Κεφάλαιο 1

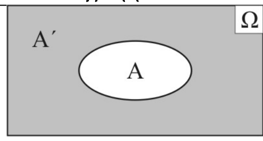
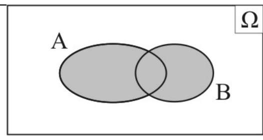
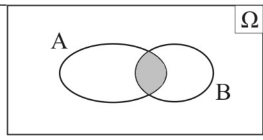
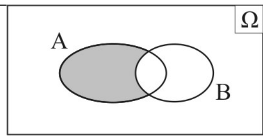
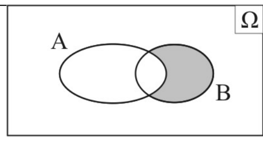
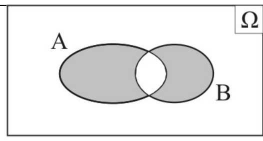
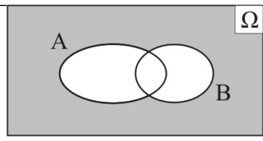
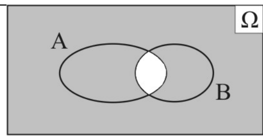
Πιθανότητες

1.1 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

1.1.1 Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Ποιό πείραμα λέγεται αιτιοκρατικό και ποιό πείραμα τύχης;
2. Τι ονομάζουμε δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης;
3. Τι λέμε ενδεχόμενο ή γεγονός ενός πειράματος τύχης;
   Ποιό ενδεχόμενο λέγεται: απλό , σύνθετο , βέβαιο , αδύνατο;
4. Πότε δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα;
   Πως αλλιώς λέμε τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα;

1.1.2 Πράξεις με ενδεχόμενα

Συμβολισμός	Ενδεχόμενο	Επεξήγηση	Διάγραμμα Venn
A'	όχι A	Το A' πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το A	
$A \cup B$	A ή B	Το $A \cup B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B	
$A \cap B$	A και B	Το $A \cap B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A, B	
$A - B = A \cap B'$	Διαφορά του B από το A	Το $A - B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B	
$B - A = B \cap A'$	Διαφορά του A από το B	Το $B - A$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το B αλλά όχι το A	
$(A - B) \cup (B - A)$	Διαφορά του B από το A ή διαφορά του A από το B	Το $(A - B) \cup (B - A)$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται μόνο το A ή μόνο το B	
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	όχι A ή B	Το $(A \cup B)'$ πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A , B	
$(A \cap B)' = A' \cup B'$	όχι A και B	Το $(A \cap B)'$ πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A και B	

1.2 Η έννοια της πιθανότητας

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Τι αναφέρει ο νόμος των μεγάλων αριθμών ή στατιστική ομαλότητα.
2. Να διατυπώσετε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας.
3. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να αποδείξετε ότι:
   (α′) $P(\Omega) = 1$
   (β′) $P(\emptyset) = 0$
   (γ′) Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$
4. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
5. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:
$$P(A') = 1 - P(A)$$
6. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
7. Αν A , B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, να αποδείξετε ότι $P(A) \leq P(B)$
8. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

9. Σε ένα παιγνίδι μετέχουν δύο παίκτες και νικητής αναδεικνύεται αυτός που πρώτος θα πετύχει δύο νίκες. Οι δύο παίκτες έχουν την ίδια πιθανότητα να κερδίσουν.
   α) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.
   β) Ποιά είναι η πιθανότητα το παιγνίδι να ολοκληρωθεί σε δύο γύρους;

   Απ. β)1/3

10. Ένας τροχός τύχης έχει έξι ίσους κυκλικούς τομείς. Στους τρεις από αυτούς έχει την ένδειξη ”χάνεις”. Στους άλλους τρεις υπάρχει η ένδειξη κέρδος 1€, 2€, 5€ αντίστοιχα. Η συμμετοχή σε κάθε γύρο του τροχού είναι 2€. Αν στο δείκτη σταματήσει η ένδειξη ”Χάνεις” τότε ο παίκτης δεν εισπράττει τίποτα, διαφορετικά εισπράττει το ποσό που αναγράφεται στην ένδειξη. Αν ένας παίκτης παίξει 150 φορές, να βρεθεί
    α) Πόσες φορές αναμένεται να εισπράξει 5€.
    β) Τι ποσό αναμένεται να κερδίσει ή να χάσει συνολικά.

    Απ. α)25 β)Να χάσει 100€

11. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = \dfrac{8}{15}, P(B) = \dfrac{1}{3}$ και $P(A \cap B) = \dfrac{1}{5}$, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
    $A \cup B, A', B', A' \cap B', A' \cup B', A \cap B', A' \cap B, (A - B) \cup (B - A), A \cup B', A' \cap B$

    Απ. $\frac{2}{3}, \frac{7}{15}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}$

12. Θεωρούμε ένα ενδεχόμενο A ενός δειγματικού χώρου Ω για το οποίο ισχύει η σχέση:
$$[P(A)]^2 + [P'(A)]^2 = 1$$
    Να αποδείξετε ότι το A είναι το αδύνατο ή το βέβαιο ενδεχόμενο.

13. Ένα Γυμνάσιο έχει 24 εκπαιδευτικούς από τους οποίους οι 14 είναι καθηγήτριες. Οι Μαθηματικοί είναι 4, από τους οποίους 3 είναι καθηγητές και μια καθηγήτρια. Αν επιλέξουμε έναν εκπαιδευτικό, να βρείτε την πιθανότητα να είναι καθηγητής ή Μαθηματικός.

Απ. $\frac{11}{24}$

14. Σε μια πόλη κυκλοφορούν δύο περιοδικά, το ΑΛΦΑ και το ΒΗΤΑ. Το 25% των κατοίκων έχει διαπιστωθεί ότι διαβάζει το ΑΛΦΑ, το 85% δεν διαβάζει το ΒΗΤΑ, ενώ το 38% των κατοίκων διαβάζει ένα τουλάχιστον από τα δύο περιοδικά.
Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) Ένας κάτοικος να διαβάζει και τα δύο περιοδικά.

β) Ένας κάτοικος να μην διαβάζει κανένα περιοδικό.

Απ. α)2% β)62%

15. Έχει διαπιστωθεί ότι το 68% των ατόμων που εργάζονται σε μία επιχείρηση γνωρίζει Αγγλικά, το 16% γνωρίζει Γερμανικά, ενώ το 26% δεν γνωρίζει καμμιά από τις δύο γλώσσες. Να βρείτε την πιθανότητα ένα άτομο να γνωρίζει και τις δύο γλώσσες.

Απ. 10%

16. Ένα παλιό αυτοκίνητο χαλάει 65% από βλάβη μηχανής, 20% από αμέλεια οδηγού και 5% Από βλάβη μηχανής και αμέλεια οδηγού. Επίσης χαλάει και από άλλες αιτίες. Ποιά είναι η πιθανότητα να χαλάσει το αυτοκίνητο μόνο από βλάβη μηχανής ή μόνο από αμέλεια οδηγού;

Απ. 75%

17. Ο ποιοτικός έλεγχος σε ένα μηχάνημα που παράγεται από μια βιομηχανία έδειξε ότι: Η πιθανότητα να μην λειτουργεί είναι 4%. Η πιθανότητα να έχει άλλο ελάττωμα είναι 6%. Η πιθανότητα να μην λειτουργεί και να έχει άλλο ελάττωμα είναι 2%.
Επιλέγουμε στην τύχη ένα μηχάνημα. Να βρεθεί η πιθανότητα:

i) Να μην λειτουργεί ή να έχει άλλο ελάττωμα.

ii) Να μην λειτουργεί μόνο ή να έχει άλλο ελάττωμα μόνο.

Απ. i)8% ii)6%

18. Μια ομάδα έχει πιθανότητα 50% να κερδίσει το πρωτάθλημα, 35% να κερδίσει το κύπελο και 77% να κερδίσει έναν τουλάχιστον τίτλο. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

i) Να κερδίσει και τους δύο τίτλους.

ii) Να μην κερδίσει κανέναν τίτλο.

iii) Να κερδίσει μόνο το πρωτάθλημα.

Απ. i)8% ii)23% iii)42%

19. Η πιθανότητα ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία, να είναι αριστερόχειρας είναι $\frac{1}{4}$, η πιθανότητα να φοράει γυαλιά είναι $\frac{1}{3}$ και η πιθανότητα να είναι αριστερόχειρας και να φοράει γυαλιά είναι $\frac{1}{12}$.
Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) Να είναι αριστερόχειρας ή να φοράει γυαλιά.

β) Να είναι αριστερόχειρας αλλά να μην φοράει γυαλιά.

γ) Να είναι δεξιόχειρας και να μην φοράει γυαλιά.

δ) Να είναι δεξιόχειρας ή να φοράει γυαλιά.

Απ. α) $\frac{1}{2}$ β) $\frac{1}{6}$ γ) $\frac{1}{2}$ δ) $\frac{5}{6}$

20. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = \dfrac{3}{4}\ ,\ P(B) = \dfrac{3}{8}$, να αποδείξετε ότι:
α) $P(A \cup B) \geq 0,75$
β) $\dfrac{1}{8} \leq P(A \cap B) \leq \dfrac{3}{8}$.

21. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$.
α) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα.
β) Να αποδείξετε ότι: $P(A' \cap B) \leq \frac{1}{3}$.

22. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{4} \leq P(B) \leq \frac{3}{4}$.

Κεφάλαιο 2

Πραγματικοί αριθμοί

2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α′) Για τους πραγματικούς αριθμούς α, x, y δίνεται ότι: $\alpha x = \alpha y$ τότε $x = y$.

   (β′) Το γινόμενο ενός μη μηδενικού αριθμού με τον αντίθετο του αντιστρόφου του, ισούται με –1.

   (γ′) Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει η ισότητα: $(\alpha + 1)^0 = 1$.

   (δ′) Η ισότητα $2 + x = 5$ είναι ταυτότητα.

   (ε′) Η ισότητα $\alpha - 3 = \beta$ είναι ταυτότητα.

2. Να βρεθεί το λάθος στη σειρά των συλλογισμών:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta \\ 3\alpha - 2\alpha &= 3\beta - 2\beta \\ 3\alpha - 3\beta &= 2\alpha - 2\beta \\ 3(\alpha - \beta) &= 2(\alpha - \beta) \\ 3 &= 2 \end{aligned}$$

3. Λέμε ότι μία πράξη είναι κλειστή σε ένα σύνολο, αν η πράξη μεταξύ δύο οποιοδήποτε στοιχείων του συνόλου δίνει αποτέλεσμα το οποίο ανήκει στο σύνολο.
   Να εξετάσετε αν είναι κλειστό το σύνολο

   - των φυσικών αριθμών με πράξη την αφαίρεση
   - των ακεραίων αριθμών με πράξη τον πολλαπλασιασμό
   - των ακεραίων αριθμών με πράξη την διαίρεση
   - των ρητών αριθμών με πράξη την πρόσθεση
   - των άρρητων αριθμών με πράξη την πρόσθεση

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

Επίπεδο 1

4. Αν $x + y = -2$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $A = 2(\alpha - x) - 3[–5–(y–\alpha)] + [\alpha–(x + 6y)]$
   Απ. 21

5. Αν $x + y = -1$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $\Pi = x(x - 3) + y(y - 3) + 2xy$
   Απ. 4

6. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, ω αν δίνεται ότι $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{\omega}{3}$ και $x + y + \omega = 1800$.
   Απ. $x = 600, y = 750, \omega = 450$

7. Οι γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3 και 7. Να υπολογίσετε σε μοίρες τις γωνίες του τριγώνου. Τι είδους είναι το τρίγωνο ως προς τις γωνίες του;

8. Αν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$, να αποδείξετε ότι:

   i) $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{5\alpha - 9\gamma}{5\beta - 9\delta}$ με $\beta\delta(5\beta - 9\delta) \neq 0$

   ii) $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\kappa\alpha + \lambda\gamma}{\kappa\beta + \lambda\delta}$ με $\beta\delta(\kappa\beta + \lambda\delta) \neq 0$

9. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 3.

