- 3.2.** Οι κάθετες πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου έχουν μήκη $2x \text{ m}$, $\sqrt{3}(x+1) \text{ m}$ ενώ η υποτείνουσα έχει μήκος 4 m . Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου.
 [Απ. $6+2\sqrt{3} \text{ m}$]
- 3.3.** Το μήκος της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 5 cm και η περιμέτρος του ισούται με 12 cm . Να υπολογίσετε τα μήκη των κάθετων πλευρών του.
 [Απ. 3 cm , 4 cm]
- 3.4.** Να βρεθούν οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, αν διαφέρουν κατά 2 cm και η υποτείνουσα του είναι 10 cm .
 [Απ. 6 cm , 8 cm]
- 3.5.** Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μια κάθετη πλευρά είναι κατά 1 cm μεγαλύτερη από την άλλη, ενώ η υποτείνουσα είναι κατά 2 cm μεγαλύτερη από τη μικρότερη κάθετη πλευρά.
 Να βρεθούν οι πλευρές του τριγώνου, η περίμετρος του και το εμβαδόν του.
 [Απ. 3 cm 4 cm 5 cm , 12 cm , 6 cm^2]
- 3.6.** Να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα 10 m , αν η μια κάθετη πλευρά είναι ίση με το ημίθροισμα της υποτείνουσας και της άλλης κάθετης πλευράς.
 [Απ. 6 m , 8 m]
- 3.7.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ έχουμε:
 $\alpha = \frac{\omega^2+1}{\omega}$ και $\beta = \frac{\omega^2+1}{\omega}$ και $\omega > 1$. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ.
 [Απ. $2\omega+2$]
- 3.8.** Σε ένα ορθογώνιο η μια πλευρά του είναι κατά 2 cm πιο μεγάλη απ' το διπλάσιο της άλλης. Αν το εμβαδόν του ορθογώνιου είναι 60 cm^2 , να βρεθεί η περίμετρος του και η διαγώνιος του.
 [Απ. 34 cm , 13 cm]
- 3.9.** Οι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί. Να υπολογίσετε τις πλευρές του και το εμβαδόν του.
 [Απ. 3 , 4 , 5]
- 3.10.** Το τετράγωνο της ηλικίας ενός μαθητή είναι ίσο με το εννεαπλάσιο της ηλικίας που θα έχει μετά από 10 χρόνια. Ποια είναι η ηλικία του;
 [Απ. 15]
- 3.11.** Το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών άρτιων φυσικών αριθμών είναι ίσο με 100 . Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.
 [Απ. $6, 8$]
- 3.12.** Σε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ δίνονται $AB = 2x-7 \text{ cm}$, $BD = x-5 \text{ cm}$ και το εμβαδόν του ισούται με 27 cm^2 . Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του.
 [Απ. 9 cm , 3 cm]
- 3.13.** Ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB // \Gamma\Delta$ έχει $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Αν $AB = AD = x-2 \text{ cm}$, $\Gamma\Delta = x+10 \text{ cm}$ και εμβαδόν 112 cm^2 , να υπολογίσετε τις βάσεις του και το ύψος του.
 [Απ. $\beta = \nu = 8 \text{ cm}$, $B = 20 \text{ cm}$]

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

4.1. Ποια εξίσωση ονομάζουμε κλασματική;

Απάντηση:

Μια εξίσωση που περιέχει άγνωστο στον παρονομαστή, λέγεται κλασματική εξίσωση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{4}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{x}{x^2-4}$$

$$\beta) \frac{2}{x^2+2x} = \frac{-1}{x^2+5x+6}$$

$$\gamma) \frac{13}{x+1} - \frac{1}{1-x} = \frac{5x-3}{x^2-1}$$

[Απ. α) 3/2 β) αδύνατη γ) αδύνατη]

$$\alpha) \frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{2x} = 2$$

$$\beta) \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x-2} - \frac{1}{x^2-2x} = 0$$

$$\gamma) \frac{2x-3}{x} - \frac{5x-3}{x^2} = \frac{2x^2+x-8}{x^3} + 2$$

$$\delta) \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x^2-x-2}$$

[Απ. α) 2 β) 1, $-\frac{1}{2}$ γ) 1, -0,8 δ) αδύνατη]

4.3. Να εξετάσετε αν έχουν τις ίδιες λύσεις οι εξισώ-

$$\text{σεις: } \frac{8}{x-10} = \frac{x}{10-x} \quad \text{και} \quad \frac{x-10}{8} = \frac{10-x}{x}$$

[Απ. όχι]

4.4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x}$$

$$\beta) \frac{5}{x+3} - \frac{1}{x+2} = \frac{2x+1}{x^2+5x+6}$$

$$\gamma) \frac{x-2}{x} = \frac{x^2+4}{x^2-2x}$$

$$\delta) \frac{x+2}{x-3} + \frac{x-2}{x+3} = \frac{2(x^2+6)}{x^2-9}$$

[Απ. α) 3 β) αδύνατη γ) αδύνατη δ) Όλοι εκτός των -3, 3]

4.5. Δίνονται οι κλασματικές παραστάσεις

$$A = \frac{2x}{x^2+2x}, \quad B = \frac{3}{2x-4} \quad \text{και} \quad \Gamma = \frac{x-14}{2(x^2-4)}.$$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις.

β) Να λυθεί η εξίσωση $A - B = \Gamma$.

[Απ. α) Η Α όταν $x \neq 0$ και -2 . Η Β όταν $x \neq 2$, η Γ όταν $x \neq \pm 2$ β) Όλοι οι αριθμοί εκτός των 0, -2, 2]

4.6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

4.7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{4}{x+1} - \frac{4x-3}{x^2-1} = 2$$

$$\beta) 1 - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{2x}{x^2-4}$$

$$\gamma) \frac{12}{3x-2} - \frac{8}{3x+2} = \frac{2-33x}{4-9x^2}$$

[Απ. α) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ β) 0 γ) 2]

4.8. Το άθροισμα των κλασμάτων $\frac{2}{x^2+2x}$ και $\frac{3}{2x+4}$

με ποιόν αριθμό πρέπει να είναι ίσο, ώστε η εξίσωση που θα προκύψει να έχει λύση $x = 1$;

Ποια είναι η άλλη λύση της εξίσωσης;

[Απ. $\frac{7}{6}$, η άλλη λύση είναι $-\frac{12}{7}$]

4.9. Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \frac{x+\frac{2x}{x-2}}{1+\frac{4}{x^2-4}}, \quad B = \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^3}{x^3-x}.$$

α) Να μετασχηματιστούν οι Α και Β στην πιο απλή τους μορφή και να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζονται.

β) Να λύσετε η εξίσωση $\frac{2}{x} \cdot A - (x+1) \cdot B = 0$.

[Απ. α) Η Α όταν $x \neq 0, 2$ και -2 . Η Β όταν $x \neq 0, 1$
και -1 β) 4]

4.10. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση:

$$x^2 - \frac{\lambda^2+1}{\lambda-1} \cdot x + 2\lambda + 2 = 0$$

έχει ρίζα τον αριθμό -1 .

[Απ. $-1, \frac{2}{3}$]

4.11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{1}{x^2-3x+2}$

β) $\frac{x-1}{x-3} + 1 = \frac{x^2-3x+4}{x^2-5x+6}$

γ) $\frac{x-1}{x+3} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x^2+3}{x^2-9}$

[Απ. α) αδύνατη β) 1, 4 γ) 1, -6]

4.12. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{5x-4}{x^2+5x+6} - \frac{10x+1}{3x^2-27} = \frac{5}{3x-9}$

β) $\frac{4}{x^2-x-2} + \frac{x+5}{2x+2} = \frac{2x}{3x-6}$

γ) $\frac{x+2}{x+3} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{x^2+2x-3}$

δ) $\frac{3x^2}{x^2-4} - \frac{x-1}{x^2+2x} = \frac{x+2}{x-2} + 2$

[Απ. α) $\frac{4}{103}$ β) 3 γ) αδύνατη δ) 1, $\frac{2}{5}$]

4.13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{2x}{x+1} + \frac{x}{1-x} + 1 = \frac{3x^2-5}{x^2-1}$

β) $\frac{2x+1}{x^2+3x} + \frac{4x}{x^2-9} = \frac{4}{3+x} - \frac{2}{3-x}$

γ) $\frac{7-x^2}{x^2-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{2}{x-1}$

δ) $\frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x^2-2x}$

[Απ. α) -4 β) αδύνατη γ) 2 δ) -1]

4.14. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\frac{3x^2-1}{x-1} - \frac{2}{x^2-x} = \frac{x^2-3x+2}{x}$

ii)

[Απ. i) -3 ii)]

ΕΝΟΤΗΤΑ 5.**ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ**

5.1. Πως συγκρίνουμε δύο αριθμούς a και β ;

Απάντηση:

Για να συγκρίνουμε δύο αριθμούς a και β , βρίσκουμε τη διαφορά τους $a - \beta$ και:

- Αν $a - \beta > 0$ τότε $a > \beta$
- Αν $a - \beta < 0$ τότε $a < \beta$
- Αν $a - \beta = 0$ τότε $a = \beta$

5.2. Να εξηγήσετε ότι αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή αν $a > \beta$ τότε $a + \gamma > \beta + \gamma$.

Απάντηση:

Έχουμε: $(a + \gamma) - (\beta + \gamma) = a + \gamma - \beta - \gamma = a - \beta > 0$, αφού $a > \beta$.

Άρα $a + \gamma > \beta + \gamma$.

5.3. Να εξηγήσετε ότι αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή αν $a > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$.

Απάντηση:

Έχουμε: $a \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma = \gamma \cdot (a - \beta) > 0$, αφού $\gamma > 0$ και $a - \beta > 0$.

Άρα $a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$.

