Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Πράξη «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – ΠΙΛΟΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ, στους Άξονες Προτεραιότητας 1,2,3, -Οριζόντια Πράξη»,

ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Θεοδόσιος Ζαχαριάδης, Καθηγητής τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Δέσποινα Πόταρη, Αν. Καθηγήτρια τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ

Κώστας Στουραΐτης, Καθηγητής Μαθηματικών Β/βάθμιας Εκπαίδευσης

Αθήνα, Νοέμβριος 2011

Στη δημιουργία του επιμορφωτικού υλικού συνεισέφεραν και οι

Πέτρος Βερύκιος, Σχολικός σύμβουλος Μαθηματικών Β/βάθμιας εκπαίδευσης

Γιάννης Θωμαΐδης, Σχολικός σύμβουλος Μαθηματικών Β/βάθμιας εκπαίδευσης

Μιχάλης Κασκαντάμης, Καθηγητής Μαθηματικών Β/βάθμιας εκπαίδευσης

Χρήστος Μαρκόπουλος, Λέκτορας του τμήματος   Πανεπιστημίου Πατρών

Γιώργος Ψυχάρης, Λέκτορας τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αυτό το υλικό έχει στόχο να βοηθήσει στον πρώτο κύκλο επιμόρφωσης των καθηγητών Μαθηματικών των πιλοτικών σχολείων σχετικά με το νέο πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών του Γυμνασίου. Ειδικότερα, στην ενότητα 1 περιγράφονται οι στόχοι της πιλοτικής εφαρμογής του νέου ΠΣ. Είναι σημαντικό να κατανοήσουν οι εκπαιδευτικοί των σχολείων στα οποία θα εφαρμοστεί πιλοτικά το νέο ΠΣ τον καθοριστικό ρόλο που έχουν σε αυτή την εφαρμογή. Αυτοί θα εντοπίσουν τα σημεία στα οποία απαιτούνται τροποποιήσεις του ΠΣ, θα προτείνουν διορθώσεις και θα βοηθήσουν ώστε αυτό που θα εφαρμοστεί τον επόμενο χρόνο σε όλα τα σχολεία να έχει όσο γίνεται λιγότερες αδυναμίες. Στην ενότητα 2 γίνεται μια σύντομη παρουσίαση της φιλοσοφίας και των βασικών σημείων του ΠΣ καθώς και του οδηγού του εκπαιδευτικού. Αυτή η παρουσίαση, η οποία δεν αντικαθιστά με κανένα τρόπο την ανάγκη μελέτης του ΠΣ και του οδηγού του εκπαιδευτικού, έχει στόχο να δώσει τα βασικά στοιχεία των δύο κειμένων ώστε να αποκτήσει ο εκπαιδευτικός μια πρώτη γενική εικόνα αυτών, κάτι που θα τον βοηθήσει στην περεταίρω μελέτη τους. Στην ενότητα 3 δίνονται κάποιες κατευθύνσεις στον εκπαιδευτικό σχετικά με την αξιοποίηση του ΠΣ και του οδηγού κατά τη διδακτική πράξη. Τα υλικά αυτά χρειάζεται να αποτελέσουν το βασικό διδακτικό εργαλείο του εκπαιδευτικού και είναι σημαντικό να τα αξιοποιεί με σωστό τρόπο. Στην ενότητα 4 περιγράφονται εργαλεία αξιολόγησης του μαθητή και της διδασκαλίας. Στην ενότητα 5 αναφέρονται στοιχεία για την αξιοποίηση των ΤΠΕ στο νέο ΠΣ και περιγράφεται ένα παράδειγμα τέτοιας αξιοποίησης. Επειδή το νέο ΠΣ υποστηρίζει αλλαγές στη διδασκαλία στην ενότητα 6 δίνονται παραδείγματα σχεδιασμού διδασκαλίας και στοιχεία από πραγματικές διδασκαλίες, ώστε να βοηθηθεί ο εκπαιδευτικός κατανοήσει βασικά χαρακτηριστικά των προτεινόμενων διδακτικών αλλαγών. Τα εργαστήρια ανάπτυξης σχεδίου μαθήματος αποτελεί ένα ιδιαίτερα σημαντικό τμήμα της επιμόρφωσης. Σε αυτά οι εκπαιδευτικοί θα επιχειρήσουν να αναπτύξουν σχέδια μαθήματος, με βάση τη φιλοσοφία του ΠΣ και τα παραδείγματα που θα έχουν προηγηθεί, για την προσέγγιση συγκεκριμένων στόχων και θα συζητήσουν τα σχέδια που θα αναπτυχθούν. Σκοπός αυτής της διαδικασίας είναι να ξεκαθαριστούν θέματα όπως η σημασία των δραστηριοτήτων και η διαχείριση τους, η χρήση του ψηφιακού υλικού, οι διαδικασίες αξιολόγησης του αποτελέσματος της διδασκαλίας κ.α. Στις ενότητες 7, 8, 9 του υλικού αυτού υπάρχουν τρία θέματα για την ανάπτυξη σχεδίου μαθήματος που αφορούν ενότητες της Γεωμετρίας, της Άλγεβρας και της Στατιστικής αντίστοιχα. Το τελευταίο κομμάτι του επιμορφωτικού υλικού είναι ένα παράρτημα στο οποίο δίνονται ορισμένα επιμέρους στοιχεία τα οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμα για τον εκπαιδευτικό και στα οποία γίνεται αναφορά σε ενότητες του κειμένου.

1. ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΠΙΛΟΤΙΚΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΝΕΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ

Στόχος της πιλοτικής εφαρμογής του νέου Π.Σ. είναι η μελέτη της εφαρμογής του στη διδακτική πράξη. Ειδικότερα, μέσα από την πιλοτική εφαρμογή επιδιώκεται:

α) Να μελετηθεί η καταλληλότητα του ΠΣ και του οδηγού του εκπαιδευτικού και τα πιθανά προβλήματα που προκύπτουν κατά την εφαρμογή του.

β) Να εντοπιστούν αλλαγές οι οποίες απαιτούνται ώστε να γίνουν οι αναγκαίες τροποποιήσεις πριν την εφαρμογή του σε όλα τα σχολεία.

γ) Να προσδιοριστούν πλήρως τα μεταβατικά προβλήματα που θα προκύψουν στην πρώτη χρονιά της εφαρμογής του και να μελετηθεί ο τρόπος αντιμετώπισης τους.