10. Να δείξετε ότι η διαφορά τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι περιττός αριθμός.

11. Να δείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών

    i) είναι περιττός αριθμός

    ii) όταν διαιρεθεί με το 4, δίνει υπόλοιπο 1.

12. Να αποδείξετε ότι: $(x+y+z)^2 + (x+y-z)^2 + (x-y+z)^2 + (x-y-z)^2 = 4(x^2+y^2+z^2)$.

13. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha-\beta)^3 - \alpha^3 + (\alpha+\beta)^3 + 3\alpha(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha(4\alpha^2 + 3\beta^2)$.

14. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η ισότητα: $(x+3y)^2 = x^2 + 9y^2$ τότε ένας τουλάχιστον από αυτούς ισούται με το 0.

15. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι: $(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2$.

16. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha^2+\beta^2)^2 + 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) = (\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta)^2$.

17. Σε ένα ορθογώνιο η περίμετρός του είναι $34cm$ και το εμβαδόν του είναι $60cm^2$. Να υπολογίσετε τη διαγώνιο του ορθογωνίου.
    Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$

18. Αν $(2x - \alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2$, τότε να δείξετε ότι $x = \alpha$ ή $x = \beta$.

19. Αν $x + y = 2$ και $xy = -1$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\ , \quad B = x^2 + y^2\ , \quad \mathit{\Gamma} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\ , \quad \mathit{\Delta} = x^3 + y^3\ , \quad E = x^4 + y^4$$

20. Δίνεται η παράσταση $\Pi = \dfrac{5x - 6}{(3x-5)^2 - (2x-1)^2}$.

    α) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση.

    β) Να απλοποιηθεί η παράσταση.

21. Αφού βρείτε τις τιμές για τις οποίες ορίζονται τα επόμενα κλάσματα, μετά να τα απλοποιήσετε
    α) $A = \dfrac{9(2x+1)^2 - (4x-1)^2}{4(x^2+4x+4)}$ β) $B = \dfrac{(x+2)(2x+1)^2 - 16(x+2)}{(2x+5)(7-x) + 4x^2 - 25}$

22. Να εξηγήσετε ότι η επόμενη πρόταση είναι λανθασμένη.
    Το άθροισμα δύο οποιονδήποτε άρρητων αριθμών, είναι άρρητος.

23. Να εξηγήσετε ότι η επόμενη πρόταση είναι λανθασμένη.
    Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί μεταξύ τους τότε $\alpha^\beta \neq \beta^\alpha$.

24. Να εξηγήσετε ότι η επόμενη πρόταση είναι λανθασμένη.
    Η τιμή της παράστασης $\nu^2 - \nu + 41$, για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό ν, είναι πρώτος αριθμός.

Επίπεδο 2

25. **α) Ταυτότητα Euler.** Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma &= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) \\ &= (\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2\right] \end{aligned}$$

    β) Να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma \quad \text{ή} \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$$

26. **Ταυτότητα De Moivre.** Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$$

27. **Ταυτότητα Newton.** Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ, να αποδείξετε ότι:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

Εξετάστε τις περιπτώσεις όπου το πρώτο μέλος έχει δύο, τέσσερα ή περισσότερα πρωτοβάθμια πολυώνυμα του x. Μετά προσπαθήστε να εικάσετε τη γενική περίπτωση.

28. **i)** Να αποδείξετε ότι: $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

ii) Να λυθεί η εξίσωση: $(x-1)^3+(x-3)^3+(x-7)^3+(11-3x)^3=0$

[Απ. 2 , 4 , 5]

29. Αν $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, να αποδείξετε ότι: $\alpha=\beta=\gamma=0$.

30. Οι αριθμοί α,β είναι μη μηδενικοί και διαφορετικοί μεταξύ τους. Αν $\dfrac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ τότε να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α,β είναι αντίστροφοι.

31. **α)** Να αποδείξετε ότι $\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)+\beta^4=(\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2)^2$.

β) Να αποδείξετε ότι $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$.
Σύμφωνα με το προηγούμενο να διατυπώσετε μία πρόταση.

γ) Να εξηγήσετε ότι ο επόμενος ακέραιος του $100\cdot101\cdot102\cdot103$ ισούται με το τετράγωνο ενός ακέραιου.

32. Να αναλύσετε τον ακέραιο $3^{14}+3^{13}-12$, σε γινόμενο από πρώτους παράγοντες.
Απ. $2^6\cdot3\cdot5\cdot7\cdot13\cdot73$

33. Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^*$ και ισχύει: $\dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y}{\beta}=\dfrac{\omega}{\gamma}$ να αποδείξετε ότι

$$\frac{x^6+y^6+\omega^6}{\alpha^6+\beta^6+\gamma^6}=\left(\frac{x^2+y^2+\omega^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)^3$$

34. $\alpha+\beta=1$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=2(\alpha^3+\beta^3)-3(\alpha^2+\beta^2)$.

35. $x-y=1$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $B=2(\alpha^3-\beta^3)-3(\alpha^2+\beta^2)$.

36. Αν $\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$ και $\alpha\beta\gamma=-1$, να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ ,\quad B=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\ ,\quad \mathit{\Gamma}=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\ ,\quad \mathit{\Delta}=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$$

37. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)=\beta(\beta+\alpha)(\beta+\gamma)=\gamma(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)$$

38. Να αποδείξετε ότι: $(2x-y-\omega)^3+(2y-\omega-x)^3+(2\omega-x-y)^3=3(2x-y-\omega)(2y-\omega-x)(2\omega-x-y)$.

39. Αν $3x=\alpha+\beta+\gamma$ τότε αποδείξτε ότι: $(x-\alpha)^3+(x-\beta)^3+(x-\gamma)^3=3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

40. $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε αποδείξτε ότι:

α) $(\alpha+\beta)^3+(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3=3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$.

β) $(\kappa\alpha+\lambda\beta)^3+(\kappa\beta+\lambda\gamma)^3+(\kappa\gamma+\lambda\alpha)^3=3(\kappa\alpha+\lambda\beta)(\kappa\beta+\lambda\gamma)(\kappa\gamma+\lambda\alpha)$.

41. Αν $\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2=3$, τότε να δείξετε ότι $\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}=0$.

42. Αν $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=2$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=\alpha^4+\frac{1}{\alpha^4}$$

43. Οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι και επαληθεύουν την ισότητα:

$$\frac{\alpha+\beta+2}{4} = \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}$$

Να υπολογίσετε τα α, β.

44. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο 15 διαιρεί τον $2^{44} - 1$.

β) Ο 8 διαιρεί τον $3^{2\nu} - 1$, $\nu \geq 1$.

γ) Ο $(a-1)^2$ διαιρεί τον $a^{\nu+1} - a^{\nu} - a + 1$, $a, \nu \in \mathbb{N}$.

Επίπεδο 3

45. Να αποδείξετε ότι: $$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha - \dfrac{\beta}{1+\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}}} + \frac{\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}}{\dfrac{1}{\alpha\beta}} - \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha + \dfrac{\beta}{1-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}}} = (\alpha+\beta)^2.$$

46. Έστω α, β, γ είναι οι πλευρές ενός τριγώνου $AB\Gamma$, για τις οποίες ισχύει η ισότητα

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma} + \frac{\beta-\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma-\alpha}{\beta} = 0$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

47. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν οι ισότητες: $\alpha+\beta+\gamma = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 3$. Να αποδείξετε ότι: $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

48. Αν $\alpha+\beta+\gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^4}{\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma} + \frac{\beta^4}{\gamma^3+\alpha^3-3\alpha\beta\gamma} + \frac{\gamma^4}{\alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta\gamma} = 0$$

49. Αν $\alpha+\beta+\gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) = 0$$

50. Αν $\alpha+\beta+\gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta(\gamma+2)}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2} = 3$$

2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α′) Ο α είναι πραγματικός και οι x, y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.
   Αν $\alpha x > \alpha y$ τότε $x > y$.

   (β′) Αν $x > y$ τότε $\alpha^2 x > \alpha^2 y$.

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

Επίπεδο 1

2. Αν $x > 1$ τότε να αποδείξετε ότι:
   i) $x^2 > x$ ii) $x^3 + x > x^2 + 1$

3. Αν $x > 2$ τότε να αποδείξετε ότι: $x^3 > 2x^2 - x + 2$

4. Αν $\alpha > \beta > 0$ να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 + 2\alpha > 2\beta + \alpha\beta$.

5. Αν $x > y > 0$ να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\alpha = x^3 - y^3$ και $\beta = (x - y)^3$.

6. Αν οι α, β είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, να συγκρίνεται τους αριθμούς:
   $x = \alpha^3 + \beta^3$ και $y = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

7. Αν $x \geq y > 0$ να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\dfrac{x-y}{x+y}$ και $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

8. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$. Πότε ισχύει η ισότητα;

9. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha + \beta + \gamma)^2 \geq \alpha(\beta + \gamma - \alpha) + \beta(\gamma + \alpha - \beta) + \gamma(\alpha + \beta - \gamma)$.
   Πότε ισχύει η ισότητα;

10. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2} \leq 1$. Πότε ισχύει η ισότητα;

11. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ , ρ αν δίνεται ότι $\kappa^2 + \rho^2 = 4\rho - 4$.

12. Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, α, β ισχύει η ισότητα: $(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 = 4(\alpha x + \beta y)$. Να αποδείξετε ότι $x = \alpha$ ή $x = \beta$.

13. Αν $2(\alpha\beta - \gamma^2) = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 2\gamma)$ να δείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

14. Έστω ότι $-\dfrac{4}{3} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ και $-2 < y < -\dfrac{5}{4}$. Αν $A = 6x - 8y$ και $B = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{2y}{3}$, να αποδείξετε ότι:
    i) $2 < A < 19$ ii) $-\dfrac{19}{12} < B < -\dfrac{1}{6}$

15. Για τις πραγματικές μεταβλητές α, β γνωρίζουμε ότι $1 \leq \alpha \leq 2$ και $3 < \beta < 4$. Να αποδείξετε ότι:
    i) $-10 < 2\alpha - 3\beta < -5$ ii) $3 < \alpha\beta < 8$ iii) $\frac{1}{4} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{2}{3}$ iv) $10 < \alpha^2 + \beta^2 < 20$

16. Για τις διαστάσεις α, β ενός ορθογωνίου δίνεται ότι: $8,3 \leq \alpha \leq 8,5$ και $5,7 \leq \beta \leq 5,8$. Να αποδείξετε ότι:

    i) Η περίμετρός του βρίσκεται μεταξύ των τιμών 28 και $28,6$.

    ii) Το εμβαδόν του βρίσκεται μεταξύ των τιμών $47,31$ και $49,3$.