5.4. Να εξηγήσετε ότι αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα αντίθετης φοράς. Δηλαδή αν $a > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

Απάντηση:

Έχουμε: $a \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma = \gamma \cdot (a - \beta) < 0$, αφού $\gamma < 0$ και $a - \beta > 0$.

Άρα $a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

5.5. Να εξηγήσετε ότι αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες της ίδιας φοράς, προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή αν $a > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $a + \gamma > \beta + \delta$.

Απάντηση:

Έχουμε: $(a + \gamma) - (\beta + \delta) = a + \gamma - \beta - \delta = (a - \beta) + (\gamma - \delta) > 0$, αφού $a - \beta > 0$ και $\gamma - \delta > 0$.

Άρα $a + \gamma > \beta + \delta$.

Βασικές εφαρμογές

5.6. Να αποδείξετε ότι αν $a > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε $a > \gamma$. (Μεταβατική ιδιότητα)

Απάντηση:

Επειδή $a > \beta$ τότε $a - \beta > 0$ (1). Όμοια, επειδή $\beta > \gamma$ τότε $\beta - \gamma > 0$ (2).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2), οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} a - \beta + \beta - \gamma &> 0 \\ a - \gamma &> 0 \\ a &> \gamma. \end{aligned}$$

5.7. Να αποδείξετε ότι αν $a > \beta$ τότε $-a < -\beta$.

Απάντηση:

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} a &> \beta \\ (-1) \cdot a &< (-1) \cdot \beta \\ -a &< -\beta. \end{aligned}$$

5.8. Να αποδείξετε ότι αν $a > \beta$ και a, β ομόσημοι αριθμοί, τότε $\frac{1}{a} < \frac{1}{\beta}$.

Απάντηση:

Αφού οι αριθμοί είναι ομόσημοι, τότε $ab > 0$ οπότε και $\frac{1}{ab} > 0$.

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} a &> \beta \\ \frac{1}{ab} \cdot a &> \frac{1}{ab} \cdot \beta \\ \frac{1}{b} &> \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.9. Αν $x > y$, να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\frac{3}{4}x - 5z \quad \text{και} \quad \frac{3}{4}y - 5z.$$

5.10. Αν $\kappa > \lambda$, να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$8,3\mu - 6\kappa \quad \text{και} \quad 8,3\mu - 6\lambda.$$

5.11. Αν $\beta > 0$ να δείξετε ότι: $a + \beta > a - \beta$.

5.12. Αν $x < z$ και $0 < y < \omega$ να δικαιολογήσετε ότι:

$$x - \frac{1}{y} < z - \frac{1}{\omega}.$$

5.13. Αν $x > 3$ να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A = \sqrt{(x-3)^2} \quad \text{και} \quad B = 2x.$$

[Απ. $A < B$]

5.14. Αν είναι $2a < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$a < \frac{a+\beta}{3} < \frac{\beta}{2}.$$

5.15. Αν $-1 < x < 3$ και $2 < y < 3$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:

i) $A = 3x + 2y - 1$

ii) $B = 4x - 2y + 5$

[Απ. i) $0 < A < 14$ ii) $-5 < B < 13$]

5.16. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\frac{1}{2} \cdot x + 2 - \frac{3x+1}{3} > x \quad \text{και} \quad \frac{2(x-3)}{3} - x < 0.$$

[Απ. $-6 < x < \frac{10}{9}$]

Κεφάλαιο 3ο

Κεφάλαιο 3ο

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

- *Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης*
- *Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του*
- *Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος*

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

1.1. Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + \beta$;Απάντηση:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + \beta$ είναι ευθεία παράλληλη προς την ευθεία $y = ax$.

1.2. Τι παριστάνει η εξίσωση $ax + \beta = \gamma$;Απάντηση:

Κάθε εξίσωση της μορφής $ax + \beta = \gamma$ παριστάνει μια ευθεία ε .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε το σημείο

$A(5\lambda-2, 2\lambda+1)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -x+6$.

[Απ. $\lambda=1$]1.2. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις

$y = (\lambda^2+4)x + 5$ και $y = 4\lambda x - 3\lambda$ αντίστοιχα. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε οι δύο ευθείες να είναι παράλληλες.

[Απ. $\lambda=2$]1.3. Για ποιες τιμές του κ οι ευθείες $y = 3\kappa^2 x + 1$ και $y = (\kappa+4)x - 5\kappa^2$ είναι παράλληλες;[Απ. $\kappa=-1$ ή $\kappa=4/3$]1.4. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon_1 : y = (3\lambda-4)x + 2\lambda - 6$.

Για ποια τιμή του λ η ευθεία ε_1 :

α) Περνά από το σημείο $A(2,2)$

β) Είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

γ) Διέρχεται από την αρχή των αξόνων

δ) Είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_2 : y = 8x + 7$

ε) Τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 3

στ) Τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 4

ζ) Είναι παράλληλη στην ευθεία

$$\varepsilon_3 : y = \frac{(3\lambda-1)x+2\lambda-1}{2}$$

[Απ. α) $\lambda=2$ β) $\lambda=\frac{4}{3}$ γ) $\lambda=3$ δ) $\lambda=4$ ε) $\lambda=\frac{18}{11}$ στ) $\lambda=5$ ζ) $\lambda=\frac{7}{3}$]

iii) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου OAB.

[Απ. ii) $A(3,0)$ $B(0,4)$ iii) $\Pi=12, E=6$]1.6. Δίνεται η ευθεία $\frac{2-a}{2}x + (a-1)y = 12$ η οποία

διέρχεται από το σημείο $M(3,-2)$. Να βρείτε:

i) Την τιμή του a .

ii) Τα σημεία τομής A και B της ευθείας με τους άξονες.

iii) Το εμβαδόν του τριγώνου OAB.

[Απ. i) $a=-2$ ii) $A(6,0)$ $B(0,-4)$ iii) $E=12$]1.7. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις

$y = 2\kappa^2 x + 3\lambda + 1$ και $y = (5\kappa-3)x + 9$ αντίστοιχα,

όπου κ, λ ακέραιοι αριθμοί. Δίνεται ακόμα ότι η ε_1 διέρχεται από το σημείο $A(1,6)$.

i) Να βρείτε τις τιμές των κ, λ .

ii) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων τις δύο ευθείες.

[Απ. i) $\kappa=\lambda=1$]1.5. Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $4x + 3y = 12$.

i) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής A και B της ευθείας ε με τους άξονες.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.**Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
ΚΑΙ Η ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ****ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

2.1. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x+y=4 \\ y=1 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x=2 \\ x+y=5 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} y=x \\ 2x+y=6 \end{cases}$$

[Απ. α) $(x, y) = (3, 1)$ β) $(x, y) = (2, 3)$ γ) $(x, y) = (2, 2)$]

2.2. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} y=x \\ y=2x-3 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} y=x+2 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

[Απ. α) $(x, y) = (3, 3)$ β) $(x, y) = (2, 4)$]

2.3. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω συστήματα έχουν λύση, ποια είναι αδύνατα και ποια είναι αόριστα.

$$\text{i)} \begin{cases} 2x+y=4 \\ y=x+3 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 3x-y=2 \\ x+y-2=0 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \begin{cases} 3x-2y=5 \\ 4y=6x+7 \end{cases} \quad \text{iv)} \begin{cases} \frac{1}{2}x-2y=3 \\ 2x-8y-12=0 \end{cases}$$

2.4. Το σύστημα $\begin{cases} 2(x+y)-4=0 \\ 5(x+y)-10=0 \end{cases}$ είναι αδύνατο ή αόριστο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1. Να λύσετε τα συστήματα και έπειτα να κάνετε την επαλήθευση.

$$\text{i)} \begin{cases} x=3y+1 \\ 3x-2y=-11 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} x-2y=4 \\ x+y=31 \end{cases}$$

[Απ. i) $(x, y) = (-5, -2)$ ii) $(x, y) = (22, 9)$]

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{2x+2}{3} + y = 3 \\ \frac{x+2}{2} - 1 = \frac{y+2}{3} \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} x+3+(y+1)^2 = y^2 \\ 3(x+2y) = 2 \end{cases}$$

[Απ. i) $(2, 1)$ ii) αδύνατο]

2.2. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x-2y=2 \\ x-7y+13=0 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 5x+y=45 \\ 2y-3x=25 \end{cases}$$

[Απ. i) $(x, y) = (8, 3)$ ii) $(x, y) = (5, 20)$]

2.9. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{2x-y}{3} - \frac{x+y}{6} = -\frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} + y = 7 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 2x+y+4=0 \\ \frac{3x+y}{3} + \frac{2y-x}{5} = x + \frac{2}{5} \end{cases}$$

[Απ. i) $(x, y) = (4, 5)$ ii) $(x, y) = (-2, 0)$]

2.3. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x=5(y+1) \end{cases}$

[Απ. $(x, y) = (5, 2)$]

2.10. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (2\alpha-1)x+(4\beta+1)y=3 \\ (\alpha+1)x+(\beta-2)y=2 \end{cases}$ με αγνώστους τα x, y . Να βρείτε τις τιμές των α, β , ώστε το σύστημα να έχει λύση το ζεύγος $(-1, 1)$.