δ) Να παραχθεί πρόσθετο αναγκαίο διδακτικό υλικό σε ψηφιακή μορφή.

Για την προσέγγιση των παραπάνω καθοριστικός είναι ο ρόλος των εκπαιδευτικών των πιλοτικών σχολείων. Αναγκαία προϋπόθεση για την αποτελεσματικότητα της πιλοτικής εφαρμογής είναι η κατανόηση της φιλοσοφίας που διέπει το ΠΣ, των αρχών πάνω στις οποίες αυτό αναπτύχθηκε και της διδακτικής προσέγγισης που αυτό προωθεί, καθώς και η σωστή εφαρμογή τους στην διδακτική πράξη. Για αυτούς τους λόγους, το ΠΣ, ο οδηγός του εκπαιδευτικού, καθώς και το υποστηρικτικό υλικό (διδακτικά υλικά, προγράμματα Η/Υ), τα οποία μπορείτε να βρείτε στο ψηφιακό σχολείο (digitalschool.minedu.gov.gr, Νέα Πιλοτικά Προγράμματα Σπουδών, Επιστημονικό πεδίο: Μαθηματικά), αποτελούν τα βασικά εργαλεία του εκπαιδευτικού σε όλη τη διάρκεια του σχολικού έτους. Αρχικά ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να μελετήσει το ΠΣ και το γενικό μέρος του οδηγού του εκπαιδευτικού ώστε να αποκτήσει μια πρώτη αντίληψη της φιλοσοφίας που διέπει το ΠΣ, καθώς και μια συνολική εικόνα της δομής του προγράμματος των Μαθηματικών στις τάξεις του Γυμνασίου. Στη συνέχεια, ατομικά ή σε συνεργασία με άλλους εκπαιδευτικούς, καθορίζει, με βάση τους μαθησιακούς στόχους που θέτει το ΠΣ για την τάξη του και τις εναλλακτικές προτάσεις που δίδονται στην 1η ενότητα του Παραρτήματος, τη σειρά διδασκαλίας. Για την καθημερινή διδακτική πράξη θέτει συγκεκριμένους μαθησιακούς στόχους με βάση τη σειρά που έχει καθορίσει. Σχεδιάζει και διερευνά τη διδασκαλία για την προσέγγιση αυτών των στόχων με τη βοήθεια του οδηγού του εκπαιδευτικού. Διαμορφώνει το διδακτικό υλικό που θα χρησιμοποιήσει με τη βοήθεια του ΠΣ (προτεινόμενες δραστηριότητες, πηγές διδακτικού υλικού) και τον οδηγό του εκπαιδευτικού (διδακτική διαχείριση ενδεικτικών δραστηριοτήτων). Μετά τη διδασκαλία σκέφτεται πάνω στην όλη διαδικασία και την υλοποίηση της καθώς και τρόπους αξιολόγησης με τη βοήθεια του οδηγού του εκπαιδευτικού.

Ένα εργαλείο που θα βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να συνειδητοποιεί τις διδακτικές του ενέργειες και να βελτιώνει τη διδασκαλία του και παράλληλα θα συμβάλλει ουσιαστικά στην προσέγγιση των στόχων της πιλοτικής εφαρμογής, είναι η συστηματική καταγραφή, υπό μορφή ημερολογίου, από τον εκπαιδευτικό εμπειριών και σκέψεων γύρω από την καθημερινή διδασκαλία. Μια τέτοια καταγραφή μπορεί να βοηθήσει:

- στην παρακολούθηση του πως υλοποιείται το ΠΣ στην τάξη και στην ανάδειξη ζητημάτων που θα ληφθούν υπόψη στην τελική διαμόρφωση του
- στον εντοπισμό αποτελεσματικών και μη αποτελεσματικών διδακτικών δραστηριοτήτων μέσα από την κριτική ανάλυση της διδασκαλίας
- στην επικοινωνία του εκπαιδευτικού με άλλους συναδέλφους με κύριο θέμα τη μελέτη της διδασκαλίας.

Στο ημερολόγιο ο εκπαιδευτικός μπορεί να αναφέρεται:

1. Στις θεματικές ενότητες που δίδαξε την εβδομάδα.
2. Στην επιλογή των δραστηριοτήτων που χρησιμοποίησε και το πως αυτές συνδέθηκαν με συγκεκριμένους διδακτικούς στόχους που έθεσε (ποιες ήταν από το ΠΣ και τον οδηγό του εκπαιδευτικού).
3. Στην αξιολόγηση των διδακτικών του επιλογών (π.χ. ποιες δραστηριότητες φάνηκαν αποτελεσματικές και ποιες όχι και γιατί).
4. Στην περιγραφή 1-2 παραδειγμάτων που του έκαναν εντύπωση σχετικά με το τι έκαναν οι μαθητές.
5. Στην περιγραφή δυσκολιών που αντιμετώπισε.
6. Σε αξιολογικές κρίσεις πάνω στο ΠΣ, στον οδηγό για τον εκπαιδευτικό , στο προτεινόμενο εκπαιδευτικό υλικό.
7. Σε συζητήσεις με άλλους εκπαιδευτικούς, επιμορφωτές και μέλη γενικότερα της υποστηρικτικής ομάδας της πιλοτικής και άλλες δράσεις που σχετίζονταν με τη διδασκαλία του.
8. Σε αλλαγές που ο ίδιος θα έκανε στη διδασκαλία του.

Οι καταγραφές και ο σχολιασμός του εκπαιδευτικού είναι σημαντικό να χαρακτηρίζονται από τεκμηρίωση και κριτική ανάλυση των συμβάντων στην τάξη καθώς και των γενικότερων απόψεων που εκφράζει.

Με βάση τα στοιχεία του ημερολογίου ο εκπαιδευτικός θα δίνει στην ομάδα ανάπτυξης του ΠΣ κάθε τρίμηνο μια έκθεση όπου θα αναφέρονται:

α) Οι θεματικές ενότητες που δίδαξε στο διάστημα αυτό.

β) Ο χρόνος που απαιτήθηκε για την κάθε ενότητα και η συμβατότητα του με τον προτεινόμενο από το ΠΣ.

γ) Αξιολόγηση των δραστηριοτήτων του ΠΣ και άλλων που χρησιμοποίησε ανά ενότητα, όσον αφορά στην αποτελεσματικότητα τους.