17. Για τις ακτίνες δύο ομόκεντρων κύκλων (O, R) και (O, ρ) δίνεται ότι: $3,5 < R < 4$ και $2 < \rho < 2,2$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου βρίσκεται μεταξύ των τιμών $7,41\pi$ και 12π.

18. Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα:

Ανισότητα	$1 \leq x \leq 5$		$x \leq \frac{3}{8}$		$-\frac{3}{2} < x < 4,8$
Συμβολισμός		$[-3, 2)$		$(-3, \infty)$	

Επίπεδο 2

19. Αν $0 < x < 1$ και $0 < y < 1$, τότε να δείξετε ότι: $0 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$.

20. Να αποδείξτε ότι: $2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 2\alpha(\beta + \gamma)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

21. Να αποδείξτε ότι: $2x^2 - 2x + 1 > 0$.

22. Να αποδείξτε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 3 \geq 2(\alpha + \beta - \gamma)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

23. **Ανισότητα Schwarz.** Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2$$

Αν οι πραγματικοί $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ είναι μη μηδενικοί, τότε στην προηγούμενη σχέση η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{\beta}{y} = \dfrac{\gamma}{z}$.

24. Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ το οποίο έχει περίμετρο $20m$. Αν $AB = \Gamma\Delta = xm$ και συμβολίσουμε με $E(x)$ το εμβαδόν του, τότε να αποδείξετε ότι:
i) $A\Delta = B\Gamma = 10 - x$
ii) $0 < x < 10$
iii) $E(x) = -x^2 + 10x$
iv) $E(x) \leq 25$
v) Ένα ορθογώνιο με σταθερή περίμετρο $20m$ έχει το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

25. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους δίνεται ότι:
$x^2 + y^2 + 6y \leq 2(5x - 17)$.

26. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, b, c οι οποίοι ικανοποιούν τις ισότητες:
$a^2 + 10 = 8b \quad , \quad b^2 + 15 = 10c \quad , \quad c^2 + 25 = 6a$

Απ. $a = 3, b = 4, c = 5$

27. Αν οι α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να συγκρίνεται τους αριθμούς:
$x = \alpha^3 + 2\beta^3$ και $y = 3\alpha\beta^2$

28. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει ότι: $\left(\dfrac{2\nu}{2\nu+1}\right)^2 < \dfrac{\nu}{\nu+1}$.

β) Να αποδείξετε ότι: $\left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{6}{7} \cdots \dfrac{2000}{2001}\right)^2 < \dfrac{1}{1001}$.

Επίπεδο 3

29. Αν $x > 2$ να συγκρίνετε τους αριθμούς x^3 και $7x - 6$.

30. Αν $\omega > 2$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $A = \omega^3$ και $B = \omega^2 + \omega + 2$.

31. Να αποδείξτε ότι: $3(\alpha^4 + \alpha^2 + 1) \geq (\alpha^2 + \alpha + 1)^2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

32. Αν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{\gamma}{\delta}$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 + \delta^2 \geq \beta^2 + \gamma^2$.
Πότε ισχύει η ισότητα;

33. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 1$, να αποδείξετε ότι:
i) $\alpha\beta \leq \dfrac{1}{4}$ ii) $\left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\beta}\right) \geq 9$ iii) $\alpha^2 + \beta^2 \geq \dfrac{1}{2}$ iv) $\alpha^4 + \beta^4 \geq \dfrac{1}{8}$
Πότε ισχύει οι ισότητες;

2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Ορισμός 2.3.1 Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού a συμβολίζεται με $|a|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{αν} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{αν} \quad a < 0 \end{cases}$$

Πρόταση 2.3.1 *Αν α είναι πραγματικός αριθμός, τότε:*

- $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
- $|\alpha| \geq \alpha$ *και* $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$

Επίσης, αν $\vartheta > 0$, τότε:

- $|x| = \vartheta \iff x = \vartheta$ *ή* $x = -\vartheta$
- $|x| = |\alpha| \iff x = \alpha$ *ή* $x = -\alpha$

Παραδείγματα:

1. $(\alpha\,|\beta| - \beta\,|\alpha|)(\alpha\,|\beta| + \beta\,|\alpha|) = (\alpha|\beta|)^2 - (\beta|\alpha|)^2 = \alpha^2|\beta|^2 - \beta^2|\alpha|^2 = \alpha^2\beta^2 - \beta^2\alpha^2 = 0.$

2.

$$\begin{array}{rcl} |3x-5| & = & 7 \iff \\ 3x-5=7 & \text{ή} & 3x-5=-7 \iff \\ 3x=7+5 & \text{ή} & 3x=-7+5 \iff \\ 3x=12 & \text{ή} & 3x=-2 \iff \\ x=\dfrac{12}{3} & \text{ή} & x=\dfrac{-2}{3} \iff \\ x=4 & \text{ή} & x=-\dfrac{2}{3} \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rcl} |2x-5| & = & |3-2x| \Leftrightarrow \\ 2x-5=3-2x & \text{ή} & 2x-5=-3+2x \Leftrightarrow \\ 2x+2x=3+5 & \text{ή} & 2x-2x=-3+5 \Leftrightarrow \\ 4x=8 & \text{ή} & 0x=2 \text{ αδύνατη} \Leftrightarrow \\ x & = & \dfrac{8}{4} \Leftrightarrow \\ x & = & 2 \end{array}$$

Πρόταση 2.3.2 *Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε:*

1. $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
   Δηλαδή, η απόλυτη τιμή του γινομένου δύο πραγματικών αριθμών, ισούται με το γινόμενο των απολύτων τιμών τους.

2. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\,, \quad \beta \neq 0$
   Δηλαδή, η απόλυτη τιμή του πηλίκου δύο πραγματικών αριθμών, ισούται με το πηλίκο των απολύτων τιμών τους.

3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
   Δηλαδή, η απόλυτη τιμή του αθροίσματος δύο πραγματικών αριθμών, είναι μικρότερο ή ίσο με το άθροισμα των απολύτων τιμών τους.

Απόδειξη:

1. Οι αριθμοί $|\alpha\beta|$ και $|\alpha|\cdot|\beta|$ είναι μη αρνητικοί, επομένως έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |\alpha\beta| &= |\alpha|\cdot|\beta| \Leftrightarrow \\ |\alpha\beta|^2 &= (|\alpha|\cdot|\beta|)^2 \Leftrightarrow \\ (\alpha\beta)^2 &= |\alpha|^2\cdot|\beta|^2 \Leftrightarrow \\ \alpha^2\cdot\beta^2 &= \alpha^2\cdot\beta^2 \text{ , που ισχύει.} \end{aligned}$$

2. Οι αριθμοί $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$ και $\frac{|\alpha|}{|\beta|}$ είναι μη αρνητικοί, επομένως έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| &= \frac{|\alpha|}{|\beta|} \Leftrightarrow \\ \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2 &= \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|}\right)^2 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 &= \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \Leftrightarrow \\ \frac{\alpha^2}{\beta^2} &= \frac{\alpha^2}{\beta^2} \text{ , που ισχύει.} \end{aligned}$$

Παραδείγματα:

1. Αν $\alpha \neq \beta$ τότε: $\dfrac{|\alpha x^2-\beta x^2|}{|\beta-\alpha|} = \dfrac{|x^2(\alpha-\beta)|}{|-(\alpha-\beta)|} = \dfrac{|x^2||\alpha-\beta|}{|\alpha-\beta|} = \dfrac{x^2|\alpha-\beta|}{|\alpha-\beta|} = x^2.$

Πρόταση 2.3.3 *Αν $\theta > 0$, τότε:*

1. $|x| < \theta \Longleftrightarrow -\theta < x < \theta$
2. $|x| > \theta \Longleftrightarrow x < -\theta \quad$ *ή* $\quad x > \theta$

Ορισμός 2.3.2 Θεωρούμε δύο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία A και B αντίστοιχα. Το μήκος του τμήματος AB λέγεται **απόσταση** των αριθμών α και β, συμβολίζεται με $d(\alpha,\beta)$ και είναι ίση με $|\alpha-\beta|$. Δηλαδή είναι: $d(\alpha,\beta) = |\alpha-\beta|$.

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
   (α′) Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $\left|x^2+3\right| = x^2+3$.
   (β′) Για κάθε πραγματικό αριθμό y ισχύει: $|y-4| = y-4$.
   (γ′) Για κάθε πραγματικό αριθμό κ ισχύει: $\left|2\kappa-\kappa^2-1\right| = \kappa^2+1-2\kappa$.
   (δ′) Ισχύει $||x|+x| = |x|+x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
   (ε′) Ισχύει $|y-|y|| = y-|y|$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.
   (ς′) Αν $x, y \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει ότι $|2x-y-3| = |y-2x+3|$.
   (ζ′) Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $d(\alpha,-\alpha) = 2\alpha$.
   (η′) Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ τότε: $d(\alpha,\beta) = d(\alpha^2,\beta^2) \Leftrightarrow \alpha = \beta$.
2. Ονομάζουμε $max\{\alpha,\beta\}$ τον μεγαλύτερο από τους πραγματικούς α,β.
   Δηλαδή $\quad max\{\alpha,\beta\} = \begin{cases} \alpha & \text{αν } \alpha \geq \beta \\ \beta & \text{αν } \alpha < \beta \end{cases}.$
   Προσπαθήστε να ορίσετε την απόλυτη τιμή ενός $\alpha \in \mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας την έννοια του max.
   Μετά εξηγήστε τις ιδιότητες: $\quad |a| = |-a| \geq 0 \quad , \quad |a| \geq a \quad$ και $\quad |a| \geq -a$.
3. Αποδείξτε την ιδιότητα $\;|\alpha|^2 = \alpha^2$, για κάθε πραγματικό αριθμό α.
4. Αποδείξτε την ιδιότητα $\;|\alpha\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$, για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, εξετάζοντας τις τέσσερις δυνατές περιπτώσεις για τα πρόσημα των αριθμών α,β.

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

Επίπεδο 1

5. Να γράψετε χωρίς απόλυτα την παράσταση: $A = \left|-x^2-1\right| - \left|x^2-2x+1\right|$
6. Να αποδείξετε ότι: $\left|\alpha^2+6\alpha+9\right| - \left|\alpha^2-6\alpha+9\right| = 12\alpha$.
7. Να αποδείξετε ότι η παράσταση: $A = \left|\alpha^2+2\alpha+1\right| + \left|\alpha^2-2\alpha+1\right| - 2\left|\alpha^2+3\right|$, είναι ανεξάρτητη του α.

8. Αν $\alpha \le \beta \le \gamma$, να αποδείξετε ότι: $|\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| - |\gamma - \alpha| = 0$.

9. Αν $-2 < x < 1$ και $-2 < y < 1$ να αποδείξετε ότι η παράσταση:
$A = |x + 3y + 8| + |2x + y - 3| + x - 2y$ είναι σταθερή.