[Απ. $\alpha = -1/2, \beta = 9/2$]

2.4. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} 2[x-(4-y)]+20=0 \\ x+4y=0 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 2(2x+3y)=3(2x-3y)+10 \\ 4x-3y=4(6y-2x)+3 \end{cases}$$

[Απ. i) $x = -8, y = 2$ ii) $x = \frac{5}{2}, y = 1$]

2.11. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} 2(x+2y)-3(x-3y)=-83 \\ 2(y-2x)-(x-2y)=-49 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 3x+2y=7 \\ 2(3x+2y)+4(2y+3x)=42 \end{cases}$$

[Απ. i) $x = 5, y = -6$ ii) αδύνατο]

2.5. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot x + y = -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \cdot x - \frac{2}{3} \cdot y = \frac{19}{2} \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 0,3x - 1,5y + 0,3 = 0 \\ y - 0,3x = -0,2 \end{cases}$$

[Απ. i) $(x, y) = (5, -3)$ ii) $(x, y) = (4, 1)$]

2.12. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{x-2}{4} + \frac{y-3}{8} = \frac{x}{2} - 1 \\ \frac{4x+1}{4} - \frac{5y-9}{6} = \frac{x}{2} + 1 \end{cases} \quad \text{ii)}$$

[Απ. i) $x = 2, y = 3$ ii)]

2.6. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{4x-y}{6} = 1 - \frac{x}{4} \\ x+y=7 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} \frac{1}{2}x + 4y = 1 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$$

[Απ. i) $x = 2, y = 5$ ii) $x = -2, y = \frac{1}{2}$]

2.13. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{3x-y}{2} + \frac{x+y}{5} = x + \frac{y+2}{3} + 1 \\ x - \frac{x+y}{2} - 1 = y - \frac{x+6}{3} \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} \frac{3x-2y}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{4}{3} \\ 2x-3y + \frac{x+y}{5} = -4 \end{cases}$$

[Απ. i) $(6, 4)$ ii) $(2, 3)$]

2.7. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} 2x-3y=6 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} \frac{3x-2y+1}{2} = \frac{x-3y-2}{3} \\ \frac{x+2y}{5} = \frac{2x+y+1}{3} \end{cases}$$

[Απ. i) $(-3, -4)$ ii) $(-1, -2)$]

2.14. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 2x-5y = \lambda^2 - 3 \\ 2x-5y = 1 \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο.

[Απ. $\lambda=2$ ή $\lambda=-2$]

[Απ. 7]

- 2.15. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ \mu x - \mu y = \mu^2 \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του μη μηδενικού αριθμού μ ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις. Για την τιμή του μ που θα βρείτε να λύσετε το σύστημα.

[Απ. $\mu=1$]

- 2.16. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 5 \\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 2 \end{cases}$

[Απ. $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{3}$]

- 2.17. Δίνεται η εξίσωση $5x - 4y = 7$. Να βρείτε μια άλλη εξίσωση που να σχηματίζει με αυτή
- ένα σύστημα, που να έχει μια λύση.
 - ένα σύστημα, που να είναι αδύνατο.
 - ένα σύστημα, που να είναι αόριστο.

- 2.18. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} x^2 - 9y^2 = 5 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ x + y = 7 \end{cases}$$

[Απ. i) $x=3, y=-\frac{1}{3}$ ii) (3, 4), (4, 3)]

- 2.19. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} y - x = 1 \\ x^2 + xy - y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$$

[Απ. i) (-1, 0), (2, 3) ii) (2, 1), (3, -1)]

- 2.20. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x^2 - xy + 2y = 3 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x - y^2 = 9 \end{cases}$$

[Απ. i) (1, 2), ($\frac{8}{5}, \frac{11}{10}$) ii) (2, 1), (53, -16)]

- 2.21. i) Να βρείτε τον β , αν η ευθεία με εξίσωση

$$y = 2x + \frac{\beta}{3} \text{ διέρχεται από το σημείο } A(0, 1).$$

- ii) Για τις τιμές του β που θα βρείτε να λύσετε το

$$\text{σύστημα: } \begin{cases} y = 2x + \frac{\beta}{3} \\ y^2 + xy = 12 \end{cases}$$

[Απ. i) $\beta=3$ ii) $(x, y) = (1, 3), (-\frac{11}{6}, -\frac{8}{3})$]

- 2.22. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{y-2} = 3 \\ \frac{3}{2x+1} + \frac{2}{y-2} = 4 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} \frac{4}{x-y} + \frac{12}{x+y} = -1 \\ \frac{1}{x-y} + \frac{1}{2x+2y} = 0 \end{cases}$$

[Απ. i) $(-\frac{1}{4}, 1)$ ii) (5, -15)]

- 2.23. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνεται ότι: $AB = x + 4$, $A\Gamma = 4x - y$ και $B\Gamma = y + 2$. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του.

- 2.24. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου, το οποίο έχει περίμετρο 10 cm και η βάση του είναι μεγαλύτερη κατά 1 cm κάθε μιας από τις ίσες πλευρές του.

[Απ. 3cm 4cm]

- 2.25. Ένας φυσικός αριθμός, όταν διαιρείται με το 5 ή το 3 αφήνει υπόλοιπο 2 και ηλίκα που δίνουν άθροισμα 8. Ποιος είναι ο αριθμός;

[Απ. 17]

- 2.26. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας $y = ax + \beta$ που διέρχεται από τα σημεία $A(2, 5)$ και $B(4, -1)$.

[Απ. $y = -3x + 11$]

- 2.27. Να βρεθούν τα a, β , ώστε η εξίσωση $x^2 + ax + \beta = 0$ να αληθεύει για $x = 3$ και $x = -7$.

[Απ. $a=4, \beta=-21$]

- 2.28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + x + \beta$. Αν ισχύει $f(1) = 2$ και ο 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ να βρείτε τα a, β καθώς και το είδος του ακροτάτου που παρουσιάζει η συνάρτηση.

[Απ. $a=-1, \beta=2$, Μέγιστο]

- 2.29. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $y = ax + \beta$ αν αυτή διέρχεται από τα σημεία $(a, -1)$ και $(1, 3a)$.

[Απ. $y = -x - 2$]

- 2.30. Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθενε 9 χρόνια ενωρίτερα, θα βασιλεύε κατά το της ζωής του. Αν όμως πέθενε 9 χρόνια αργότερα, θα βασιλεύε κατά το μισό της ζωής του. Σε ποιά ηλικία πέθανε και επί πόσο χρόνο βασιλέυσε;

[Απ. Πέθανε 33 χρόνων και βασιλέυσε 12 χρόνια]

- 2.31. Σε ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB = 3x + 6$, $B\Gamma = x^2$, $\Gamma\Delta = 5y + 4$ και $\Delta A = y$ όπου x θετικός ακέραιος. Να βρείτε την περίμετρο του ορθογώνιου.

[Απ. 20]

- 2.32. Ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή το A έχει $AB = x^2$, $A\Gamma = 5 - y^2$ και τα ύψη του από το B, Γ είναι $B\Delta = x + y$ και $\Gamma E = 1$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τις ίσες πλευρές του τριγώνου.

[Απ. $AB=A\Gamma=1$ ή $AB=A\Gamma=4$]

- 2.33. Αν η εξίσωση $x^2 + ax + \beta = 0$ έχει διακρίνουσα 16 και κοινή λύση με την εξίσωση

$$3 + \frac{x}{x-1} = \frac{2a+1}{x-1}, \text{ να βρείτε τα } a, \beta.$$

[Απ. $a=1, \beta=-\frac{15}{4}$ ή $a=-3, \beta=-\frac{7}{4}$]

- 2.34. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 9. Αν ο αριθμός αυξηθεί κατά 27 προκύπτει διψήφιος αριθμός με εναλλαγή των ψηφίων του αρχικού αριθμού. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

[Απ. 36]

Κεφάλαιο 4ο

Κεφάλαιο 4ο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- Η συνάρτηση $y = ax^2$
- Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.**Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = ax^2$** **ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

1.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 20x^2$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} = 20$.

β) $\frac{f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta)}{f(\alpha) + f(\beta)} = 2$.

1.2. Να βρείτε τα σημεία τομής της παραβολής $y = x^2$
και της ευθείας $y = x + 6$.

[Απ. $(-2, 4)$, $(3, 9)$]

1.3. Για ποιες τιμές του a η παραβολή $y = (2a - 6)x^2$
έχει ελάχιστο;

[Απ. $\alpha > 3$]

1.4. Για ποιες τιμές του a η παραβολή $y = \frac{3 - 5a}{7} \cdot x^2$

βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;

[Απ. $\alpha > \frac{3}{5}$]

Κεφάλαιο 6ο

Κεφάλαιο 6ο

ΙΣΟΤΗΤΑ - ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

- *Τρίγωνα - Ίσα τρίγωνα*
- *Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων*
- *Θεώρημα του Θαλή*
- *Όμοια πολύγωνα*
- *Όμοια τρίγωνα*
- *Εμβαδά όμοιων σχημάτων*
- *Όγκοι όμοιων σχημάτων*

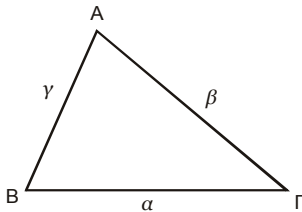
ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

**1.1. Τι αναφέρει η τριγωνική ιδιότητα;
Να κατασκευάσετε ένα σχήμα και να γράψετε τη σχέση.**

Απάντηση:

Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο. Η ιδιότητα αυτή των πλευρών ενός τριγώνου ονομάζεται **τριγωνική ιδιότητα**.



Στο διπλανό τρίγωνα συμβολίζουμε α, β, γ τις πλευρές BΓ, AΓ και AB αντίστοιχα. Η σχέση της τριγωνικής ανισότητας είναι:

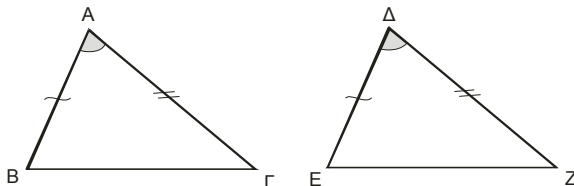
$$\begin{aligned} \alpha &< \beta + \gamma \\ \beta &< \alpha + \gamma \\ \gamma &< \alpha + \beta. \end{aligned}$$

**1.2. Να αναφέρετε τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων.
Για κάθε κριτήριο να κατασκευάσετε ένα σχήμα και να γράψετε τις σχέσεις.**

Απάντηση:

Τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων είναι:

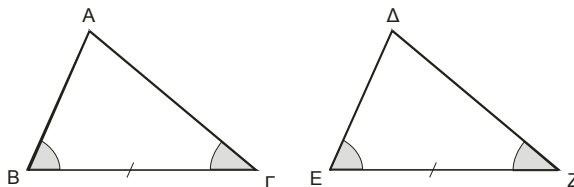
1) Όταν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μια προς μια με δύο πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες είναι ίσες, τότε τα δυο τρίγωνα είναι ίσα.



$$\begin{aligned} \text{Αν } AB &= \Delta E \\ A\Gamma &= \Delta Z \\ \hat{A} &= \hat{\Delta} \end{aligned}$$

Τότε τα τρίγωνα ABΓ και ΔEZ είναι ίσα.