δ) Αναλυτική περιγραφή των δυσκολιών και προβλημάτων που αντιμετώπισε κατά τη διδασκαλία κάθε ενότητας (προβλήματα υλικοτεχνικής του σχολείου για την ανάπτυξη συγκεκριμένων δραστηριοτήτων, δυσκολίες των μαθητών, προβλήματα δημιουργίας διδακτικού υλικού κ.α.)

ε) Αξιολόγηση του τμήματος του ΠΣ και του οδηγού του εκπαιδευτικού που αφορά στις συγκεκριμένες ενότητες.

στ) Προτάσεις για συγκεκριμένες αλλαγές στο ΠΣ και στον οδηγό του εκπαιδευτικού.

Τις εκθέσεις αυτές η ομάδα ανάπτυξης του ΠΣ θα τις αξιοποιήσει για να προχωρήσει σταδιακά στις αναγκαίες τροποποιήσεις του ΠΣ.

Σημαντικό στοιχείο για την επιτυχία της πιλοτικής εφαρμογής είναι η συνεργασία μεταξύ των ίδιων των εκπαιδευτικών. Στο πλαίσιο αυτό οι εκπαιδευτικοί μπορούν να

- οργανώνουν τακτικές συναντήσεις (εβδομαδιαίες) στο πλαίσιο του σχολείου,
- συζητούν τον προγραμματισμό τους και τις επιλογές τους και να σχεδιάζουν από κοινού κάποιες διδασκαλίες,
- μελετούν συστηματικά τι συμβαίνει στην τάξη τους και να συζητούν τις παρατηρήσεις τους με τους άλλους συναδέλφους τους
- συζητούν παραδείγματα από τις τάξεις τα οποία τα έχουν καταγράψει και να εστιάζουν στη δράση των μαθητών και στις δικές τους διδακτικές ενέργειες.

Μια τέτοια συνεργασία δεν είναι ιδιαίτερα συνηθισμένη στην σχολική πράξη. Για να ενισχυθεί αυτή η προσπάθεια προτείνεται για το επόμενο επιμορφωτικό σεμινάριο η παρακάτω δραστηριότητα. Οι εκπαιδευτικοί ενός σχολείου που διδάσκουν διαφορετικά τμήματα της ίδιας τάξης συνεργάζονται στο σχεδιασμό και τη διδασκαλία μιας θεματικής ενότητας ή μέρους της (2–3 διδακτικές ώρες). Ακολουθούν τους προτεινόμενους "άξονες σχεδιασμού της διδασκαλίας μιας ενότητας" (4η ενότητα Παραρτήματος) και παράγουν φύλλα εργασίας και ότι άλλο υλικό θεωρούν ότι χρειάζεται να δώσουν στους μαθητές. Κάνει ο κάθε ένας τη διδασκαλία στο τμήμα του και, αν είναι εφικτό, οι υπόλοιποι την παρακολουθούν και καταγράφουν την πορεία της. Συνεργάζονται για την αποτίμησή της και καταγράφουν τις πιθανές αλλαγές που κρίνουν σκόπιμες. Στην επόμενη επιμόρφωση κάθε ομάδα παρουσιάζει: τον αρχικό σχεδιασμό, την καταγραφή της διδασκαλίας, την αποτίμηση και τις πιθανές αλλαγές που έκρινε σκόπιμες, τις σκέψεις των εκπαιδευτικών για το σύνολο αυτής της διαδικασίας. Οι παρουσιάσεις θα συζητηθούν μεταξύ των εκπαιδευτικών του τμήματος της επιμόρφωσης.

Είναι σαφές ότι τα παραπάνω δεν είναι εύκολο να επιτευχθούν, ιδιαίτερα στη σημερινή δύσκολη συγκυρία. Για να μπορέσουν οι εκπαιδευτικοί των πιλοτικών σχολείων να ανταποκριθούν στις παραπάνω απαιτήσεις είναι απαραίτητη η υποστήριξη τους σε όλη τη διάρκεια του σχολικού έτους. Η υποστήριξη αυτή προβλέπεται να δίνεται από:

α) Τρία επιμορφωτικά 3ήμερα σεμινάρια.

(1ο Νοέμβριο 2011, 2ο Ιανουάριο – Φεβρουάριο 2012, 3ο Απρίλιο – Μάιο 2012)

β) Την υποστηρικτική ομάδα της πιλοτικής εφαρμογής. Αυτή η ομάδα η οποία θα έχει άμεση και τακτική επικοινωνία όλη τη διάρκεια του σχολικού έτους με ορισμένα από τα σχολεία της πιλοτικής για να υποστηρίζει το έργο τους.

γ) Τους σχολικούς συμβούλους οι οποίοι θα πρέπει να υποστηρίζουν το έργο των εκπαιδευτικών των πιλοτικών σχολείων της περιοχής τους.

δ) Τη λειτουργία του forum **nmcur.upatras.gr** (δεν χρειάζεται να πληκτρολογήσετε στην αρχή www). Αυτό είναι ένα κλειστό forum επικοινωνίας μεταξύ των καθηγητών

Μαθηματικών των πιλοτικών σχολείων, της ομάδας υποστήριξης της πιλοτικής, των σχολικών συμβούλων, των επιμορφωτών των εκπαιδευτικών και της ομάδας ανάπτυξης του προγράμματος σπουδών στα Μαθηματικά. Στο forum αυτό θα ανταλλάσσονται απόψεις και εμπειρίες για συγκεκριμένα θέματα, θα διατυπώνονται από τους εκπαιδευτικούς συγκεκριμένες ερωτήσεις σχετικά με προβλήματα που αντιμετωπίζουν, θα αναρτάται από τους εκπαιδευτικούς διδακτικό υλικό που παρήγαγαν και χρησιμοποίησαν και οτιδήποτε άλλο αφορά στην πιλοτική εφαρμογή του ΠΣ. Αυτή η διαδικασία σκοπεύει στην υποστήριξη των εκπαιδευτικών κατά τη διάρκεια της πιλοτικής εφαρμογής και ιδιαίτερα αυτών που για γεωγραφικούς λόγους δεν θα είναι εύκολη η τακτική άμεση επικοινωνία. Επίσης έχει στόχο τον εντοπισμό συγκεκριμένων προβλημάτων κατά την πιλοτική εφαρμογή του ΠΣ και τον τρόπο αντιμετώπισης τους, την διαμόρφωση αποτελεσματικών διδακτικών πρακτικών, την παραγωγή σε ψηφιακή μορφή διδακτικού υλικού που δοκιμάστηκε στην πράξη. Στο Παράρτημα (4η ενότητα) υπάρχουν οδηγίες για την εγγραφή και τη λειτουργία του forum.