10. Να γράψετε τις επόμενες παραστάσεις χωρίς απόλυτα
α) $A = |x - 1| + x - 5$ β) $B = 2\,|2 - x| - 3x + 1$

11. Να γράψετε τις επόμενες παραστάσεις χωρίς απόλυτα
i) $A = 5\,|x - 1| + |2 + x| - x - 4$ ii) $B = |2x - 1| - |x + 3| + x$

12. Να υπολογίσετε τις τιμές του ακέραιου x, αν ισχύουν οι επόμενες ισότητες:
$|2x - 5| = 5 - 2x$ και $|x - 1| = x - 1$.

13. α) Αν $x \neq 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει: $\dfrac{x}{|x|} \le 1$.
β) Αν $x, y, z \neq 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει: $\dfrac{x}{|x|} + \dfrac{y}{|y|} + \dfrac{z}{|z|} \le 3$.
γ) Αν $\alpha, \beta \neq 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει: $\dfrac{2\alpha}{|\alpha|} + \dfrac{3\beta}{|\beta|} \le 5$.

14. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, ω, αν δίνεται ότι:
$|2x + 6| + |3x - 2y - 1| + |-x + 4y - 3\omega - 7| = 0$.

15. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, αν δίνεται ότι:
$|2\alpha - 3\beta + 13| + |5\beta + 4\alpha - 7| = 0$.
Απ. $\alpha = -2, \beta = 3$

16. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $|2x - 1| = |x + 1|$ β) $|3 - x| = |7x - 9|$ γ) $|4x - 5| - |1 - 2x| = 0$

17. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $|x - 2| = 3$ β) $|6 - 5x| = 14$ γ) $\left|1 + \frac{2}{3}x\right| = \frac{5}{6}$

18. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ και $x = \dfrac{\alpha}{|\alpha| + |\beta|}$, $y = \dfrac{\beta}{|\alpha| + |\beta|}$ να αποδείξετε ότι: $|x| + |y| = 1$

19. Αν $\alpha, \beta \neq 0$ και $\alpha\,|\beta| = \beta\,|\alpha|$ τότε δείξτε ότι οι α, β είναι ομόσημοι.

20. Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $\alpha\,|\beta| + \beta\,|\alpha| = 0$, τότε δείξτε ότι αυτοί είναι ετερόσημοι.

21. Αν $\left|\dfrac{\alpha + 25}{\alpha + 1}\right| = 5$ τότε $|\alpha| = 5$.

22. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha + \beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{\alpha}{\alpha + \beta}\right| + \left|\dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\right| \ge 1$

23. Αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $d(2x, 3y) = 3y - 2x$, τότε $y \ge \dfrac{2x}{3}$.

24. Να λυθούν οι ανισώσεις:
α) $|x - 1| < 2$ β) $|x + 3| \le 7$ γ) $|3 - 2x| \le 15$
δ) $|x + 5| > 3$ ε) $|4x - 5| \ge 3$

25. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, για τους οποίους ισχύει:
α) $|\alpha - 5| < |\alpha + 2|$ β) $d(\alpha, -4) > d(5, \alpha)$

26. Να βρείτε τους $x \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει:
α) $\dfrac{|x - 6|}{|4 - x|} < 1$ β) $\dfrac{d(2x, -3)}{d(1, 2x)} \ge 1$

27. Για τους $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις $|x| \le 2$ και $|y| \le 3$. Να αποδείξετε ότι:
i) $|5x - 2y| \le 16$ ii) $|-3x + 7y + 1| \le 28$

Επίπεδο 2

28. Να αποδείξετε ότι: $\left|\alpha^2 + 4\alpha + 5\right| - 3 = \left|2\alpha - \alpha^2 - 2\right| + 6\alpha$.

29. Αν $-1 < \alpha < 2$ να αποδείξετε ότι η παράσταση: $\Pi = ||\alpha+1|-3| - |4+|\alpha-2||$ είναι σταθερή.

30. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2\,|\alpha| - \beta^2\,|\beta| = (|\alpha|-|\beta|)(\alpha^2+|\alpha\beta|+\beta^2)$.

31. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β να αποδείξετε ότι:
i) $\alpha\beta + |\alpha\beta| \geq \alpha\,|\beta| + \beta\,|\alpha|$ ii) $\alpha\beta - |\alpha\beta| \leq \alpha\,|\beta| - \beta\,|\alpha|$

32. Για τους $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότηται: $|5x+3y-6| = 5\,|x| + 3\,|y-2|$.
Να αποδείξετε ότι: $x(y-2) \geq 0$.

33. Αν $\alpha, \beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

34. Αν $x \in \mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| \geq 2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

35. Να βρείτε τους $x \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει:
α) $\dfrac{|x-6|}{|4-x|} < 1$ β) $\dfrac{d(2x,-3)}{d(1,2x)} \geq 1$

36. Αν $\alpha, \kappa, x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:
i) $|\alpha+4| + |3-\alpha| \geq 7$ ii) $|\kappa+5| + |\kappa-9| \geq 14$
iii) $|x+2| + |7-4x| + |3x-5| \geq 4$

37. Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{(x+2)^2}{|x+2|} + \dfrac{(1-x)^2}{|1-x|} \geq 3$ με $x \neq 1$ και $x \neq -2$

β) $\dfrac{4\alpha^2-4\alpha+4}{|2\alpha-1|} + \dfrac{4\alpha^2+4\alpha+4}{|2\alpha+1|} \geq 2$ με $\alpha \neq \frac{1}{2}$ και $\alpha \neq -\frac{1}{2}$

38. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2+px+q$. Να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς $|f(0)|$, $|f(1)|$, $|f(-1)|$, δεν είναι μικρότερος του $\dfrac{1}{2}$.

39. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:
i) $||\alpha|-|\beta|| \leq |\alpha+\beta|$ ii) $||\alpha|-|\beta|| \leq |\alpha-\beta|$

40. Για ποιούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν οι επόμενες ισότητες;
i) $|\alpha-\beta| = |\alpha+\beta|$ ii) $|\alpha-\beta| = |\alpha|+|\beta|$

41. Αν $x, y \in \mathbb{R}^*$ και $\left|\dfrac{x\,|y| - y\,|x|}{xy}\right| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι οι x, y είναι ετερόσημοι.

Επίπεδο 3

42. Να αποδείξετε ότι:
i) $||x+1|+x+1| + ||x+1|-x-1| - 2\,|x+1| = 0$
ii) $||x-2|-2+x| + ||2-x|-x+2| - |4-2x| = 0$

43. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, για τους οποίους ισχύει η σχέση:
$|\alpha+3| \leq 2\beta - 1 - \beta^2$

44. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, για τους οποίους ισχύει η σχέση:
$\left|x^2-2x\right| \leq 4x - x^2 - 4$

45. Αν $-2 < x < 1$ να αποδείξετε ότι: $\left|x^2-3x-10\right| < 20$.

46. Αν $|x| < 1$ και $-1 < y < 3$ να αποδείξετε ότι: $\left|x^2-3xy-y+1\right| < 14$.

47. Αν $|x| \neq |y|$ τότε $\dfrac{|x|}{|x+y|} + \dfrac{|y|}{|x-y|} \geq 1$.

2.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
   (α′) Αν $\alpha, \beta > 0$ τότε $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.
   (β′) Αν $x < 1$ τότε ισχύει $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 1$.
   (γ′) Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{(x+1)(x-1)} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$.

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

Επίπεδο 1

2. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}} = 5$
3. Αν $x = \sqrt{7} + \sqrt{5}$ και $y = \sqrt{7} - \sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης: $x^2 - xy + y^2$.
4. Να αποδείξετε τις επόμενες ισότητες:
   i) $(3\sqrt{3} - 2)(3\sqrt{3} + 2) - (\sqrt{3} - 2)^2 - 2\sqrt{3}(1 + \sqrt{3}) = 10 + 2\sqrt{3}$.
   ii) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$
5. Αν $\alpha = 2 + \sqrt{2}$, $\beta = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\gamma = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 2$.
6. Αν $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$, $\beta = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$, $\gamma = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$.
7. Να γράψετε τις επόμενες παραστάσεις χρησιμοποιώντας μία ρίζα.
   α) $\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$
   β) $3\sqrt{20} + 5\sqrt{80} - 4\sqrt{45}$
   γ) $5\sqrt{12} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{27}$
   ε) $\sqrt{32} - \sqrt{72} + \sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{8}$
   στ) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{54}$
8. Να γράψετε τις επόμενες παραστάσεις χρησιμοποιώντας δύο ρίζες.
   α) $5\sqrt{8} - \sqrt{27} + \sqrt{50} - \sqrt{300} - 2\sqrt{2}$
   β) $3\sqrt{48} - \sqrt{18} - \sqrt{12} + \sqrt{98} + \sqrt{3}$
9. Να μετετρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.
   α) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ β) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ γ) $\dfrac{6}{\sqrt{12}}$ δ) $\dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ ε) $\dfrac{2}{3 + \sqrt{7}}$
10. Να μετετρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.
    α) $\dfrac{3}{4 - \sqrt{7}}$ β) $\dfrac{4}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}$ γ) $\dfrac{4}{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}$ δ) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}$
11. Να αποδείξετε ότι:
    α) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = 5$ β) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = 6$
12. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = 10$
13. Να αποδείξετε ότι:
    α) $\dfrac{1}{(3 - \sqrt{5})^2} - \dfrac{1}{(3 + \sqrt{5})^2} = \dfrac{3\sqrt{5}}{4}$ β) $\dfrac{1}{(2 - \sqrt{5})^3} + \dfrac{1}{(2 + \sqrt{5})^3} = -76$
14. α) Να εκτελέσετε τα αναπτύγματα: $\left(\sqrt{2} + 1\right)^3$ και $\left(\sqrt{2} - 1\right)^3$.
    β) Να αποδείξετε ότι: $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = 2$
15. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{2\sqrt{20} + 3\sqrt{8} - 2\sqrt{75}}{2\sqrt{45} + 3\sqrt{18} - 5\sqrt{27}} = \dfrac{2}{3}$

16. Να αποδείξετε ότι το κλάσμα: $\dfrac{3\sqrt{12}+\sqrt{20}-2\sqrt{8}+8}{3\sqrt{27}+\sqrt{45}-2\sqrt{18}+12}$ είναι ρητός αριθμός.