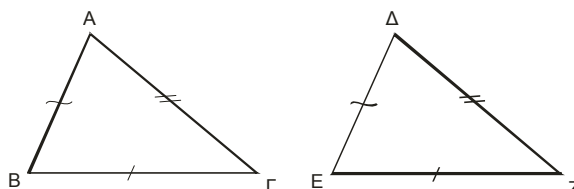
2) Όταν μια πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μια πλευρά ενός άλλου τριγώνου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών γωνίες είναι μια προς μια ίσες, τότε τα δυο τρίγωνα είναι ίσα.



$$\begin{aligned} \text{Αν } B\Gamma &= EZ \\ \hat{B} &= \hat{E} \\ \hat{\Gamma} &= \hat{Z} \end{aligned}$$

Τότε τα τρίγωνα ABΓ και ΔEZ είναι ίσα.

3) Όταν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μια προς μια με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου, τότε τα δυο τρίγωνα είναι ίσα.



$$\begin{aligned} \text{Αν } AB &= \Delta E \\ A\Gamma &= \Delta Z \\ B\Gamma &= EZ \end{aligned}$$

Τότε τα τρίγωνα ABΓ και ΔEZ είναι ίσα.

1.3. Να αναφέρετε τα κριτήρια ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων.**Απάντηση:**

Τα δυο κριτήρια ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων είναι:

- 1) Όταν μια πλευρά και μια οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσες με μια αντίστοιχη πλευρά και οξεία γωνία ενός άλλου, τότε τα δυο τρίγωνα είναι ίσα.
- 2) Όταν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες με δυο αντίστοιχες πλευρές του άλλου, τότε τα δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.4. Στις πλευρές ενός τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε από ένα σημείο Δ , E και Z . Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΔEZ είναι μικρότερη από την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

1.5. Πάνω στις πλευρές ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, παίρνουμε από ένα σημείο E , Z , H και Θ . Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τετραπλεύρου $EZH\Theta$ είναι μικρότερη από την περίμετρο του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

1.6. Στο εσωτερικό ενός τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε σημείο O . Να αποδείξετε ότι:

$$OA + OB + OG > \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}.$$

1.7. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των διαγωνίων ενός τετραπλεύρου είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα δύο απέναντι πλευρών του.

1.8. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\alpha) \nu_a < \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

$$\beta) \nu_a + \nu_b + \nu_\gamma < \alpha + \beta + \gamma.$$

1.9. Στις πλευρές AB και AG ενός τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Z και E . Αν K είναι το σημείο τομής της BE με την ΓZ και Δ το σημείο τομής της AK με την $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

$$A\Delta + BE + \Gamma Z > \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}.$$

1.10. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.

1.11. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$. Πάνω στις πλευρές του AB και AG παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}AG$. Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔEM είναι ισοσκελές.

1.12. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$. Προεκτείνουμε τις πλευρές του AB και AG και

παίρνουμε σε αυτές αντίστοιχα τα τμήματα $B\Delta$, ΓE ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔEM είναι ισοσκελές.

1.13. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$. Προεκτείνουμε τις πλευρές του AB και AG και παίρνουμε σε αυτές αντίστοιχα τα τμήματα $B\Delta$, ΓE ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = BE$.

1.14. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$ φέρνουμε τη διάμεσό του AM . Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Δ πάνω στην AM . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές.

1.15. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και πάνω στις πλευρές του AB , $B\Gamma$ και ΓA παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία K , Λ , M έτσι ώστε $AK = B\Lambda = \Gamma M$.

- α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα AKM και $BK\Lambda$.
- β) Να συγκρίνετε τα τμήματα KM και $K\Lambda$.
- γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισόπλευρο.

1.16. Κατασκευάζουμε ένα σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας \hat{A} και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε τα σημεία Δ και E , έτσι ώστε $A\Delta = AB$ και $AE = AG$. Να αποδείξετε ότι $BE = \Gamma\Delta$.

1.17. Δίνεται κύκλος κεντρου O και χορδή του AB . Προεκτείνουμε την AB προς τα δύο άκρα της, κατά ίσα τμήματα AG και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) O\hat{\Gamma}A = O\hat{\Delta}B.$$

β) Το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

1.18. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$. Στις πλευρές της Ox και Oy παίρνουμε τμήματα OA , OG και OB , OD αντίστοιχα τέτοια, ώστε $OA = OB$, $OG = OD$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) B\Gamma = A\Delta$$

$$\beta) M\Gamma = M\Delta$$

γ) Το τμήμα OM διχοτομεί τη γωνία $x\hat{O}y$.

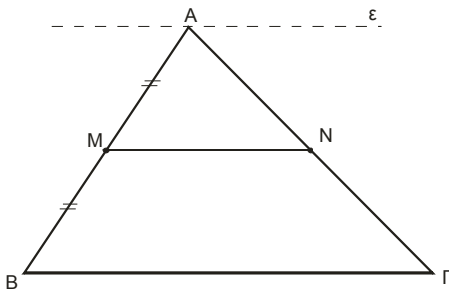
- 1.19. Θεωρούμε ένα σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρνουμε τη διάμεσο AM . Από τις κορυφές B και Γ φέρνουμε καθέτους BD , GE στη διάμεσο AM . Να αποδείξετε ότι $BD = GE$.
- 1.20. Κατασκευάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και παίρνουμε το μέσο του M . Φέρνουμε μια ευθεία ε που να διέρχεται από το M και να μην είναι κάθετη στο AB . Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των A , B από την ευθεία ε είναι ίσες.
- 1.21. Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κορυφών του A και Γ από τη διαγώνιο $B\Delta$ είναι ίσες.
- 1.22. Κατασκευάζουμε μια γωνία \hat{xOy} και φέρνουμε τη διχοτόμο της $O\delta$. Παίρνουμε ένα σημείο M πάνω στην $O\delta$ και φέρνουμε τις καθέτους MA και MB πάνω στις πλευρές Ox και Oy της γωνίας. Να αποδείξετε ότι:
- α) Το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές.
 - β) Το τμήμα OM είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{AMB} .
 - γ) Το τμήμα OM είναι κάθετο στο AB .
- 1.23. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιες ενός ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσες.
- 1.24. Δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και εξωτερικά αυτού κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Να αποδείξετε ότι $BH = GE$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.

ΙΣΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΞΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ

2.1. Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο πλευράς τριγώνου φέρουμε την παράλληλη προς μια πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Απάντηση:



Από το μέσο M της πλευράς AB του τριγώνου ABΓ φέρνουμε MN//BG. Αν φέρουμε την ευθεία ε // BG η οποία διέρχεται από το A, τότε οι παράλληλες ε , MN και BG θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην AG. Δηλαδή το N θα είναι μέσο της AG.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.2. Σε ένα τρίγωνο ABΓ παίρνουμε τα μέσα K, Λ, M των πλευρών του. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου KΛM είναι η μισή της περιμέτρου του τριγώνου ABΓ.

2.3. Σε ένα τρίγωνο ABΓ παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς του BΓ. Σημειώνουμε τα μέσα K, Λ των τμημάτων AB και AΔ. Να αποδείξετε ότι το τμήμα KΛ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς AG.

2.4. Σε ένα τρίγωνο ABΓ παίρνουμε τα μέσα M, N των πλευρών του AB και AG. Πάνω στις πλευρές AB και AG σημειώνουμε τα σημεία K, Λ έτσι ώστε $AK = \frac{1}{2} AM$ και $AL = \frac{1}{2} AN$. Να αποδείξετε ότι $KL = \frac{1}{4} BΓ$.

2.5. Σε ένα τρίγωνο ABΓ φέρνουμε τη διάμεσο AΔ και παίρνουμε τα μέσα E, Z των πλευρών του AB και AG. Το τμήμα EZ τέμνει την AΔ στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι η AK είναι διάμεσος του τριγώνου AEZ.

2.6. Κατασκευάζουμε ένα τετράπλευρο ABΓΔ και παίρνουμε τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του AB, BΓ, ΓΔ και ΔA αντίστοιχα. Σχηματίζουμε τη διαγώνιο AG. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο KΛMN είναι παραλληλόγραμμο.

2.7. Κατασκευάζουμε ένα τραπέζιο ABΓΔ με βάσεις AB, ΓΔ ($AB < \Gamma\Delta$) και φέρνουμε τις διαγώνιες του AG και BΔ. Παίρνουμε τα μέσα των K, Λ των AΔ και BΔ. Να αποδείξετε ότι

α) το τμήμα KΛ προεκτεινόμενο διέρχεται από τα μέσα των AG και BΓ.

β) $KL = MN = \frac{AB}{2}$.

γ) $KM = \Lambda N = \frac{\Delta\Gamma}{2}$.

δ) $KN = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2}$.

ε) $\Lambda M = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2}$.

2.8. Κατασκευάζουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ και φέρνουμε το ύψος του AΔ. Παίρνουμε τα μέσα M, N των πλευρών του AB και AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΔMN είναι η μισή της περιμέτρου του τριγώνου ABΓ.