Κεντρικός στόχος όλων των παραπάνω διαδικασιών είναι μια ουσιαστική εφαρμογή, παρακολούθηση και αξιολόγηση του ΠΣ σε όλη τη διάρκεια της πιλοτικής εφαρμογής του. Ειδικότερα για την αξιολόγηση του ΠΣ, εκτός των άλλων, θα δοθούν στους καθηγητές Μαθηματικών των πιλοτικών σχολείων τέσσερα έντυπα αξιολόγησης του ΠΣ. Τα τρία πρώτα στα τρία επιμορφωτικά σεμινάρια και το τέταρτο στο τέλος του σχολικού έτους. Στο Παράρτημα (5η ενότητα) θα βρείτε το 1ο ερωτηματολόγιο.

2. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ-ΟΔΗΓΟΣ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

2.1 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ

Το ΠΣ για τα μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης επιδιώκει την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης δίνοντας έμφαση στα βασικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης όπως της γενίκευσης, της αφαίρεσης, της ακρίβειας και της συντομίας. Παράλληλα επιδιώκεται η ανάπτυξη του μαθηματικού γραμματισμού που αφορά στην ικανότητα του ατόμου να αναλύει, να ερμηνεύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον και στον κόσμο γύρω του, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα μαθηματικά και να αντιλαμβάνεται τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά για τη λήψη αποφάσεων στο κοινωνικό περιβάλλον. Το ΠΣ επιδιώκει κυρίαρχα οι μαθητές να αποκτήσουν την ικανότητα διατύπωσης και επίλυσης προβλημάτων καθώς και να διαμορφώσουν μια θετική στάση για τα μαθηματικά, εκτιμώντας το ρόλο τους στην ανάπτυξη του ανθρώπινου πολιτισμού. Η υλοποίηση των παραπάνω στόχων επιχειρείται να επιτευχθεί μέσα από τέσσερις βασικές διεργασίες: α) του μαθηματικού συλλογισμού και της επιχειρηματολογίας, β) της δημιουργίας συνδέσεων/ δεσμών, γ) της επικοινωνίας μέσω της χρήσης εργαλείων, με βασικότερο τη φυσική γλώσσα, αλλά και τα σύμβολα, τις διάφορες μορφές αναπαράστασης, τα τεχνουργήματα και τα εργαλεία της τεχνολογίας και δ) της μεταγνωστικής ενημερότητας.

Η ομάδα των εμπειρογνωμόνων που ανέπτυξε το ΠΣ υιοθέτησε τις παρακάτω βασικές επιλογές:

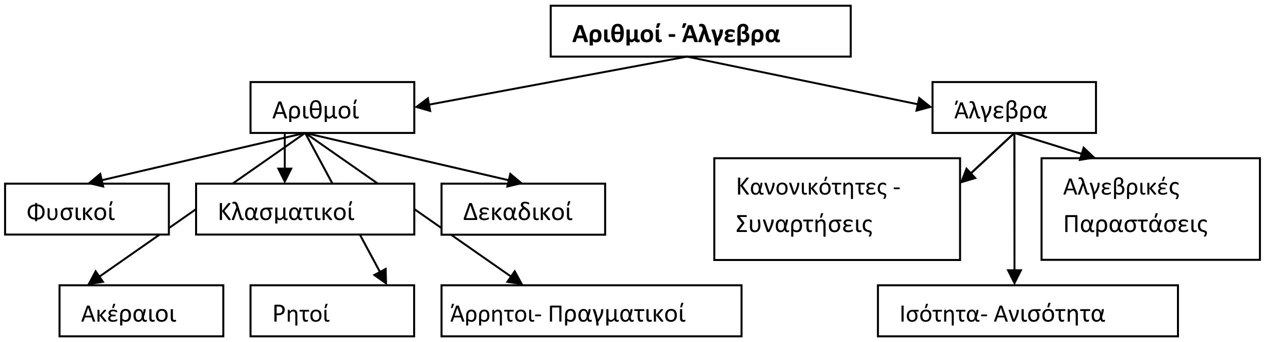
- Ανάπτυξη του περιεχομένου με βάση την έννοια της «τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας» εστιάζοντας στη σύνδεση άτυπης και τυπικής μαθηματικής γνώσης, σε μια προσπάθεια ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης όλων των μαθητών.
- Ανάδειξη της «μαθηματικής δραστηριότητας» ως τη βάση ανάπτυξης των γενικών και ειδικών ικανοτήτων και διεργασιών.
- Εισαγωγή της «συνθετικής εργασίας» ως ένα μέσο οριζόντιας διασύνδεσης των μαθηματικών με άλλα μαθησιακά διδακτικά αντικείμενα.
- Επιλογή και χρήση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων ως μέσων διερεύνησης μαθηματικών ιδεών, ανάπτυξης στρατηγικών μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων.
- Σχεδιασμός της αξιολόγησης δίνοντας έμφαση στο διαμορφωτικό της χαρακτήρα και τη σύνδεσή της με τη διδασκαλίας.

Τα ερευνητικά δεδομένα στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών καθιστούν σαφές ότι οι μαθητές ακολουθούν μια εξελικτική πορεία μάθησης και ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών. Όταν οι εκπαιδευτικοί κατανοούν αυτή την πορεία και τους βασικούς σταθμούς της και οργανώνουν τη δραστηριοποίηση των μαθητών με αναφορά σε αυτήν, μπορούν να δημιουργήσουν περιβάλλοντα μάθησης που να στηρίξουν αποτελεσματικά την επιτυχή μαθητεία του μαθητή στα μαθηματικά. Συνεπώς, είναι εξαιρετικά σημαντική η έννοια της τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας, η οποία περιλαμβάνει τους εκάστοτε στόχους μάθησης, την αφετηρία εκκίνησης, τα διαδοχικά στάδια εξέλιξης και τον τελικό στόχο μάθησης. Μια Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας (ΤΜΔ) αποτυπώνει μια συνολική εικόνα της μαθησιακής εμπειρίας των μαθητών σε μια συγκεκριμένη θεματική του Προγράμματος Σπουδών των μαθηματικών και στοχεύει στη διαφάνεια και στην προσβασιμότητα στην αντίστοιχη εκπαιδευτική τους πορεία. Στην πραγματικότητα, μια τέτοια τροχιά:

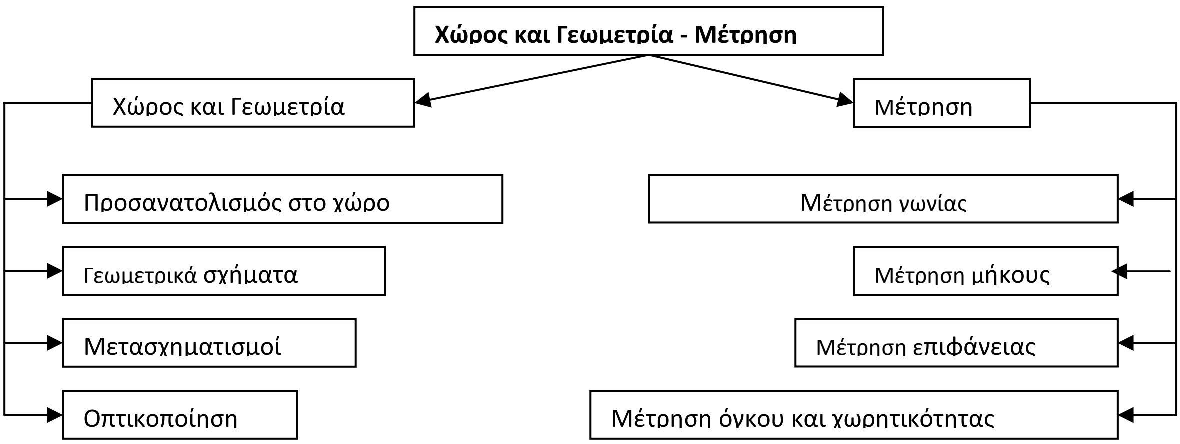
Κάθε ΤΜΔ συναπαρτίζεται από τρία μέρη: ένα *μαθηματικό στόχο* (πρόκειται για συστάδες εννοιών, δεξιοτήτων και ικανοτήτων που είναι μαθηματικά και μαθησιακά θεμελιώδεις), μια *διαδρομή* (επάλληλα, προοδευτικά αναπτυσσόμενα επίπεδα σκέψης που οδηγούν στην επίτευξη του στόχου που τέθηκε), κατά την οποία οι μαθητές αναπτύσσουν τη σκέψη τους για να επιτύχουν το συγκεκριμένο στόχο και ένα σύνολο από *διδακτικές δραστηριότητες,* αντίστοιχες των *επιπέδων σκέψης* που διακρίνονται στη διαδρομή ή τη χαρακτηρίζουν, οι οποίες θα προσφέρουν την κατάλληλη υποστήριξη στους μαθητές για να αναπτύξουν ανώτερα επίπεδα σκέψης. Στο
πρόγραμμα σπουδών (σελ. 10-27) και στον οδηγό του εκπαιδευτικού (σελ. 7-33) θα βρείτε μια πλήρη παρουσίαση των ΤΜΔ. Οι βασικές θεματικές περιοχές όπου αναπτύσσονται τα περιεχόμενα και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα στο νέο ΠΣ είναι τρεις:

- **Αριθμοί – Άλγεβρα**
- **Χώρος και Γεωμετρία – Μετρήσεις**
- **Στοχαστικά Μαθηματικά.**

Στα σχήματα 1, 2 και 3 παρουσιάζονται τα βασικά μαθηματικά περιεχόμενα ανά θεματική περιοχή με βάση τα οποία αναπτύχθηκαν οι τροχιές.

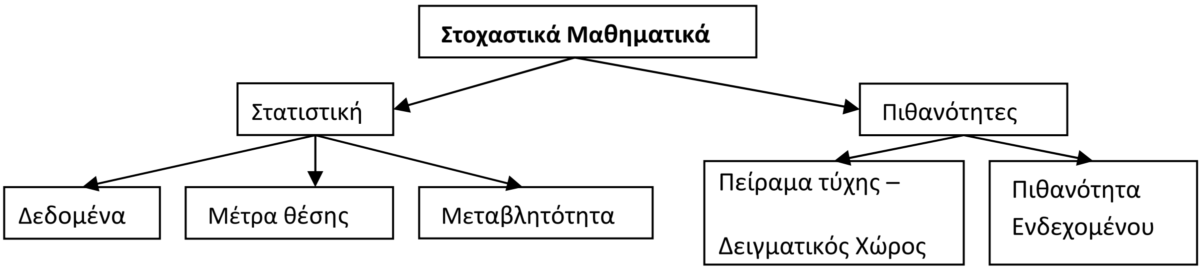


Σχήμα 1. Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα της θεματικής περιοχής



Σχήμα 2. Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα της θεματικής περιοχής

Χώρος και Γεωμετρία- Μέτρηση



Σχήμα 3. Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα της θεματικής περιοχής

Στοχαστικά Μαθηματικά

Ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να μελετήσει τις τροχιές μάθησης και διδασκαλίας των βασικών μαθηματικών θεμάτων ώστε να αναγνωρίζει τη διαφοροποίηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων που αναμένεται να επιτύχει ο μαθητής ανά ηλικιακό κύκλο και να έχει ξεκάθαρο τι επιδιώκει.

Το ΠΣ δίνει έμφαση στην εμπλοκή των μαθητών σε ουσιαστική μαθηματική δραστηριότητα η οποία «προκαλείται» μέσα από το πρόγραμμα σπουδών, καθώς προτείνονται καταστάσεις – προβλήματα που επιτρέπουν στο μαθητή να δράσει με κάποιο κίνητρο ατομικά και συλλογικά και αξιοποιώντας διαφορετικής μορφής εργαλεία να επιτύχει μια σειρά μαθηματικών στόχων και διεργασιών. Το είδος των καταστάσεων που προτείνονται στο ΠΣ αφορούν στη μοντελοποίηση μιας πραγματικής κατάστασης, στην πραγματοποίηση ενός παιχνιδιού, στη μαθηματική διερεύνηση μέσα από τη χρήση εργαλείων και πηγών. Μέσα από αυτές τις διδακτικές καταστάσεις είναι σημαντικό η αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, η εύρεση κανόνων, ο αναστοχασμός πάνω στη δράση και στη γενίκευσή της. Επέκταση των προβλημάτων αυτών αποτελούν οι συνθετικές εργασίες που δίνουν έμφαση σε θέματα συνδέσεων των μαθηματικών τόσο στο πλαίσιο του αναγκαίου μαθηματικού γραμματισμού του μελλοντικού πολίτη στο σύγχρονο κόσμο όσο και στη θεώρηση των μαθηματικών ως πολιτισμικό δημιούργημα της ανθρώπινης ιστορίας. Η *συνθετική εργασία* ορίζεται ως μια δραστηριότητα στην οποία μπορεί να εμπλακούν οι μαθητές κάτω από την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού για ένα σύνολο διδακτικών ωρών και δίνει έμφαση στην ανάδειξη των διασυνδέσεων των μαθηματικών με άλλες επιστήμες και γνωστικές περιοχές και στην παιδαγωγική αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας.