17. Να αποδείξετε ότι:
i) $\sqrt{3+\sqrt{3}}<3$ ii) $\sqrt{6+\sqrt{7}}<3$ iii) $\sqrt{13}+\sqrt{5}<\sqrt{11}+\sqrt{7}$

18. Να αποδείξετε ότι:
i) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ii) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$

19. Αν $1<x<2$ να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A=\frac{\sqrt{x^2}}{x}-\frac{7\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}-\frac{2\sqrt{9x^2-36x+36}}{x-2}$$

20. Να βρεθούν τα εξαγόμενα:
i) $\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}$ ii) $\sqrt[4]{2592}-\sqrt[4]{512}+\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{32}$

21. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α) $\sqrt[3]{5-\sqrt{21}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{5+\sqrt{21}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$
β) $\sqrt[4]{3-\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{10}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{3+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$

22. Να μετετρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.
α) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{6}}$ β) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ γ) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{125}}$

23. Να γράψετε τις παραστάσεις με τη βοήθεια μιας μόνο ρίζας.
α) $\sqrt{\sqrt[3]{7\sqrt[5]{7}}}$ β) $\sqrt{3\sqrt[5]{3\sqrt[3]{9}}}$ γ) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{27\sqrt{3}}}$

24. Να γράψετε τις παραστάσεις με τη βοήθεια μιας μόνο ρίζας.
i) $\sqrt[5]{\alpha\sqrt{\alpha\sqrt[3]{\alpha}}}$ ii) $\sqrt[15]{2\sqrt[10]{2\sqrt{8}}}$

25. Να βρεθούν τα εξαγόμενα:
α) $\sqrt{5\sqrt[3]{25}}\cdot\sqrt[6]{5}$ β) $\sqrt[8]{5}\cdot\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$
γ) $\sqrt[27]{2^{14}}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}$ δ) $\sqrt[40]{3^{14}}\cdot\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}}$

26. Να βρεθούν τα εξαγόμενα:
α) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}$ β) $\sqrt{3}:\sqrt[4]{3}$ γ) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[6]{3}$
δ) $(\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}):\sqrt[6]{4}$ ε) $(\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[5]{7}\cdot\sqrt[15]{7}):(\sqrt{7}\cdot\sqrt[10]{7})$

Επίπεδο 2

27. Το 1637 ο Fermat διατύπωσε ένα θεώρημα γνωστό ως "το τελευταίο θεώρημα του Fermat"[1]:

Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y, z και ν με $\nu>2$ ώστε να ισχύει: $x^\nu+y^\nu=z^\nu$.

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο, να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο n, ο αριθμός $\sqrt[3]{3n^2+3n+1}$ δεν είναι ακέραιος.

28. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης: $x^2-\dfrac{1}{x}+y^2+\dfrac{1}{y}$ για $x=\sqrt{3}+1$ και $y=\sqrt{3}-1$.

29. Να αποδείξετε ότι:

$$(\sqrt{80}-\sqrt{200}-\sqrt{180}+\sqrt{288}-\sqrt{8})(\sqrt{20}-\sqrt{45})=10$$

30. Να αποδείξετε ότι: $1+\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}=-2$

31. Να μετετρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.
α) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ β) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ γ) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}-\sqrt{1-\sqrt{2}}}$

32. Να μετετρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

[1] Το τελευταίο θεώρημα του Fermat αποδείχθηκε το 1993 από τον Andrew Wiles. Ονομάστηκε έτσι επειδή ήταν η τελευταία από τις προτάσεις που είχε σημειώσει ο Fermat στο περιθώριο ενός αντίτυπου των Αριθμητικών του Διόφαντου, μεταφρασμένο στη λατινική.

α) $\dfrac{x+\sqrt{4-x^2}}{x-\sqrt{4-x^2}}$, με $-2 \leq x \leq 2$ και $x \neq \sqrt{2}$

β) $\dfrac{\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\alpha-\beta}}$, με $\alpha > \beta > 0$

33. Αν $x > 1$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 4x\sqrt{x^2-1}$

34. Να μετασχηματίσετε τα επόμενα ριζικά ώστε το αποτέλεσμα να έχει μόνο απλές ρίζες:
α) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ β) $\sqrt{18-8\sqrt{2}}$ γ) $\sqrt{8+2\sqrt{12}}$

35. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{3}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} - \dfrac{3}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = 3$

36. Αν $\alpha = \sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{192}$ και $\beta = \sqrt[3]{72} - \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{384} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{162}$
δείξτε ότι: $\alpha \cdot \beta = 1$.

37. Δίνεται το κλάσμα $K = \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{36}}$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Euler, να το μετετρέψετε σε ισοδύναμο του, με ρητό παρονομαστή.
Απ. $\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{5}$

Επίπεδο 3

38. Να υπολογίσετε την παράσταση:
$1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots \dfrac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

39. Αν $x^2 + y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι: $\sqrt{x^4 - 10y^2 + 65} + \sqrt{y^4 - 4x^2 + 20} = 11$

40. Να μετετρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.
α) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}$ β) $\dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y}}$, με $x, y > 0$

Κεφάλαιο 3

Εξισώσεις

3.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α′) Ο αριθμός 0 επαληθεύει μία αδύνατη εξίσωση.

   (β′) Αν $\alpha \neq \beta$ τότε η εξίσωση $(\alpha - \beta)x = \beta - \alpha$, έχει μοναδική λύση την $x = -1$.

   (γ′) Η εξίσωση $\alpha^2 x = 2 - x$ έχει μία μόνο λύση.

   (δ′) Η εξίσωση $(x+1)^2 = x^2 + 4$ είναι 2ου βαθμού.

   (ε′) Αν η εξίσωση $\alpha x = \beta$ είναι αόριστη, τότε και η εξίωση $\beta x = \alpha$ είναι αόριστη.

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

Επίπεδο 1

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mu^2(x-3) = 2(3-x)$ έχει μία μόνο λύση, ανεξάρτητη της τιμής της παραμέτρου μ.

3. Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x-1) = \lambda(x+2)$, με λ πραγματική παράμετρο.
   i) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x = \beta$.
   ii) Να λύσετε την εξίσωση για της διάφορες τιμές του λ.
   iii) Για ποιά τιμή του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -3$;

4. α) Να λύσετε την εξίσωση: $\lambda(x-1) = x - \frac{1}{\lambda}$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.
   β) Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα, σύμφωνα με τη λύση του προηγούμενου ερωτήματος.

Τιμή του λ	Λύση της εξίσωσης
4	
1	
-1	
	3
	1

5. Να λύσετε την εξίσωση $5(\kappa - x) - 6 = \kappa(\kappa - x) - 3x$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$

6. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων λ, μ ώστε η εξίσωση $\lambda(3x-2) + 13x = \mu(5x+3) - 4$ να είναι αόριστη.

7. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων λ, μ ώστε η εξίσωση $\lambda(x-1) = x - 2\mu + 3$ να είναι αδύνατη.

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

   α) $\dfrac{|x| - 2}{2} - \dfrac{|x|}{4} = 1$

   β) $|x-3| - \dfrac{2|x-3| + 1}{3} = \dfrac{3(|x-3| - 1)}{4}$

   γ) $\dfrac{2|4-5x| - 1}{3} - \dfrac{3|4-5x| - 2}{4} = \dfrac{5|4-5x| + 4}{6} - \dfrac{7|4-5x| - 6}{6}$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{5-|x-2|}{4}+\dfrac{2}{3}(|2-x|-2)=\dfrac{3-|x-2|}{6}$

β) $\dfrac{|x-3|-1}{3}+\dfrac{2-|2x-6|}{15}=|3-x|-1$

γ) $\dfrac{|2x-1|-1}{4}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3-|1-2x|}{2}-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{|6x-3|-6}{12}$

Επίπεδο 2

10. Δύο αντικρυστά λιμάνια A και B απέχουν 105 μίλια. Ένα πλοίο ξεκινά από το λιμάνι A με κατεύθυνση το B, με ταχύτητα 24 μίλια την ώρα. Μετά από μία ώρα ένα δεύτερο πλοίο ξεκινά από το λιμάνι B με κατεύθυνση το A, με ταχύτητα 30 μίλια την ώρα. Σε πόσο χρόνο από τον απόπλου του πρώτου πλοίου θα συναντηθούν; Πόσο απέχει το σημείο συνάντησης από τα δύο λιμάνια;

11. Να λυθούν οι επόμενες εξισώσεις για κάθε τιμή της πραγματικής παραμέτρου μ.
i) $\mu^3x-\mu^2-4=4\mu(x-1)$ ii) $\mu^3(x-1)=4\mu x+8$

12. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $(\alpha x-\beta)^2+(\beta x-1)^2=(\beta x-\alpha)^2+(\alpha x-1)^2$
β) $(x+\lambda)(\lambda-\mu)+(x+\mu)(\lambda+\mu)=(\lambda+\mu)^2$

13. Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{x+\alpha}{x-\alpha}+\dfrac{x+\beta}{x-\beta}=2$, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α και β.

14. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $||x|+3|=4$ β) $||x+1|-1|=2$ γ) $|2\,|x-1|+1|=3$

15. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $|x-2|+x=8$ β) $|3x-1|=x+1$ γ) $|x+1|+|x-1|=2$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\left|x^2+2x+1\right|-\left|x^2+3\right|-5x=3$

ii) $\left|4x^2+4x+1\right|-2\left|x^2+1\right|=2+2x^2$

Επίπεδο 3

17. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε η εξίσωση:
$\dfrac{\alpha+1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{\beta-1}{x+1}$ να έχει δύο τουλάχιστον λύσεις.

3.2 Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$

Οι λύσεις της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$ παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

	α	ν	Ρίζες της $x^\nu = \alpha$
	$\alpha = 0$		0
Η εξίσωση	$\alpha > 0$	άρτιος	$\sqrt[\nu]{\alpha}$ και $-\sqrt[\nu]{\alpha}$
$x^\nu = \alpha$		περιττός	$\sqrt[\nu]{\alpha}$
	$\alpha < 0$	άρτιος	αδύνατη
		περιττός	$-\sqrt[\nu]{\lvert\alpha\rvert}$

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

Επίπεδο 1

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:
   α) $x^3 = 1000$ β) $x^4 = 625$ γ) $x^5 + 32 = 0$

2. Ο όγκος ενός κύβου είναι $64cm^3$. Να βρείτε το μήκος της ακμής του.

3. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο το πλάτος του είναι διπλάσιο του ύψους του και το μήκος του τριπλάσιο του ύψους του. Αν ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι $2058\ cm^3$, να υπολογίσετε τις διαστάσεις του.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:
   α) $3x^3 - 12x = 0$ β) $2x^5 + 16x^2 = 0$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:
   α) $x^5 - 81x = 0$ β) $64x^5 - x^3 = 0$ γ) $8x^4 + x = 0$
   δ) $6x^5 + 3x = 0$ ε) $135x^8 + 40x^5 = 0$ στ) $x^{105} - x^5 = 0$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:
   α) $(x+1)^5 = 32$ β) $(x-2)^4 - 216(x-2) = 0$
   γ) $(2x-1)^4 = 2x - 1$

Επίπεδο 2

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:
   α) $x^6 + x^4 - x^2 - 1 = 0 = 0$ β) $x^{11} - 32x^6 + x^5 - 32 = 0$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:
   α) $x^{1962} + 128x^{1969} = 0$
   β) $x^{2050} + x^{50} = 2x^{1050}$
   γ) $8888x^{2001} + 1111x^{2004} = 0$

3.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α′) Όταν η διακρίνουσα μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι μη αρνητική, τότε η εξίσωση έχει δύο διακεκριμένες ρίζες.

   (β′) Σε μία δευτεροβάθμια εξίσωση η διακρίνουσα $\Delta \neq 0$. Τότε η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

   (γ′) Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$, έχει πραγματικές ρίζες. Τότε θα είναι $\varDelta > 0$.

   (δ′) Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $x^2 - 6x + 2\kappa - 1 = 0$ είναι 3. Τότε το $\kappa = 2$.