2.9. Σε ένα οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε το ύψος του $A\Delta$ και παίρνουμε τα μέσα M , N , P των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $MNP\Delta$ είναι τραπέζιο.

2.10. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, η $B\Gamma = 12$ cm και η $AB = 2x+2$ cm. Αν το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των πλευρών $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα είναι $2x-1$ cm, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{\Gamma}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

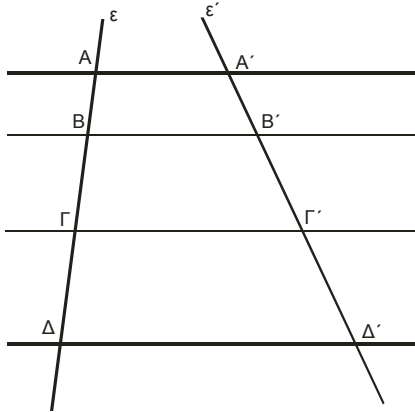
ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΗ

3.1. Τι αναφέρει το θεώρημα του Θαλή;

Να κατασκευάσετε ένα σχήμα και να γράψετε τη σχέση.

Απάντηση:

Όταν παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα της άλλης.



Οι ευθείες ε και ε' τέμνονται από τις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ και ε_4 .

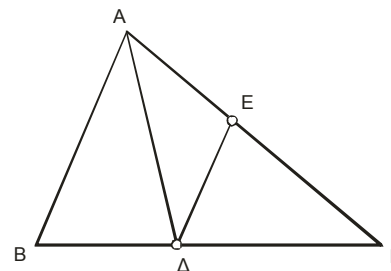
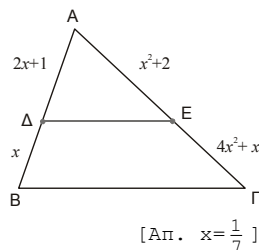
$$\text{Είναι: } \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.2. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος η ΔΕ//ΒΓ.

Δίνεται ότι $AD = 2x+1$,
 $DB = x$, $AE = x^2+2$ και
 $EG = 4x^2+x$.

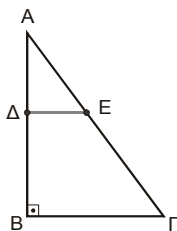
Να βρείτε το x .



3.3. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο

με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB = 8\text{cm}$,
 $B\Gamma = 6\text{cm}$. Φέρνουμε $DE // B\Gamma$ ώστε
 η $AE = 4\text{cm}$. Να υπολογίσετε το
 τμήμα AD .

[Απ. $AD = 3,2\text{cm}$]



Να αποδείξετε ότι:

i) $DE // AB$

ii) $\frac{BD}{AD} = \frac{DE}{AE}$

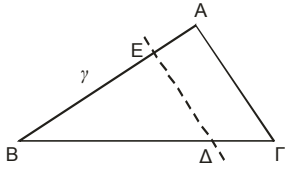
3.5. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 . Αν από σημείο Α εντός των παραλλήλων αυτών ευθειών φέρουμε τις τέμνουσες ΒΑΓ και ΔΑΕ ώστε $AB = 2\text{cm}$, $A\Gamma = x\text{cm}$, $\Delta A = x+1\text{cm}$ και $AE = 3\text{cm}$, να βρεθεί το μήκος του τμήματος ΑΓ.

[Απ. 2cm]

3.4. Στο παρακάτω σχήμα η ΑΔ είναι διχοτόμος της

\hat{A} και $AE = ED$.

3.6. Στο επόμενο σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και πάνω στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Δ ώστε $B\Delta = AB = \gamma$.



Από το σημείο Δ φέρνουμε την ΔE παράλληλη προς την $\text{A}\Gamma$. Αν είναι $\Gamma\Delta = 2,5 \text{ m}$ και $\text{BE} = 8 \text{ m}$ να βρεθεί το μήκος γ της πλευράς AB .

[Απ. $\gamma=10\text{m}$]

ΕΝΟΤΗΤΑ 5.

ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

5.1. Πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια;

Απάντηση:

Δύο πολύγωνα είναι όμοια, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

5.2. Να αναφέρεται τα κριτήρια ομοιότητας δύο τριγώνων.

Απάντηση:

- 1) Όταν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες, τότε έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή είναι όμοια.
- 2) Όταν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, τότε έχουν και τις αντίστοιχες τις γωνίες τους ίσες, δηλαδή είναι όμοια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.3. Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις 5cm, 3cm ενώ ένα άλλο έχει διαστάσεις 15cm, 9cm. Να εξετάσετε αν είναι όμοια.

5.4. Δύο παραλληλόγραμμα $ABΓΔ$ και $A'B'Γ'D'$ έχουν $AB = 7,2dm$, $BΓ = 40cm$, $\hat{A} = \hat{A}' = 65^\circ$, $A'B' = 72cm$, $B'Γ' = 4dm$. Να εξετάσετε αν είναι όμοια.

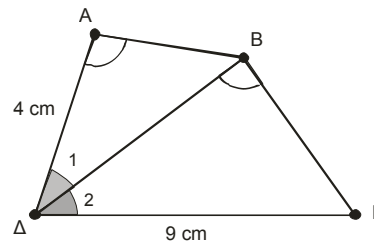
5.5. Δύο παραλληλόγραμμα $ABΓΔ$ και $A'B'Γ'D'$ έχουν $AB = 8cm$, $BΓ = 2cm$, $\hat{A} = \hat{A}' = 70^\circ$, $A'B' = 10cm$, $B'Γ' = 4cm$. Να εξετάσετε αν είναι όμοια.

5.6. Δύο ορθογώνια $ABΓΔ$ και $A'B'Γ'D'$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{4}$. Αν $AB = 4cm$, $AΓ = 5cm$ να υπολογίσετε τις πλευρές των δύο ορθογώνιων.

5.7. Σε ένα τρίγωνο $ABΓ$ δίνεται $AB = 12cm$ και $AΓ = 18cm$. Από ένα σημείο Δ της AB τέτοιο ώστε $A\Delta = 8cm$ φέρνουμε παράλληλη προς την $BΓ$ που τέμνει την $AΓ$ στο σημείο E . Αν $DE = 10cm$, να υπολογίσετε τα τμήματα AE , $EΓ$ και $BΓ$.

[Απ. $AE=12cm$, $EΓ=6cm$, $BΓ=15cm$]

5.8. Στο παρακάτω τετράπλευρο είναι $\hat{A} = \hat{\Delta BΓ}$, $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, $A\Delta = 4cm$ και $\Delta\Gamma = 9cm$.



Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου $B\Delta$.

[Απ. 6cm]

5.9. Σε τετράγωνο $ABΓΔ$ με πλευρά 6 cm προεκτείνουμε την πλευρά $\Delta\Gamma$ κατά τμήμα $ΓE = 2cm$. Αν η EB τέμνει την προέκταση της ΔA στο σημείο Z , να βρεθεί το μήκος του τμήματος AZ .

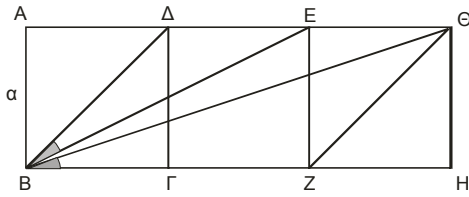
[Απ. $AZ=18cm$]

5.10. Για δύο τρίγωνα $ABΓ$ και ΔEZ δίνονται τα εξής:

$$\hat{A} = \hat{E}, \hat{\Gamma} = \hat{Z}, AB = 4cm, BΓ = x+6cm, \Delta E = x+2cm, \Delta Z = 4x+8cm.$$

- i) Να αποδείξετε ότι τα δύο τρίγωνα είναι όμοια.
- ii) Να υπολογίσετε το x .
- iii) Να αποδείξετε ότι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι $\lambda = \frac{1}{3}$.

5.11. Στο επόμενο σχήμα τα διαδοχικά τετράγωνα $ABΓΔ$, $\Gamma\Delta EZ$ και $EZH\Theta$ έχουν πλευρά a .



- i) Να υπολογίσετε τα τμήματα $B\Delta$, BE , $B\Theta$ και $Z\Theta$ ως συνάρτηση του a .
- ii) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $BZ\Theta$ είναι όμοια.
- iii) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Delta BE} = \widehat{\Theta BH}$.

5.12. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, είναι $A\Gamma = 8 \text{ cm}$ και $B\Gamma = 10 \text{ cm}$. Από το μέσο M της πλευράς $A\Gamma$ φέρνουμε την κάθετη $M\Delta$ προς την $B\Gamma$.

- i) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $M\Delta$ και $\Gamma\Delta$.
- ii) Να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα που βρήκατε, χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $\Gamma\Delta M$.

[Απ. i) $M\Delta = 2,4 \text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 3,2 \text{ cm}$]

5.13. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 6 - x$, $A\Gamma = x(x+3)$ και $B\Gamma = x^2 + 5x$.

- α) Είναι δυνατόν το x να ισούται με 2;
- β) Να βρεθεί το x αν η περίμετρος του τριγώνου είναι 15 cm.
- γ) Για την τιμή του x που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τις πλευρές τριγώνου το οποίο είναι όμοιο με το $AB\Gamma$ με λόγο ομοιότητας $\lambda = 2$.

[Απ. α) Όχι β) $x=1$ γ) 10cm, 8cm, 12cm]

ΕΝΟΤΗΤΑ 6.**ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ****6.1. Πως συνδέονται τα εμβαδά δύο όμοιων σχημάτων;****Απάντηση:**

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 6.2. Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει εμβαδόν 490cm^2 . Στην πλευρά του AB παίρνουμε ένα σημείο Δ τέτοιο ώστε $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{2}{5}$. Από το Δ φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E . Από το E φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την AB που τέμνει την $B\Gamma$ στο Z .
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$, $\Gamma E Z$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων $A\Delta E$ και $\Gamma E Z$.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $\Delta E Z B$.