Οι μαθητές χρειάζεται να αποκτήσουν την ικανότητα να χρησιμοποιούν κατάλληλα χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία, και τις κατάλληλες υπολογιστικές στρατηγικές, προκειμένου να εκτελούν συγκεκριμένες μαθηματικές δράσεις, να διερευνούν μαθηματικές ιδέες και να επιλύουν προβλήματα. Κυρίως με τα χειραπτικά υλικά αναπαριστούν μαθηματικές ιδέες και σχέσεις και μοντελοποιούν καταστάσεις χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα υλικά, εικόνες, διαγράμματα (π.χ. αριθμογραμμή), γραφήματα, πίνακες, σύμβολα. Η χρήση αναπαραστάσεων τους βοηθά να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες και σχέσεις, να επικοινωνήσουν τη σκέψη τους, να εκφράσουν επιχειρήματα, και να ερμηνεύσουν πραγματικές καταστάσεις. Η αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών υποστηρίζει την έμφαση που δίνεται στο ΠΣ στην εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες μαθηματικών συλλογισμών και επικοινωνίας. Τα ψηφιακά εργαλεία έκφρασης χρησιμοποιούνται ως βασικό υλικό αναφοράς σε συνθετικές εργασίες και παράλληλα στο πλαίσιο κατανόησης εννοιών, αναπαραστάσεων και των συνδέσεων μεταξύ αναπαραστάσεων.

Σχετικά με την αξιολόγηση έμφαση δίνεται στο διαμορφωτικό της χαρακτήρα ο οποίος έχει ως στόχο να μπορεί ο εκπαιδευτικός να εντοπίζει το βαθμό επίτευξης των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων των μαθητών, να σχεδιάζει τη διδασκαλία του ώστε να αξιοποιεί την παραπάνω γνώση και να βελτιώνει την ποιότητα της παρεχόμενης διδασκαλίας ώστε να έχει επίτευξη των διδακτικών του στόχων. Για να έχει μια πλήρη εικόνα για τον μαθητή ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να χρησιμοποιήσει ποικίλες και διαφορετικές τεχνικές αξιολόγησης. Η ποσοτική αξιολόγηση με τα γραπτά τεστ παρέχει περιορισμένες πληροφορίες σχετικά με το τι μπορεί να κάνει ο μαθητής σε πολύ ειδικές συνθήκες. Οι πληροφορίες από αυτού του είδους την αξιολόγηση δίνουν μια ελλιπή και ίσως αποσπασματική εικόνα σχετικά με τις επιδόσεις των μαθητών. Η χρήση λοιπόν στην τάξη διαφορετικών τεχνικών αξιολόγησης όπως οι ερωτήσεις ανοιχτού τύπου, η επιλογή προκατασκευασμένων απαντήσεων, η αξιολόγηση συνθετικών εργασιών, η συζήτηση, η παρατήρηση, ο φάκελος εργασιών και το ημερολόγιο μπορούν να βοηθήσουν στην προσωπική ανάπτυξη και στην ενδυνάμωση της μαθησιακής διαδρομής προς την επίτευξη των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων.

2.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΗΣ ΔΟΜΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΥ ΟΔΗΓΟΥ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

Ο οδηγός του εκπαιδευτικού δεν αντικαθιστά το ΠΣ αλλά λειτουργεί συμπληρωματικά με το αυτό, με στόχο να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό δίνοντας έμφαση στο σχεδιασμό, την εφαρμογή και την αξιολόγηση της διδασκαλίας. Ειδικότερα, να τον βοηθήσει στο σχεδιασμό και στη διδακτική διαχείριση συγκεκριμένων των ενοτήτων του ΠΣ, στην παρακολούθηση της μαθηματικής ανάπτυξης των μαθητών και των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων σε σύνδεση με τις προηγούμενες και επόμενες τάξεις καθώς και στην αξιολόγηση της διδασκαλίας.

Ο οδηγός σπουδών χωρίζεται σε δύο μέρη, στο γενικό και στο ειδικό.

Το γενικό μέρος περιλαμβάνει τρεις ενότητες. Η πρώτη ενότητα αφορά στις βασικές αρχές μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών. Στην ενότητα αυτή αναφέρονται οι γενικοί στόχοι της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην υποχρεωτική εκπαίδευση καθώς και οι διεργασίες που θα βοηθήσουν στην υλοποίηση αυτών των στόχων. Επίσης αναλύονται τα κύρια εργαλεία που υποστηρίζουν σύμφωνα με το ΠΣ τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών, δηλαδή οι δραστηριότητες, τα χειραπτικά υλικά, τα ψηφιακά υλικά και οι συνθετικές εργασίες. Η δεύτερη ενότητα αφορά στη δομή του μαθηματικού περιεχομένου σύμφωνα με τις τροχιές. Στην ενότητα αυτή αναλύονται οι τροχιές των τριών θεματικών ενοτήτων (Άλγεβρα - Αριθμοί, Χώρος-Γεωμετρία-Μέτρηση, Στοχαστικά Μαθηματικά) και παρουσιάζεται η εξέλιξη τους, καθώς και οι σημαντικοί σταθμοί αυτής της εξέλιξης. Επίσης, περιγράφονται εν συντομία τα βασικά στοιχεία της τροχιάς σε κάθε ηλικιακό κύκλο. Α΄ κύκλος (νηπιαγωγείο, Α΄ και Β΄ δημοτικού), Β΄ κύκλος (Γ΄, Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ δημοτικού) και Γ΄ κύκλος (Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου). Η τρίτη ενότητα αφορά στην αξιολόγηση και στα εργαλεία αξιολόγησης. Στην ενότητα αυτή διακρίνονται τρία επίπεδα αξιολόγησης. Το πρώτο αφορά στον μαθητή και στην επίτευξη συγκεκριμένων προσδοκώμενων μαθησιακών στόχων, το δεύτερο στην αξιολόγηση της διδακτικής πορείας και το τρίτο στην εξέλιξη της διδακτικής τροχιάς και ιδιαίτερα στην μετάβαση από ένα κύκλο στον επόμενο. Για το κάθε επίπεδο προτείνονται συγκεκριμένα εργαλείο αξιολόγησης.