   (ε′) Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$, έχει ρίζες τις x_1, x_2. Τότε $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$, όπου S είναι το άθροισμα των ριζών και P το γινόμενό τους.

   (ς′) Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$, έχει ρίζες τις x_1, x_2. Τότε $x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3P$, όπου S και P είναι το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών.

   (ζ′) Η δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες τους αριθμούς $-\frac{5}{2}$ και $\frac{3}{4}$ είναι η $8x^2 + 14x - 15 = 0$.

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

Επίπεδο 1

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
   α) $x^2 + 2\sqrt{4}x - 1 = 0$ β) $\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$

3. Να βρείτε το θετικό πραγματικό αριθμό x, αν οι αριθμοί $x + 1$, $3 - x$ είναι αντίστροφοι.

4. Να λυθεί η εξίσωση: $(x^2 - 2x - 3)^2 + (3x^2 - 6x - 9)^2 = 0$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:
   α) $|x - 3| + \left|x^2 - 9\right| = 0$ β) $\left|x^2 + x - 2\right| + \left|1 - x^2\right| = 0$
   γ) $|x| + \left|x^2 - x\right| = -\left|x + x^3\right|$

6. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι ρητοί, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
   $x^2 - 2\gamma x + \gamma^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta - \alpha^2 = 0$, έχει ρητές ρίζες.

7. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $3\alpha x^2 - (2\alpha + 3\beta)x + 2\beta = 0\ ,\ \alpha \neq 0$,
   έχει ρητές ρίζες, από τις οποίες η μία είναι σταθερή.

8. Αν η εξίσωση: $x^2 - \kappa x + \lambda = 0$ έχει δύο ρίζες διαφορετικές, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $(\kappa^2 - 4\lambda)x^2 - \lambda x - 5 = 0$
   i) είναι δευτέρου βαθμού
   ii) έχει διακεκριμένες πραγματικές ρίζες

9. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\mu - 3)x + \mu^2 - 5\mu - 2 = 0\ ,\ \mu \in \mathbb{R}$.
   α) Για ποιές τιμές του μ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα;
   β) Για τις τιμές του μ που θα βρείτε στο ερώτημα α), να λύσετε την εξίσωση.

10. Θεωρούμε την εξίσωση: $(\kappa - 3)x^2 - 2(3 - \kappa)x + 5 - 3\kappa = 0\ ,\ \kappa \in \mathbb{R}$.
    i) Για ποιές τιμές του κ η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού;
    ii) Για ποιές τιμές του κ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα;
    iii) Ποιά είναι η διπλή ρίζα της εξίσωσης, για τις τιμές του κ που θα βρείτε στο προηγούμενο ερώτημα;

11. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 1)x + 4 - 5\lambda = 0\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$.
    i) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ίσες ρίζες.
    ii) Για τις τιμές του λ που θα βρείτε να λύσετε την εξίσωση.

12. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση: $(2\lambda + 1)x^2 + 3(\lambda - 1)x - \lambda + 1 = 0$
    έχει δύο ίσες ρίζες.

13. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, για τις οποίες η εξίσωση:
    $(1 - \lambda)x^2 - 4x - 3 = 0$, έχει δύο διαφορετικές ρίζες.

14. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x + 1 = 0$, με ρίζες x_1, x_2. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
    α) $x_1^2 + x_2^2$ β) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$ γ) $x_1^3 + x_2^3$ δ) $|x_1 - x_2|$

15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των κύβων των ριζών της εξίσωσης:
$x^2 + \mu x + \frac{\mu^2}{3} - \frac{\alpha}{\mu} = 0$, $\mu \neq 0$, είναι ανεξάρτητο του μ.

16. Αν α, β είναι οι ρίζες της εξίσωσης $(x-2)^2 - \lambda(4x-3) = 0$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $\left(\alpha - \frac{3}{4}\right)\left(\beta - \frac{3}{4}\right)$ είναι ανεξάρτητη του λ.
Απ. $\frac{25}{16}$

17. Δίνεται η εξίσωση $4x^2 + (3+\sqrt{3})x - 2(5-\sqrt{3}) = 0$.
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2.
β) Να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

18. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - (\alpha - 2\beta)x + 7\alpha\beta - 3\alpha^2 - 4\beta^2 = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό $\beta - \alpha$.
β) Να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

19. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, για τις οποίες η εξίσωση $-5x^2 - (\lambda^2 - 2)x + 3 - 2\lambda = 0$, έχει μία θετική και μία αρνητική ρίζα.

20. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $6x^2 - |x| - 2 = 0$ β) $2(x-4)^2 - |x-4| - 15 = 0$
γ) $6(x-1)^2 - 5\,|1-x| - 6 = 0$

21. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $(x^2+2x)^2 - (x^2+2x) - 2 = 0$ β) $(x^2-1)^2 - 4(1-x^2) - 21 = 0$

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ β) $3x^4 + 16x^2 + 5 = 0$ γ) $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $\dfrac{2x+1}{x-1} - \dfrac{3}{x^2-x} = \dfrac{x-2}{x}$ β) $\dfrac{3x-1}{x+2} - \dfrac{18}{2-x} = \dfrac{7x^2-28}{x^2-4} + \dfrac{7}{2+x}$

Επίπεδο 2

24. Να λύσετε την εξίσωση $3x^2 + 5\,|x| + x = 9$.

25. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 - 2(\alpha-\beta)x + 2\alpha - 2\beta - 1 = 0$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι $\Delta = 4(\alpha - \beta - 1)^2$

ii) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα α, β , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

26. Δίνεται η εξίσωση: $3x^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πάντοτε πραγματικές ρίζες.
ii) Πότε η εξίσωση έχει ίσες ρίζες; Ποιές είναι αυτές;

27. Αν α, β, γ είναι πλευρές ενός τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι οι επόμενες εξισώσεις δεν έχουν πραγματικές ρίζες.
i) $\beta\gamma x^2 - (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)x + \beta\gamma = 0$
ii) $\dfrac{\alpha^2}{x+1} - \dfrac{\gamma^2}{x} = \beta^2$

28. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση: $(\lambda-1)x^2 - 2(\lambda-1)x - \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ έχει δύο ίσες ρίζες.

29. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 - 3\,|\alpha+\beta-1|\,x + 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η εξίσωση έχει δύο ίσες ρίζες, να βρείτε τους α, β.

30. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\alpha(\beta-\gamma)x^2 + \beta(\gamma-\alpha)x + \gamma(\alpha-\beta) = 0\ ,\ \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq \gamma$$

έχει ρητές ρίζες, από τις οποίες η μία είναι σταθερή.

31. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. Αν για τους συντελεστές α, γ της εξίσωσης ισχύει η ισότητα: $|\alpha - \gamma| = |\alpha| + |\gamma|$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

32. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει δύο διαφορετικές ρίζες, τότε να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και με την εξίσωση $\beta^2 x^2 - \alpha\gamma(x-1)^2 + \alpha\gamma = 1$.

33. Έστω a και b οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+3x+1=0$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\left(\dfrac{a}{b+1}\right)^2+\left(\dfrac{b}{a+1}\right)^2$.
Απ. 18.

34. Να οριστεί ο πραγματικός αριθμός λ, ώστε οι εξισώσεις:

$$(\lambda-1)x^2-(2\lambda+1)x+2=0$$

$$(\lambda+1)x^2-(4\lambda-1)x-2=0$$

να έχουν μία κοινή ρίζα. Να βρείτε την κοινή ρίζα.

Επίπεδο 3

35. Δίνεται η εξίσωση $2x^2-2(\gamma-\alpha)x+\alpha^2+2\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma=0$, όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, η οποία έχει πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε ότι:
α) $\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$
β) Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα τον αριθμό $\beta-\alpha$.

36. Θεωρούμε την εξίσωση $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x^2+2(\alpha+\beta+\gamma)x+3=0$, όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^*$, η οποία έχει πραγματικές ρίζες.
α) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα α,β,γ
β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης.

37. Αν οι εξισώσεις $x^2+ax+bc=0$, $x^2+bx+ca=0$ έχουν μία μόνο κοινή ρίζα, διαφορετική του μηδενός, να αποδείξετε ότι οι άλλες ρίζες των δύο εξισώσεων, είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2+cx+ab=0$.

38. **A.** Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ με ρίζες τις ρ_1,ρ_2.
Θέτουμε $S_\nu=\rho_1^\nu+\rho_2^\nu$ και $S_{-\nu}=\dfrac{1}{\rho_1^\nu}+\dfrac{1}{\rho_2^\nu}$.
Να αποδείξετε ότι:
i) $\alpha S_\nu+\beta S_{\nu-1}+\gamma S_{\nu-2}$, για $\nu=3,4,5,\cdots$
ii) $S_{-\nu}=\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)^\nu\cdot S_\nu$, με $\gamma\neq 0$.
iii) Αν ρ_1,ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2x-1=0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $S_5=\rho_1^5+\rho_2^5$.

B. Να υπολογίσετε (χωρίς ανάπτυξη των δυνάμεων) τις τιμές των παραστάσεων:
i) $A=(1+\sqrt{3})^6+(1-\sqrt{3})^6$
ii) $B=\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})^7}+\dfrac{1}{(1-\sqrt{2})^7}$.

Κεφάλαιο 4

Ανισώσεις

4.1 Ανισώσεις 1ου βαθμού

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
   (α′) Η ανίσωση $0x < 5$ είναι αδύνατη.
   (β′) Η ανίσωση $2x > 9$ έχει μόνο μία λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
   (γ′) Η ανίσωση $8x < 7$ έχει μόνο μία λύση στο σύνολο των φυσικών αριθμών.

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

Επίπεδο 1

2. Να βρεθεί ο ακέραιος αριθμός x ο οποίος επαληθεύει τις σχέσεις:
   $\frac{5x-2}{3} - \frac{4-7x}{6} > \frac{1-3x}{12}$ και $\frac{4-x}{2} - \frac{6x-1}{4} \geq -1 - \frac{x}{8}$
3. Τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα μεγαλύτερο του 12 και μικρότερο του 17. Να βρεθούν οι αριθμοί.
4. Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί άρτιοι αριθμοί των οποίων το άθροισμα βρίσκεται μεταξύ των αριθμών 19 και 26.
5. Να λυθούν οι ανισώσεις:
   α) $|x+1| < 5$ β) $|2x-7| < 9$ γ) $|6-3x| \leq 15$
   δ) $|3x-2| > 7$ ε) $|12-9x| \geq 6$

Επίπεδο 2

6. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2-9}{|x|-3}$.
   α) Για ποιές τιμές του x ορίζεται η παράσταση;
   β) Να απλοποιήσετε την παράσταση.
   γ) Να λύσετε την ανίσωση $A \geq 6$.
7. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2-2|x|+1}{|x|-1}$.
   α) Για ποιές τιμές του x ορίζεται η παράσταση;
   β) Να απλοποιήσετε την παράσταση.
   γ) Να λύσετε την ανίσωση $A < 3$.
8. Να λυθούν οι ανισώσεις:
   α) $2 < |x-5| < 5$ β) $3 < |3-x| < 7$
   γ) $1 < |2x-5| < 6$ δ) $5 < |4-6x| < 9$
9. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει η σχέση:

$$\frac{|x-2|-1}{4} < \frac{|2-x|-3}{2} \leq \frac{1+|-x+2|}{3}$$

4.2 Ανισώσεις 2ου βαθμού

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α′) Αν $f(x) = -2x^2 + x + 1$, τότε $f\left(\frac{1000}{1001}\right) > 0$

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

Επίπεδο 1

2. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:
   α) $f(x) = -3x^2 + 15x + 42$ και β) $g(x) = 6x^2 - 7x - 5$
   γ) $h(x) = 9x^2 - 16x + 8$ και δ) $\varphi(x) = 20x^2 - 60x + 45$

3. Να βρεθούν οι τιμές του x, για τις οποίες έχουν έννοια τα επόμενα κλάσματα. Μετά να τα απλοποιήσετε.
   α) $A = \dfrac{x^2 - x - 6}{2x^2 + 5x + 2}$ β) $B = \dfrac{9x^2 + 6x - 8}{15x^2 + 2x - 24}$

4. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 6x^2 - 5x - 6$.