[Απ. i) 40cm^2 ii) 250cm^2 iii) 200cm^2]

Κεφάλαιο 7ο

Κεφάλαιο 7ο

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

- *Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας*
- *Τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας*
- *Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών*
- *Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας*
- *Νόμος των ημιτόνων*
- *Νόμος των συνημιτόνων*

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

**ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ**

1.1. Τι ονομάζουμε ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου;

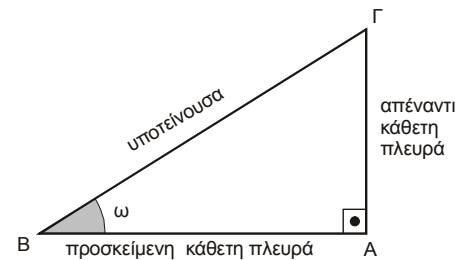
Απάντηση:

Ημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου, ονομάζουμε το πηλίκο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

Δηλαδή, $\eta\mu\omega = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$.

Συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου, ονομάζουμε το πηλίκο της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

Δηλαδή, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{A\text{B}}{B\Gamma} = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$.



Εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου, ονομάζουμε το πηλίκο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη πλευρά.

Δηλαδή, $\epsilon\phi\omega = \frac{A\Gamma}{A\text{B}} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}}$.

1.1.1. ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Οι τρεις αριθμοί $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$ και $\epsilon\phi\omega$ λέγονται **τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω** .

1.2. Να αποδείξετε ότι για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των συμπληρωματικών γωνιών ισχύει:

$\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$.

Απάντηση:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ παρατηρούμε ότι:

$\eta\mu B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ και $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$, δηλαδή $\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu\Gamma$.

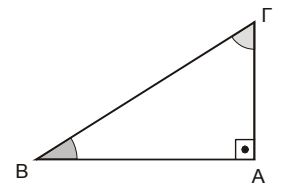
Όμως οι γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ είναι συμπληρωματικές, ως οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου,

δηλαδή $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ ή $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$.

Επομένως $\eta\mu(90^\circ - \Gamma) = \sigma\upsilon\nu\Gamma$. Όμοια βρίσκουμε ότι $\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \Gamma) = \eta\mu\Gamma$.

Γενικά, για τις συμπληρωματικές γωνίες ω και $90^\circ - \omega$ ισχύει:

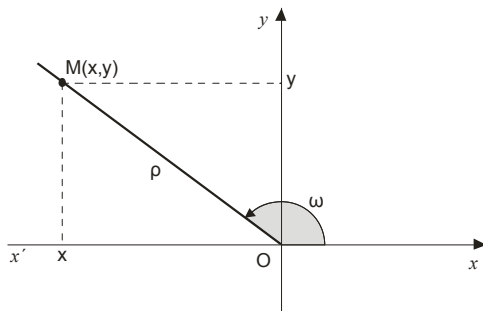
$\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$. Όμοια βρίσκουμε ότι $\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$.



1.2.1. Για παράδειγμα: $\eta\mu 54^\circ = \eta\mu(90^\circ - 36^\circ) = \sigma\upsilon\nu 36^\circ$.
 $\sigma\upsilon\nu 73^\circ = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 17^\circ) = \eta\mu 17^\circ$.

1.3. Να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω .

Απάντηση:



Σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων παίρνουμε ένα σημείο $M(x, y)$ τέτοιο, ώστε $\widehat{xOM} = \widehat{\omega}$.
Αν θέσουμε $OM = \rho$, τότε ορίζουμε να είναι:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

1.4. Να εξηγήσετε ότι το $\eta\mu\omega$ και το $\sigma\upsilon\nu\omega$, παίρνουν τιμές από το -1 έως το 1 .

Απάντηση:

Οι αριθμοί $|x|$ και $|y|$ εκφράζουν τις κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου στο οποίο η υποτείνουσα είναι $\rho > |x|$ και $\rho > |y|$. Τα $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$ μπορούν ακόμα να πάρουν και τις τιμές -1 , 1 και 0 .

Επομένως, για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν: $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$ και $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$.

1.5. Να γράψετε τον πίνακα με τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών.

Απάντηση:

Τεταρτημόριο Τριγ. Αρ.	1 ^ο	2 ^ο	3 ^ο	4 ^ο
$\eta\mu x$	+	+	-	-
$\sigma\upsilon\nu x$	+	-	-	+
$\epsilon\varphi x$	+	-	+	-

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.6. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \eta\mu 25^{\circ} - \sigma\upsilon\nu 35^{\circ} + \eta\mu 55^{\circ} - \sigma\upsilon\nu 65^{\circ}$$

$$B = 2\sigma\upsilon\nu x + 3\eta\mu(90^{\circ} - x) - 5\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Gamma = \frac{\epsilon\varphi^2 45^{\circ} + 4\eta\mu^2 30^{\circ} - 2007}{2006 \cdot \epsilon\varphi^{100} 45^{\circ} - 2\sigma\upsilon\nu 60^{\circ}}$$

[Απ. $A=0$, $B=0$, $\Gamma=-1$]

1.10. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $y = 4\eta\mu^2 x - 1$.

[Απ. Ελάχιστη -1 , Μέγιστη 3]

1.7. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων παίρνουμε τα σημεία $A(-3,0)$, $B(2,-2)$, $\Gamma(-6,8)$, $\Delta(0,-5)$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών \widehat{xOA} , \widehat{xOB} , \widehat{xOG} και \widehat{xOD} .

1.8. Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των επόμενων παραστάσεων:

i) $A = 3\eta\mu x - 5$

ii) $B = 4 - 2\sigma\upsilon\nu x$

iii) $\Gamma = 7\eta\mu x + 6\sigma\upsilon\nu x$

iv) $\Delta = 2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x$

1.9. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $y = 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 1$.

[Απ. Ελάχιστη 1 , Μέγιστη 3]

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.

**ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ**

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες $\hat{\omega}$ και $180^\circ - \hat{\omega}$ ισχύει:

$\begin{aligned} \eta\mu(180^\circ - \omega) &= \eta\mu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) &= -\sigma\upsilon\nu\omega \\ \epsilon\varphi(180^\circ - \omega) &= -\epsilon\varphi\omega \end{aligned}$
--

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:** (i) $\eta\mu 130^\circ = \eta\mu(180^\circ - 50^\circ) = \eta\mu 50^\circ \approx 0,766$
 (ii) $\sigma\upsilon\nu 115^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 65^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 65^\circ \approx -0,423$
 (iii) $\epsilon\varphi 98^\circ = \epsilon\varphi(180^\circ - 82^\circ) = -\epsilon\varphi 82^\circ \approx -7,115$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1. Αν $\sigma\upsilon\nu 35^\circ = 0,819$ να υπολογίσετε:

- α) $\eta\mu 55^\circ$
 β) $\sigma\upsilon\nu 145^\circ$

[Απ. α) 0,819 β) -0,819]

2.6. Αν $90^\circ < \omega < 180^\circ$ και

$$2(1 - \eta\mu\omega) + 4 + \sqrt{3} = 3(\sqrt{3} - 2\eta\mu\omega) + 6$$

να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω καθώς και την γωνία.

[Απ. $\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{2}$, $\epsilon\varphi\omega = -\sqrt{3}$, $\omega = 120^\circ$]

2.2. Να γραφεί σε απλούστερη μορφή η παράσταση:

$$A = \frac{\eta\mu(90^\circ - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta) \cdot \epsilon\varphi(180^\circ - \theta) \cdot \epsilon\varphi 45^\circ}{\epsilon\varphi\theta \cdot \eta\mu(180^\circ - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta) \cdot \eta\mu 150^\circ}$$

[Απ. 2]

2.3. Αν A, B, Γ είναι οι γωνίες ενός τριγώνου $AB\Gamma$, να δείξετε ότι:

- α) $\eta\mu(A+B) = \eta\mu\Gamma$ β) $\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma) = -\sigma\upsilon\nu A$
 γ) $\epsilon\varphi(\Gamma+A) = -\epsilon\varphi B$

2.4. Να υπολογίσετε τη γωνία x , αν:

- α) $2\eta\mu x - \sqrt{3} = 0$, $0^\circ < x < 180^\circ$
 β) $2\sigma\upsilon\nu x = 1$, $90^\circ < x < 180^\circ$
 γ) $3\epsilon\varphi x + \sqrt{3} = 0$, $90^\circ < x < 180^\circ$
 δ) $\epsilon\varphi x = -1$, $90^\circ < x < 180^\circ$

2.5. Να υπολογίσετε τη γωνία x , αν:

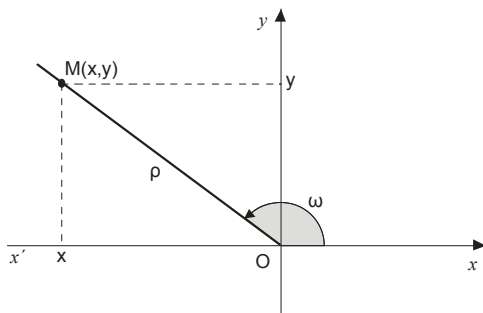
- α) $\eta\mu^2 x = 0,25$, $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$
 β) $4\sigma\upsilon\nu^2 x = 3$, $90^\circ \leq x \leq 180^\circ$
 γ) $\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x + 1 = 0$, $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$
 δ) $2\eta\mu^2 x + \eta\mu x - 1 = 0$, $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$
 ε) $(2\eta\mu x - \sqrt{2})(\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0$, $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ
ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

3.1. Να αποδείξετε ότι: $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$.