Το ειδικό μέρος είναι δομημένο κατά θεματική ενότητα και βασικά θέματα. Για παράδειγμα στη θεματική ενότητα Αριθμοί-Άλγεβρα ένα βασικό θέμα είναι οι πραγματικοί αριθμοί. Ο οδηγός παρουσιάζει ενιαία αυτό το βασικό θέμα στις τρεις τάξεις του γυμνασίου. Συγκεκριμένα, παρουσιάζει:

- Την κατανομή του θέματος (πραγματικοί αριθμοί) στις τάξεις του Γυμνασίου.
- Τη σημασία του θέματος.
- Την προηγούμενη γνώση των μαθητών από το δημοτικό σχετικά με αυτό το θέμα και πως θα εξελιχθεί αυτή σε κάθε τάξη του γυμνασίου.
- Τις δυσκολίες που αναμένεται να συναντήσουν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία αυτού του θέματος.
- Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση.
- Ενδεικτικές δραστηριότητες και ιδέες για η διδακτική τους διαχείριση.

Ο οδηγός του εκπαιδευτικού δεν αντικαθιστά το ΠΣ αλλά λειτουργεί συμπληρωματικά με το αυτό και δίνει έμφαση στο σχεδιασμό, την εφαρμογή και την αξιολόγηση της διδασκαλίας.

2.3 ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ.

1. Τόσο στο ΠΣ όσο και στον οδηγό του εκπαιδευτικού, εμφανίζονται πολλές προτεινόμενες δραστηριότητες και γίνεται συνεχής αναφορά σε αυτές. Γιατί υπάρχει αυτή η έμφαση στις δραστηριότητες; Τι διαφορά έχουν από τις ασκήσεις που τόσα χρόνια χρησιμοποιούμε στην τάξη;

Η δραστηριότητα στην τάξη των μαθηματικών χαρακτηρίζεται από την ενεργή δράση των μαθητών πάνω σε ένα έργο (πρόβλημα ή άσκηση). Τέτοιου είδους δραστηριότητα επιδιώκεται από το ΠΣ να προκληθεί, προτείνοντας καταστάσεις – προβλήματα που επιτρέπουν στο μαθητή να δράσει με κάποιο κίνητρο ατομικά και συλλογικά. Ο στόχος των καταστάσεων αυτών είναι η εμπλοκή των μαθητών στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, στην απόκτηση και χρήση τεχνικών με ευελιξία, στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος, στη δημιουργία εννοιολογικών συνδέσεων, στη σύνδεση αναπαραστάσεων, στην ανάπτυξη μαθηματικού συλλογισμού καθώς και θετικής στάσης για τα μαθηματικά.

Γίνεται έτσι σαφές ότι βασικό στοιχείο μιας δραστηριότητας είναι η δράση των ίδιων των μαθητών και όχι η επίλυση του προβλήματος ή η παρουσίαση του μαθηματικού μοντέλου απευθείας από τον εκπαιδευτικό, αφού μια τέτοια πρακτική καταστρατηγεί την αρχή της ανακάλυψής από τους μαθητές και μετατρέπει τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών απλώς στην επίλυση μιας άσκησης. Η συνεργασία των μαθητών στην τάξη, η συζήτηση τόσο στο πλαίσιο μικρών ομάδων όσο και σε ολόκληρη την τάξη επιτρέπει στους μαθητές να διατυπώσουν, να επεξηγήσουν και να τεκμηριώσουν τις σκέψεις τους. Ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να επιλέγει ή να σχεδιάζει ενδιαφέρουσες (για τους μαθητές) δραστηριότητες που οδηγούν σε σημαντικές μαθηματικές έννοιες, σχέσεις και ιδιότητες. Μέσα στην τάξη χρειάζεται να συντονίζει τη συζήτηση και να διασφαλίζει την εστίασή της, να υποστηρίζει τους μαθητές να κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες που αναδεικνύονται σ' αυτή και να μην περιορίζεται στη συνεχή εξάσκηση.

Πολλές από τις "ασκήσεις που τόσα χρόνια χρησιμοποιούμε στην τάξη" μπορούν να διαμορφωθούν στην κατεύθυνση που περιγράφεται παραπάνω. Η διδασκαλία των Μαθηματικών που ακολουθεί το μοντέλο "παρουσίαση από τον εκπαιδευτικό – εξάσκηση από τους μαθητές" αποτρέπει τους μαθητές από μια ουσιαστική μαθηματική εμπλοκή. (επίσης βλέπε ΠΣ σελ 6–9, 27, Οδηγός σελ. 4–5)

2. Μέσα από μια δραστηριότητα, όπως οι περισσότερες που προτείνονται από το ΠΣ, "χάνεται" η μαθηματική απόδειξη. Και έτσι χάνεται ένα θεμελιώδες χαρακτηριστικό των μαθηματικών. Ποια είναι η θέση του ΠΣ σχετικά με την παραπάνω άποψη;

Η απόδειξη είναι θεμελιώδες συστατικό των Μαθηματικών και έχει μοναδικά χαρακτηριστικά. Έτσι, η μύηση των μαθητών στην έννοια και τις διαδικασίες της απόδειξης πρέπει να αποτελεί μακροπρόθεσμο στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Σε αυτή την πορεία, πρέπει να αναδεικνύεται η ανάγκη ύπαρξης της απόδειξης ως τεκμηρίωση μια εικασίας, δηλαδή πρέπει να έχει προηγηθεί η διερεύνηση και η διατύπωση εικασιών. Επιπλέον, απόδειξη δεν είναι μόνο η τυπική απόδειξη σαν αυτές που θα συναντήσει ο μαθητής στο Λύκειο. Η έννοια της απόδειξης ως τεκμηρίωση ξεκινά με τη γενίκευση των παρατηρήσεων, τη διατύπωση επιχειρημάτων, την άρθρωσή τους σε ενιαίο συλλογισμό. Ο μαθητής δεν μπορεί παρά να περάσει από όλα αυτά τα επίπεδα μέχρι να αρχίσει να κατανοεί και να μπορεί να διατυπώνει πιο τυπικές αποδείξεις. Αλλιώς, θα αντιμετωπίζει τις μαθηματικές αποδείξεις ως κάποια ιεροτελεστία χωρίς νόημα για τον ίδιο.