   α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου, για τις διάφορες τιμές του x.

   β) Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά με ένα από τα σύμβολα < , > , = .
   α) $f(\sqrt{2}) \cdots 0$ β) $f(-0,667) \cdots 0$ γ) $f(1,534) \cdots 0$
   δ) $f(1,5) \cdots 0$ ε) $f(\frac{11}{7}) \cdots 0$ στ) $f(0,\bar{6}) \cdots 0$

5. Να λυθούν οι ανισώσεις:

   α) $3x - x^2 \geq 0$ β) $5 - x^2 < 0$ γ) $3x^2 + 2x - 8 < 0$

6. Να αποδείξετε ότι το κλάσμα
$$K = \frac{(-3x^2 + 7x - 5)(4x^2 - 44x + 121)}{-x^2 + 3x - 3}$$
   είναι μη αρνητικό, για οποιαδήποτε τιμή του πραγματικού αριθμού x.

7. Να λυθούν τα συστήματα:

   α) $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 4 - x > 0 \\ -2x^2 - x + 6 > 0 \\ -3x^2 + 4x - 2 < 0 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2 - x^2 < 0 \\ -2x^2 - 5x + 12 > 0 \\ x^2 + 3x - 4 < 0 \end{cases}$

8. Για ποιές τιμές του x ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις;
   α) $A = \sqrt{4 + 3x - x^2}$ β) $B = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{2x^2 - 9x + 4}$

Επίπεδο 2

9. Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο $\varphi(x) = (\alpha^2 + 1)x^2 - 3\alpha x + 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι θετικό για οποιαδήποτε τιμή του x.

10. Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο $g(x) = x^2 - \alpha x + \alpha - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι πάντοτε μη αρνητικό.

11. Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο $h(x) = -x^2 + 2\alpha x - (\beta + \gamma)^2$, είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου.

12. **α)** Να βρείτε τα πρόσημα των τριωνύμων: $f(x) = x^2 - 3x + 4$ και $g(x) = 2x^2 - 5x + 4$.

    β) Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών x και y, αν ισχύει η ισότητα:
$$(x^2 - 6x + 9)(y^2 - 3y + 4) + (4y + 5)^2(2x^2 - 5x + 4) = 0$$

13. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 3 = 0$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ, ώστε η εξίσωση να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

14. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού μ, για τις οποίες η ανίσωση
$$(\mu + 2)x^2 - 2(\mu - 2)x + 5(\mu - 2) < 0$$
    αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επίπεδο 3

15. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 2)x - \lambda + 1 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες τις x_1, x_2.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η σχέση:

$$1 < x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 < 7$$

Κεφάλαιο 5

Πρόοδοι

5.1 Ακολουθίες

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη <u>Σωστό</u> ή <u>Λάθος</u> και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α′) Σε μια ακολουθία (a_ν) κάθε όρος της a_ν είναι ακέραιος.

   (β′) Ο γενικός όρος της ακολουθίας $a_\nu = |3\nu - 1| - |3\nu + 1|$ είναι $a_\nu = -2$.

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

<u>**Επίπεδο 1**</u>

2. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:
   i) $a_\nu = \dfrac{(-1)^\nu \nu}{\nu^2 + 1}$ ii) $a_\nu = \left(1 + \dfrac{1}{\nu}\right)^\nu$

3. Δίνεται η ακολουθία $a_1 = 1, a_2 = 3$ και $a_{\nu+1}^2 = a_\nu \cdot a_{\nu+2} - 8$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε τον 5ο όρο της ακολουθίας.
   Απ. 577

4. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας (a_ν) με $a_1 = 3$ και $a_{\nu+1} = \dfrac{5a_\nu - 4}{1 + a_\nu}$.

5. Δίνεται η ακολουθία του Fibonacci, $a_1 = 1, a_2 = 1$ και $a_{\nu+2} = a_{\nu+1} + a_\nu$. Να βρείτε τον 17ο όρο της ακολουθίας.

6. Δίνεται η ακολουθία (a_ν) με $a_1 = 1$ και $a_{\nu+1} = \sqrt{1 + a_\nu^2}$.

   i) Να βρείτε τον 6ο όρο της ακολουθίας.

   ii) Μπορείτε να ”εικάσετε” τον γενικό όρο της ακολουθίας;

7. Θεωρούμε την ακολουθία (a_ν) με $a_1 = 2$ και $a_{\nu+1} = \dfrac{3 + a_\nu}{1 - a_\nu}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

   i) Να βρείτε τους έξι πρώτους όρους της ακολουθίας.

   ii) Τι παρατηρείτε;

5.2 Αριθμητική πρόοδος

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α′) Ο εικοστός όρος της αριθμητικής προόδου $10, 7, 4, \ldots$ είναι ίσος με 20.

   (β′) Σε κάθε αριθμητική πρόοδο (a_ν) για τους όρους της a_2, a_4, a_6 ισχύει η σχέση $2a_4 = a_2 + a_6$.

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

Επίπεδο 1

2. Σε μία αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του 2ου , του 4ου και του 6ου όρου είναι 0, ενώ το άθροισμα του 3ου , του 5ου και του 7ου όρου είναι 6. Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου.
   Απ. 690

3. Ένα θέατρο έχει 12 σειρές καθισμάτων. Η πρώτη σειρά έχει 10 καθίσματα και κάθε επόμενη έχει 3 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.

   α) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

   β) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

   γ) Σε μια παράσταση τα εισιτήρια της 7ης σειράς διανεμήθηκαν δωρεάν και όλα τα υπόλοιπα πουλήθηκαν προς 30€ το ένα. Πόσα χρήματα εισέπραξε το θέατρο από την παράσταση αυτή;

4. Μία ομάδα 324 στρατιωτών παρατάσσεται σε τριγωνικό σχήμα ώστε: στην πρώτη σειρά μπαίνει ένας, στην δεύτερη τρεις, στην τρίτη πέντε κ.τ.λ.

   α) Πόσοι θα είναι στην 12η σειρά;

   β) Πόσες σειρές σχηματίστηκαν συνολικά;

5. **Α.** Σε μία αμφιθεατρική αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η 28 καθίσματα.

   α) Πόσα καθίσματα έχει η 10η σειρά;

   β) Πόσα καθίσματα υπάρχουν από την 5η έως και την 15η σειρά;

   Β. Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στην 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η 12 κ.τ.λ.

   α) Από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα;

   β) Πόσοι θα είναι οι θεατές;

   Απ. Α.α)34 β)350 Β.α)11η β)55

6. Σ’ ένα θέατρο, η πρώτη σειρά έχει 70 καθίσματα και η τελευταία έχει 250 καθίσματα. Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η προτελευταία σειρά έχει 140 καθίσματα περισσότερα από τη δεύτερη σειρά.

   i) Να αποδείξετε ότι κάθε σειρά καθισμάτων του θεάτρου έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

   ii) Να υπολογίσετε το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου.

   iii) Την πρώτη παράσταση ενός θεατρικού έργου παρακολούθησαν 100 θεατές, ενώ σε κάθε επόμενη παράσταση ο αριθμός των θεατών διπλασιαζόταν. Ποια είναι η παράσταση στην οποία για πρώτη φορά θα γεμίσει το θέατρο;

   Απ. β)1600 γ)5η

7. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί $(\alpha+\beta)^2, \alpha^2+\beta^2$ και $(\alpha-\beta)^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

8. **α)** Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες οι αριθμοί $x{-}4, x+4$ και $3x{-}4$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

   β) Αν ο αριθμός $x{-}4$ είναι ο έκτος όρος της αριθμητικής προόδου του ερωτήματος (α), να βρείτε τον πρώτο όρο της.

γ) Να βρεθεί το άθροισμα των 10 πρώτων όρων αυτής της αριθμητικής προόδου.

Απ. α) $x = 8$ β) $\alpha_1 = -36$ γ) $S_{10} = 0$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x+2)+(x+5)+(x+8)+\cdots+(x+53)=459$

β) $1+7+13+\cdots+x=280\,,$ με $x>0$

Απ. α) -2 β) 55

10. Αν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τους αριθμούς:

i) $\beta\gamma\ ,\ \gamma\alpha\ ,\ \alpha\beta$

ii) $\alpha(\beta+\gamma)\ ,\ \beta(\gamma+\alpha)\ ,\ \gamma(\alpha+\beta)$

iii) $(\beta+\gamma-\alpha)^2\ ,\ (\gamma+\alpha-\beta)^2\ ,\ (\alpha+\beta-\gamma)^2$

11. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha\ ,\ \beta\ ,\ \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν οι αριθμοί $\beta+\gamma-\alpha\ ,\ \gamma+\alpha-\beta\ ,\ \alpha+\beta-\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

12. Να βρεθούν τρεις αριθμοί, που να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν το άθροισμά τους είναι 3 και το γινόμενό τους είναι –8.
Απ. $-2, 1, 4$

13. Να αποδείξετε ότι, αν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε αυτά είναι ανάλογα των αριθμών 3, 4 και 5.

<u>Επίπεδο 2</u>

14. Δίνεται η ακολουθία $a_\nu = \dfrac{3\nu^2-3}{\nu+1} - 5.$

α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = a_{15} + a_{16} + \ldots + a_{30}$.

γ) Να υπλογίσετε το άθροισμα $B = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{53}$.

15. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\alpha > \beta > \gamma$, οι $\tau, \alpha, \beta, \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. (*τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου*).

16. Η τιμή αγοράς ενός εκτυπωτή είναι μεγαλύτερη από 620 €και μικρότερη από 640 €. Κατά την αγορά συμφωνήθηκαν τα εξής:

- Να δοθεί προκαταβολή 120 €.
- Η εξόφληση του υπόλοιπου ποσού να γίνει σε 10 μηνιαίες δόσεις.
- Κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά ω €, όπου ω θετικός ακέραιος.
- Η τέταρτη δόση να είναι 48 €.

α) Να εκφράσετε το ποσό της πρώτης δόσης ως συνάρτηση του ω.

β) Να εκφράσετε την τιμή αγοράς ως συνάρτηση του ω.

γ) Να βρείτε την τιμή του ω.

δ) Να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης.

ε) Να βρείτε την τιμή αγοράς του εκτυπωτή.