Απάντηση:



Για τη γωνία $\widehat{xOM} = \hat{\omega}$, έχουμε

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$$

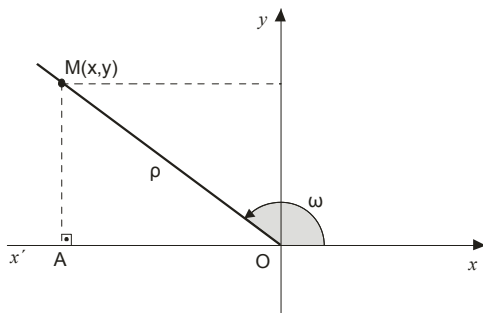
$$\text{Επομένως} \quad \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{y \cdot \rho}{x \cdot \rho} = \frac{y}{x} = \epsilon\phi\omega.$$

$$\text{Δηλαδή,} \quad \boxed{\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}.$$

Ο τύπος ισχύει με την προϋπόθεση ότι η γωνία $\hat{\omega}$ είναι τέτοια, ώστε $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$, δηλαδή όταν $\hat{\omega} \neq 90^0$ και $\hat{\omega} \neq 270^0$.

3.2. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

Απάντηση:



Έχουμε:

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2}$$

$$\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = 1$$

$$(\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega)^2 = 1.$$

$$\text{Δηλαδή,} \quad \boxed{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.3. i) Να βρείτε τους αριθμούς:

$$\alpha = \sqrt{13 - \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}} \quad \text{και} \quad \beta = \sqrt{41 - \sqrt{29 - \sqrt{19 - \sqrt{9}}}}$$

ii) Αν η γωνία ω ανήκει στο 2^ο τεταρτημόριο και είναι $\eta\mu\omega = \frac{\alpha}{\beta}$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της

$$\text{παράστασης:} \quad \Pi = \frac{2\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\epsilon\phi^2\omega}.$$

[Απ. i) $\alpha=3, \beta=6$ ii) $\Pi = \frac{3}{4}$]

3.4. Αν $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ και $0^0 < x < 90^0$, να υπολογίσετε:

i) Το $\sigma\upsilon\nu x$ και την $\epsilon\phi x$.

ii) Την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{3\eta\mu^2 x + 5\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\epsilon\phi^2 x}.$$

3.5. Αν $\sin x = -\frac{5}{13}$ και $90^\circ \leq x \leq 180^\circ$, να υπολογίσετε:

- i) Το $\eta\mu x$ και την $\epsilon\varphi x$.
- ii) Την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{5\epsilon\varphi x + 3\eta\mu^2 x + \sin x}{2\eta\mu x + 3}$$

3.6. Αν $\epsilon\varphi x$ και $0^\circ < x < 90^\circ$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x \cdot \sin x}{4\eta\mu^2 x - 3\sin^2 x}$$

[Απ. $\Pi = \frac{1}{11}$]

3.7. Αν $\eta\mu\omega = 3\lambda$ και $\sin\omega = 4\lambda$ με $0 < \lambda < \frac{1}{4}$, να

υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 25\lambda^2 + (5\lambda - 1)^3$$

[Απ. $A=1$]

3.8. Έστω ότι η εξίσωση $x^2 + \eta\mu\alpha \cdot x + \sin^2\alpha = 0$ έχει μοναδική λύση. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α , αν η γωνία ανήκει στο 4° τεταρτημόριο.

[Απ. $\eta\mu\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\epsilon\varphi\alpha = -2$]

3.9. Αν $\eta\mu\varphi = \frac{\kappa^2 - \lambda^2}{\kappa^2 + \lambda^2}$, $\kappa > \lambda > 0$ και $90^\circ < x < 180^\circ$,

να βρείτε:

- α) το $\sin\varphi$
- β) την $\epsilon\varphi\varphi$

[Απ. α) $\sin\varphi = -\frac{2\kappa\lambda}{\kappa^2 + \lambda^2}$ β) $\epsilon\varphi\varphi = \frac{\lambda^2 - \kappa^2}{2\kappa\lambda}$]

3.10. Να αποδείξετε ότι: $\sin^2\omega (1 + \epsilon\varphi^2\omega) = 1$.

3.11. Να αποδείξετε ότι: $\epsilon\varphi\alpha (\sin\alpha - \sin^3\alpha) = \eta\mu^3\alpha$.

3.12. i) Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{2x-y+1}{3} + \frac{4x-3y}{2} = x+2 \\ 2y = 3(x-1) \end{cases}$$

ii) Αν (x,y) είναι η λύση του παραπάνω συστήματος να αποδείξετε ότι:

$$4(x \cdot \eta\mu\omega + 2006y \cdot \sin\omega)^2 + (2006y \cdot \eta\mu\omega + 2x \cdot \sin\omega)^2 = 4$$

[Απ. i) $(x,y) = (1,0)$]

3.13. Να αποδείξετε ότι: $1 + \epsilon\varphi^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

3.14. Να αποδείξετε ότι:

$$(\eta\mu\alpha + \sin\alpha)^2 - (\eta\mu\alpha - \sin\alpha)^2 = 4\eta\mu\alpha \cdot \sin\alpha$$

3.15. Να αποδείξετε ότι:

$$(3\eta\mu\omega + 4\sin\omega)^2 + (4\eta\mu\omega - 3\sin\omega)^2 = 25$$

3.16. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\alpha + \epsilon\varphi\alpha}{\epsilon\varphi\alpha} = 1 + \sin\alpha$.

3.17. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu x \cdot \sin x \cdot \epsilon\varphi x + \frac{1}{1 + \epsilon\varphi^2 x} = 1$.

3.18. Να αποδείξετε ότι: $(1 - \frac{1}{\sin^2\omega})(1 - \frac{1}{\eta\mu^2\omega}) = 1$.

3.19. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\alpha + \sin\alpha}{\eta\mu\alpha - \sin\alpha} = \frac{\epsilon\varphi\alpha + 1}{\epsilon\varphi\alpha - 1}$.

3.20. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\epsilon\varphi^2\omega - 1}{\epsilon\varphi^2\omega + 1} = \eta\mu^2\omega - \sin^2\omega$.

3.21. Αν $\alpha = 3\eta\mu\omega \cdot \eta\mu\varphi$, $\beta = 3\eta\mu\omega \cdot \sin\varphi$, $\gamma = 3\sin\omega$ να δείξετε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9$.

3.22. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{1 - \eta\mu\omega} + \frac{1}{1 + \eta\mu\omega} = \frac{2}{\sin^2\omega}$.

3.23. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sin\alpha} + \frac{1}{\epsilon\varphi\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\alpha}$.

3.24. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\alpha}{1 - \sin\alpha} - \frac{1}{\epsilon\varphi\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\alpha}$.

3.25. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\alpha}{1 - \sin\alpha} + \frac{1 - \sin\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{2}{\eta\mu\alpha}$.

3.26. Να αποδείξετε ότι: $\epsilon\varphi^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \epsilon\varphi^2\alpha \cdot \eta\mu^2\alpha$.

3.27. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^4\alpha - \eta\mu^2\alpha = \sin^4\alpha - \sin^2\alpha$.

3.28. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^4x - \sin^4x = 2\eta\mu^2x - 1$.

3.29. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\text{i) } \frac{\sin^4\omega - \eta\mu^4\omega}{1 - \epsilon\varphi^2\omega} \quad \text{ii) } \frac{2\sin^2\omega - 1}{\sin^4\omega - \eta\mu^4\omega}$$

[Απ. i) $\sin^2\omega$ ii) 1]

3.30. Να αποδείξετε ότι: $1 - \frac{\sin^2\omega}{1 + \eta\mu\omega} = \eta\mu\omega$.

3.31. Να αποδείξετε ότι:

$$(\epsilon\varphi\omega + \frac{\sin\omega}{\eta\mu\omega}) (\frac{1}{\sin\omega} - \sin\omega) (\frac{1}{\eta\mu\omega} - \eta\mu\omega) = 1$$

3.32. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sin x}{1 - \epsilon\varphi x} + \frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu x - \sin x} = \eta\mu x + \sin x$$

3.33. Αν $0^\circ < x < 90^\circ$ και $\sin x = 2\eta\mu x - 1$ να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x .

[Απ. $\eta\mu x = \frac{4}{5}$, $\sin x = \frac{3}{5}$, $\epsilon\varphi x = \frac{4}{3}$]

3.34. i) Αν $\sin\theta = -\frac{12}{13}$ και $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ να υπολογίστούν τα $\eta\mu\theta$ και $\epsilon\phi\theta$.

ii) Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} (\eta\mu\theta) \cdot x - (\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot y = 1 \\ (-\epsilon\phi\theta) \cdot x - y = 1 \end{cases} .$$

[Απ. i) $\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$, $\epsilon\phi\theta = -\frac{5}{12}$ ii) $(\frac{5}{2}, \frac{1}{24})$]

3.35. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x , αν είναι $3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x = 5$.

[Απ. $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{4}{5}$, $\epsilon\phi\theta = \frac{3}{4}$]

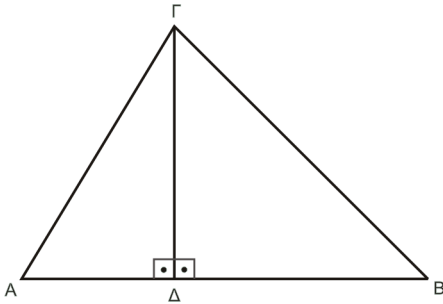
ΕΝΟΤΗΤΑ 4.

ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΗΜΙΤΟΝΩΝ & ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

4.1. Να γράψετε και να εξηγήσετε το νόμο των ημιτόνων.

Απάντηση:

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές a, β, γ και γωνίες \hat{A}, \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ ισχύει: $\frac{a}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$.



Σχεδιάζουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και φέρνουμε το ύψος $\Gamma\Delta$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι

$$\eta\mu A = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma} \quad \text{ή} \quad \Gamma\Delta = A\Gamma \cdot \eta\mu A \quad (1)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ είναι

$$\eta\mu B = \frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma} \quad \text{ή} \quad \Gamma\Delta = B\Gamma \cdot \eta\mu B \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$B\Gamma \cdot \eta\mu B = A\Gamma \cdot \eta\mu A \quad \text{ή} \quad a \cdot \eta\mu B = \beta \cdot \eta\mu A \quad \text{ή} \quad \frac{a}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι ισχύει $\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$.

Επομένως, σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\frac{a}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$.

4.2. Να γράψετε και να εξηγήσετε το νόμο των συνημιτόνων.

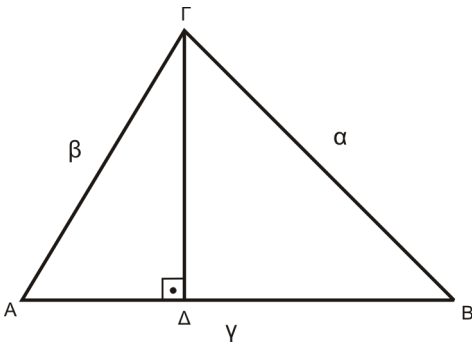
Απάντηση:

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές a, β, γ και γωνίες \hat{A}, \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ ισχύει:

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$$

$$\beta^2 = \gamma^2 + a^2 - 2\gamma a \cdot \sigma\upsilon\nu B$$

$$\gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma.$$



Στο οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε το ύψος $\Gamma\Delta$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma\Delta B$ έχουμε $a^2 = \Gamma\Delta^2 + \Delta B^2$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι $\eta\mu A = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma}$ ή $\Gamma\Delta = \beta \cdot \eta\mu A$ (2)

Ακόμα $\sigma\upsilon\nu A = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$ ή $A\Delta = \beta \cdot \sigma\upsilon\nu A$.

Είναι $\Delta B = AB - A\Delta = \gamma - \beta \cdot \sigma\upsilon\nu A$ (3)

Από τις (1), (2) και (3) έχουμε

$$\begin{aligned} a^2 &= (\beta \cdot \eta\mu A)^2 + (\gamma - \beta \cdot \sigma\upsilon\nu A)^2 \\ &= \beta^2 \cdot \eta\mu^2 A + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A + \beta^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 A \\ &= \beta^2 \cdot (\eta\mu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 A) + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A \\ &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A. \end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι ισχύουν $\beta^2 = \gamma^2 + a^2 - 2\gamma a \cdot \sigma\upsilon\nu B$ και $\gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma$.

4.2.1. **ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \sin A$$

$$2bc \cdot \sin A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\sin A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

$$\text{Όμοια } \sin B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad \text{και} \quad \sin C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.3. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και την διάμεσο του AD .

Αν $\widehat{AB} = x$ και $\widehat{A\Gamma} = y$ να δείξετε ότι:

$$\frac{\eta_{\mu x}}{\eta_{\mu y}} = \frac{\eta_{\mu B}}{\eta_{\mu \Gamma}} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

4.4. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} > 90^\circ$ είναι $\widehat{\Gamma} = 45^\circ$, $AB = 10 \text{ cm}$ και $A\Gamma = 5\sqrt{2} \text{ cm}$. Να βρείτε τις άλλες γωνίες του τριγώνου.

[Απ. $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{A} = 105^\circ$]

4.5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $a = 2\beta$, $\beta = \frac{\gamma}{\sqrt{3}}$ και

$$\widehat{\Gamma} = 60^\circ.$$

i) Να υπολογίσετε τα $\eta_{\mu A}$, $\eta_{\mu B}$ καθώς και τις γωνίες \widehat{A} και \widehat{B} .

ii) Τι είδους είναι το τρίγωνο $AB\Gamma$;

iii) Να υπολογιστούν τα μήκη των πλευρών β , γ όταν $a = 10 \text{ cm}$.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

[Απ. i) $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 30^\circ$ iii) $\beta = 5 \text{ cm}$, $\gamma = 5\sqrt{3} \text{ cm}$

iv) $E = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$]

4.6. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση:

$$\eta_{\mu^2 A} = \eta_{\mu^2 B} + \eta_{\mu^2 \Gamma}.$$

Να αποδείξετε ότι $\widehat{A} = 90^\circ$.

4.7. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\beta = \sqrt{3} \text{ cm}$, $\gamma = 1 \text{ cm}$

και $\widehat{A} = 30^\circ$, να βρεθούν:

i) η πλευρά a .

ii) η \widehat{B} .

[Απ. i) $a = 1$ ii) 120°]

4.8. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\beta = 2 \text{ cm}$, $\gamma = \sqrt{2} \text{ cm}$

και $\widehat{A} = 45^\circ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

4.9. Για ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνεται ότι $a = \sqrt{31}$,

$\beta = x + 1$, $\gamma = x + 2$ και $\widehat{A} = 60^\circ$. Να βρείτε τις πλευρές β και γ .

[Απ. $\beta = 5$, $\gamma = 6$]

4.10. Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η ισότητα

$\beta = 2\gamma \sin A$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

4.11. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ να δείξετε ότι:

$$\beta \sin \Gamma + \gamma \sin B = a.$$

4.12. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ να δείξετε ότι:

$$a \beta \sin \Gamma - a \gamma \sin B = \beta^2 - \gamma^2.$$

4.13. Για ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνεται ότι: $a = 3$, $\beta = 5$

και $\gamma = 7$. Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Gamma} = 120^\circ$.

[Απ. 120°]

4.14. Αν a , β , γ είναι οι πλευρές ενός τριγώνου $AB\Gamma$

και ισχύει η ισότητα: $\beta = \sqrt{a^2 + \gamma^2 + a\gamma}$, να βρείτε την \widehat{B} .

[Απ. 120°]

4.15. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta = a - 4$, $\gamma = a - 4$ και

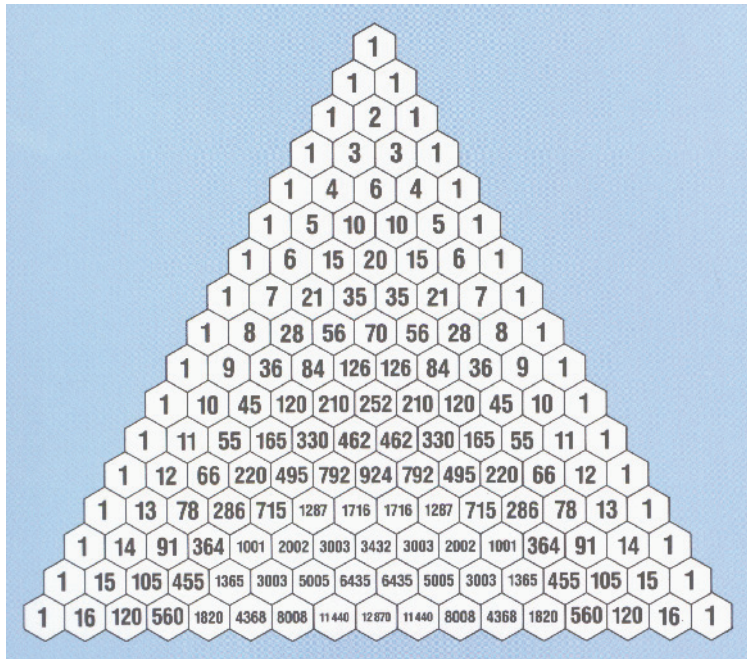
$$\widehat{A} = 120^\circ.$$

i) Να βρεθεί η πλευρά a .

ii) Να βρεθεί το $\eta_{\mu B}$.

iii) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου.

[Απ. i) $a = 7$ ii) $\eta_{\mu B} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ iii) $E = \frac{15\sqrt{3}}{4}$]

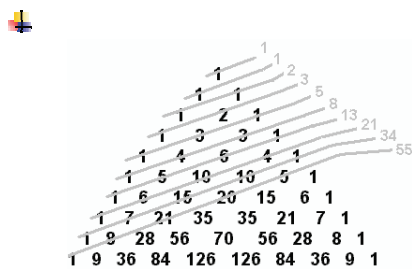


Η τριγωνική διάταξη των αριθμών, με το 1 στην κορυφή, στην οποία κάθε αριθμός προκύπτει από το άθροισμα του ζεύγους των αριθμών που βρίσκονται πάνω από αυτόν, είναι γνωστή ως τρίγωνο του Pascal (1623-1662), ο οποίος το χρησιμοποίησε στη μελέτη των πιθανοτήτων το 1653.

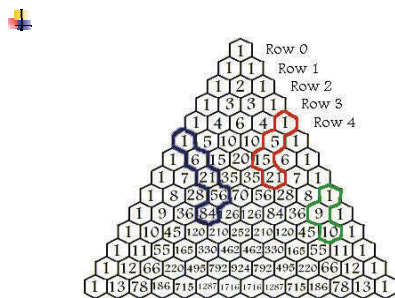
Το τρίγωνο έχει πολλές ενδιαφέρουσες αριθμητικές ιδιότητες.

✚

$$\begin{aligned}
 1 &= 2^0 \\
 1+1 &= 2^1 \\
 1+2+1 &= 2^2 \\
 1+3+3+1 &= 2^3 \\
 1+4+6+4+1 &= 2^4
 \end{aligned}$$



Το άθροισμα των αριθμών όπως φαίνεται στο σχήμα δημιουργούν τους όρους της ακολουθίας Fibonacci. Δηλαδή, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... η οποία ορίζεται συναρτησιακά ως εξής $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$ και $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + \alpha_n$.



Το διαγώνιο άθροισμα των αριθμών ξεκινώντας από μία μονάδα, ισούται με τον αριθμό κάτω από τον τελευταίο, ο οποίος δεν βρίσκεται στη διαγώνιο.
 $1+9 = 10$
 $1+5+15 = 21$
 $1+6+21+56 = 84$