Απ. α) $48 - 3\omega$ β) $600 + 15\omega$ γ)2 δ)60 €ε)630 €

17. Ένα κολιέ αξίας 2290€ αποτελείται από 33 διαμάντια. Το μεσαίο διαμάντι είναι το ακριβότερο. Τα υπόλοιπα διαμάντια είναι τοποθετημένα κατά σειρά αξίας, ώστε κάθε διαμάντι μέχρι το μεσαίο να αξίζει 2 €λιγότερο από το επόμενό του και στη συνέχεια, από το μεσαίο και πέρα, κάθε διαμάντι να αξίζει 3 €λιγότερο από το προηγούμενό του.

α) Πόσα ευρώ είναι η αξία του μεσαίου διαμαντιού;

β) **i)** Πόσα ευρώ φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το πρώτο;

ii) Πόσα ευρώ φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το τελευταίο;

Απ. α) 90 €β)i) 32 €ii)48 €

5.3 Γεωμετρική πρόοδος

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη <u>Σωστό</u> ή <u>Λάθος</u> και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α′) Ο λόγος λ μιας γεωμετρικής προόδου μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

   (β′) Αν ο λόγος μιας γεωμετρικής προόδου είναι 1, τότε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της είναι ίσο με λa_1.

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

<u>**Επίπεδο 1**</u>

2. Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο της οποίας ο 4ος όρος ισούται με 108 και ο 8ος όρος ισούται με 8748
   Απ. $4, 12, 36, 108, \ldots \quad , \quad -4, 12, -36, 108, \ldots$

3. Να βρείτε τη γεωμετρικής προόδου της οποίας ο 3ος όρος ισούται με 24 και ο 8ος όρος ισούται με 768.
   Απ. $a_1 = 6, \lambda = 2$

4. Ένας πληθυσμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μία ώρα:

   A. Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια, να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από 6 ώρες.

   B. Στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων ψεκάζεται με μια ουσία, η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί την καταστροφή $3^3 \cdot 10$ βακτηριδίων κάθε ώρα.

      B1. Να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά τον ψεκασμό.

      B2. Μετά από πόσες ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν τα βακτηρίδια;

   Απ. A. 7290 B1. 1890 B2. 27

5. Να βρεθεί ο x ώστε οι αριθμοί $x + 4, 3x, 4–7x$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
   Απ. $-2, \frac{1}{2}$

6. Αν οι αριθμοί $x, 10, y$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, ενώ οι αριθμοί $x, 6, y$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να βρεθούν οι x, y.
   Απ. $2, 18$

7. Αν οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν συγχρόνως διαδοχικούς όρους, αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

8. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να αποδείξετε ότι:
$$\frac{\beta^2\gamma^2 - \alpha^4}{\alpha} + \frac{\alpha^2\gamma^2 - \beta^4}{\beta} + \frac{\alpha^2\beta^2 - \gamma^4}{\gamma} = 0$$

9. Αν οι αριθμοί x, y, ω, z είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να αποδείξετε ότι:
   i) $(x + z)(y + \omega) - (x + \omega)(y + z) = (y - \omega)^2$ ii) $\dfrac{y + z}{x} = \dfrac{\omega^2 z + z^3}{\omega^3}$

10. Να βρεθούν τρεις αριθμοί που να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν το γινόμενό τους είναι 216 και το άθροισμα των άκρων όρων είναι –20.
    Απ. $-2, 6, -18$

11. Να βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου αν αυτές είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και το άθροισμα όλων των ακμών του είναι 168, ενώ ο όγκος του είναι 512.
    Απ. $2, 8, 32$

Κεφάλαιο 6

Βασικές έννοιες των συναρτήσεων

6.1 Η έννοια της συνάρτησης

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α′) Υπάρχει συνάρτηση f για την οποία να ισχύει $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ και $f(0,5) = 3$.

   (β′) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2-4} = \dfrac{x^3-2^3}{x^2-2^2} = \dfrac{(x-2)(x^2-2x+2^2)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x^2-2x+4}{x+2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-2\}$.

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

Επίπεδο 1

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:
   α) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-5x}$ β) $g(x) = \dfrac{|x|}{2x^2-5x-3}$ γ) $h(x) = \dfrac{x^3+2}{|x-2|-3}$

3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:
   α) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ β) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x} + \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}} - x^2 + 3x - 5$
   γ) $h(x) = \dfrac{\sqrt{3-|2-x|}}{x^2-5x+6}$

4. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων και να απλοποιηθεί ο τύπος τους
   α) $f(x) = \dfrac{(2x+3)(x-2)+4-x^2}{x^2-2x}$ β) $g(x) = \dfrac{-x(x+1)+x^3+1}{3x^2+2x-1}$

Επίπεδο 2

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2-3|x|}{x^2-9}$.

   α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

   β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

   γ) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| = \frac{2}{5}$.

   δ) Να λύσετε την ανίσωση $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\kappa x}{x^2+1} - 3 & \text{αν } x < 0 \\ 5x^2 - 2x + \lambda & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

   i) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ αν ισχύει:
   $f(-1) = 3f(0) - 1$ και $5f(-2) + 10f(1) = 1$.

   ii) Να υπολογίσετε την παράσταση $\Pi = \dfrac{1}{f(0) - f(\frac{1}{2})} + [4 + f(-3)]^2 + 4,84$.

   Απ. i)$\kappa = 2, \lambda = -1$ ii) $\Pi = 1$

6.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α′) Τα σημεία $A(4,1)$ και $B(4,-1)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

   (β′) Τα σημεία $A(-2,3)$ και $B(2,-3)$ είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων O.

   (γ′) Τα σημεία $A(-1,-2)$ και $B(-1,2)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

Επίπεδο 1

2. Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των επόμενων συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες
   α) $f(x) = |2x-3| - 1$ β) $g(x) = x^3 - x$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\kappa x - 1}{x^2+1}$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Το σημείο $M(1, \frac{1}{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

   α) Να βρείτε την τιμή του κ.

   β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

4. Έστω η συνάρτηση $g(x) = x^2 + \kappa x - \lambda - 2$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. τα σημεία $A(-1,-4)$ και $B(4,6)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της g.

   α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ.

   β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

   Απ. α) $\kappa = -1, \lambda = 4$ β) $(0,-6), (-2,0), (3,0)$

6.3 Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α′) Η ευθεία με εξίσωση $y = -3x + 5$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$.

   (β′) Η ευθεία με εξίσωση $x + y = 0$ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{O}y$.

   (γ′) Οι ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 3$ και $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 4$ είναι παράλληλες.

   (δ′) Οι ευθείες με εξισώσεις $2x + y = 5$ και $y = 2x + 9$ είναι παράλληλες.

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

Επίπεδο 1

2. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :
   i) $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{αν } x \leq -1 \\ 5 & \text{αν } -1 < x \leq 2 \\ x-4 & \text{αν } x > 2 \end{cases}$ ii) $g(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{αν } x < -2 \\ 3 & \text{αν } x = -2 \\ -2x+1 & \text{αν } x > -2 \end{cases}$

3. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :
   i) $f(x) = |x-2| + 2x - 1$ ii) $g(x) = |2x+1| - |x-1|$

4. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :
   i) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - x$ ii) $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

5. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι επόμενες ευθείες να είναι παράλληλες:

   α) $\epsilon_1 : y = \lambda^2 x - 1$ και $\epsilon_2 : y = (2-\lambda)x + 3$

   β) $\epsilon_1 : y = |\lambda - 2|x + \lambda$ και $\epsilon_2 : y = 2|\lambda|x + 6\lambda - 1$

6. **α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-5, 3)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $2x + y = 3$.

   β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ, αν το σημείο $M(\kappa-1, \kappa^2-4)$ ανήκει στην ευθεία που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

Απ. α)$y = -2x - 7$ β)$\kappa = -1$

Επίπεδο 2

7. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :
   i) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x+1|} + 2x - 1$ ii) $g(x) = x + \dfrac{x}{|x|} + \dfrac{x-1}{|x-1|}$

Κεφάλαιο 7

Μελέτη βασικών συναρτήσεων

7.1 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη <u>Σωστό</u> ή <u>Λάθος</u> και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α′) Η συνάρτηση $f(x) = 3x^2$ έχει ελάχιστο.

   (β′) Η συνάρτηση $f(x) = -2x^3$ έχει μέγιστο.

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

<u>Επίπεδο 1</u>

2. Να βρείτε την παραβολή, με κορυφή την αρχή των αξόνων, η οποία διέρχεται από το σημείο $A\left(3, -\frac{3}{2}\right)$.

3. **α)** Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$.
   Με τη βοήθεια του σχήματος να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$.

   β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2|x|$.

5. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{αν } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

7.2 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Κατανόηση εννοιών - Θεωρία

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α′) Αν $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$, τότε ισχύει $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\dfrac{\Delta}{4\alpha}$.

Εφαρμογές - Ασκήσεις - Προβλήματα

Επίπεδο 1

2. Να μελετηθούν και να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους:
   α) $f(x) = 2x^2 - x - 6$ β) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ γ) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
   δ) $f(x) = -x^2 + x + 2$ ε) $f(x) = -9x^2 + 12x - 4$ στ) $f(x) = -x^2 + x - 1$

3. **i)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, αν η καμπύλη της τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 2 και τον $x'x$ στα -2 και -1.

   ii) Να κατασκευάσετε τον πίνακα μονοτονίας της f και να βρείτε το είδος και τη τιμή του ακροτάτου αυτής.

   Απ. i) $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 2$

4. **i)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, αν η γραφική παράστασή της διέρχεται από τα σημεία $A(1, -4), B(2, -3)$ και $\Gamma(-2, 5)$.

   ii) Να κατασκευάσετε τον πίνακα μονοτονίας της f και να βρείτε το είδος και τη τιμή του ακροτάτου αυτής.

   Απ. i) $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = -3$

5. **i)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, αν η γραφική παράστασή της τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -5 τον $x'x$ στο $-\frac{5}{2}$ και έχει ελάχιστο για $x = -\frac{3}{4}$.

   ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

   Απ. i) $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = -5$

6. **α)** Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 6\kappa x + \kappa$ να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

   β) Για τις τιμές του κ που θα βρείτε να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

   Απ. α) $\kappa = 0, \kappa = \frac{1}{9}$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$.

   α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

   β) Να βρείτε το διάστημα μεταβολής του μ, ώστε η ευθεία με εξίσωση $y = \mu$ να έχει με την καμπύλη της f τέσσερα κοινά σημεία.

   Απ. β) $0 < \mu < 4$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 – 6x + 5$ και $g(x) = 1 – x^2$.

   i) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων, στο ίδιο σύστημα αξόνων.

   ii) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών τους παραστάσεών τους.

   iii) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού μ, για τις οποίες η ευθεία με εξίσωση $y = \mu$ τέμνει τα διαγράμματα και των δύο συναρτήσεων.

   Απ. ii) $A(1, 0), B(2, -3)$ iii)$-4 \leq \mu \leq 1$

9. Να βρεθεί το ακρότατο της συνάρτησης $f(x) = (x - 1)^2 + (2x - 1)^2$.
   Απ. Για $x = \frac{3}{5}, f_{min} = \frac{1}{5}$