Για παράδειγμα, τι νόημα θα είχε για το μαθητή, στην αρχή της Α΄ Γυμνασίου, να ακούσει μια απόδειξη για το "αν δοθούν οι φυσικοί Δ και δ (με δ>0) υπάρχουν μοναδικοί π και υ τέτοιοι, ώστε Δ=δ·π+υ"; Εκτός του ότι δεν έχει το μαθηματικό υπόβαθρο για μια τέτοια απόδειξη, αυτή η πρόταση δεν χρειάζεται απόδειξη (κατά το μαθητή) αφού την ευκλείδεια διαίρεση την "κάνει" με επιτυχία εδώ και μερικά χρόνια και η διαδικασία της δεν αφήνει περιθώρια μη ύπαρξης ή μη μοναδικότητας των π και υ. Αντίθετα, μπορεί να έχει νόημα μια επιχειρηματολογία για το γιατί "το ΕΚΠ είναι το γινόμενο όλων των πρώτων παραγόντων, όπου ο καθένας λαμβάνεται στη μεγαλύτερη δύναμή του".

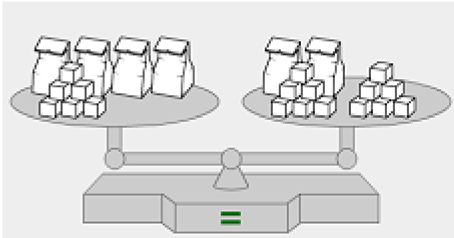
Στο νέο ΠΣ δίνεται έμφαση στις μαθηματικές διεργασίες, η ανάπτυξη των οποίων επιδιώκεται μέσα από τη δραστηριότητα των μαθητών. Μία από αυτές είναι ο μαθηματικός συλλογισμός που εμπεριέχει την επιχειρηματολογία και (όπου είναι δυνατόν) την απόδειξη. Ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να ενθαρρύνει τη διατύπωση επιχειρημάτων από τους μαθητές και την κριτική εξέτασή τους από τους υπόλοιπους μαθητές, να επιλέγει τις ερωτήσεις που θα κάνουν τους μαθητές να σκεφτούν σχετικά με θέματα που ως τότε θεωρούσαν προφανή. Έτσι, όχι μόνο δεν "χάνεται" η μαθηματική απόδειξη, αλλά προετοιμάζεται το έδαφος για την καλύτερη κατανόηση του ρόλου και του περιεχομένου της. (επίσης βλέπε ΠΣ σελ 6–8)

3. Από τις προτεινόμενες δραστηριότητες του ΠΣ φαίνεται μια έμφαση στην εννοιολογική προσέγγιση και υποβαθμίζεται η διαδικαστική. Αλλά τα μαθηματικά είναι και διαδικασίες. Για παράδειγμα, πώς είναι δυνατόν να μάθει ο μαθητής να λύνει εξισώσεις χωρίς να ξέρει την αλγοριθμική διαδικασία "κάνω απαλοιφή παρονομαστών, …, χωρίζω γνωστούς από αγνώστους, κλπ";

Πράγματι, τα μαθηματικά είναι και διαδικασίες. Αλλά δεν είναι διαδικασίες χωρίς νόημα. Δεν είναι αποστήθιση κανόνων και αλγορίθμων χωρίς κατανόηση του "γιατί" και εφαρμογή τους χωρίς κατανόηση των εννοιών και των σχέσεων. Το ΠΣ στηρίζεται στην παραδοχή ότι τα μαθηματικά (ως σχολικό αντικείμενο μάθησης) είναι έννοιες, ιδιότητες, λογικές σχέσεις, δομές και διαδικασίες διασυνδεδεμένες μεταξύ τους σε ένα ενιαίο δίκτυο. Είναι επίλυση προβλήματος από την οποία αναδεικνύεται η ανάγκη ύπαρξης αυτού του δικτύου και στην οποία εφαρμόζονται οι γνώσεις. Έτσι, η δραστηριότητα των μαθητών δεν μπορεί να περιορίζεται στην απλή εκτέλεση διαδικασιών και η γνώση τους να σταματά στο "πώς" χωρίς το "γιατί".

Για παράδειγμα, οι αλγόριθμοι επίλυσης εξίσωσης είναι χρήσιμοι και μέσα σε αυτούς και ο κανόνας "όταν αλλάζουμε μέλος, αλλάζουμε και πρόσημο". Ο μαθητής όμως πρέπει να ξέρει πως προκύπτει αυτός ο κανόνας. Για το σκοπό αυτό πρέπει να έχει περάσει κάποιο χρόνο προσθέτοντας ή αφαιρώντας από τα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό, χωρίς χρήση του κανόνα. Επιπλέον, θα πρέπει να κατανοεί την έννοια της εξίσωσης και της λύσης της και για το σκοπό αυτό χρειάζεται να μοντελοποιήσει προβλήματα με εξίσωση, να αξιοποιήσει αναπαραστασιακά μοντέλα (όπως το μοντέλο της ζυγαριάς), να έχει χρησιμοποιήσει κι άλλες μεθόδους επίλυσης (δοκιμή–λάθος–βελτίωση, αντίστροφες πράξεις), να κάνει συνδέσεις με άλλες θεματικές περιοχές (συναρτήσεις, γεωμετρία κλπ). Φαίνεται λοιπόν ότι η κατανόηση της έννοιας της εξίσωσης και της επίλυσής της απαιτεί χρόνο που απλώνεται σε περισσότερες από μια τάξη και δεν μπορεί να αναμένεται να επιτευχθεί μέσα σε 5 ή 10 διδακτικές ώρες με την αποστήθιση αλγορίθμων. (επίσης βλέπε ΠΣ σελ 4–9, Οδηγός σελ. 75–80)

4. Φαίνεται να υπάρχει μια προσπάθεια αξιοποίησης της "μη μαθηματικής" γνώσης των μαθητών για την οικοδόμηση της μαθηματικής. Πώς μπορεί να επιτευχθεί αυτό;



Ο μαθητής που έρχεται από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο, έχει εμπειρίες τόσο από την καθημερινή, όσο και από τη σχολική ζωή. Πολλές από αυτές είναι "άτυπη γνώση", δηλαδή γνώση που δεν έχει διδαχθεί στο σχολείο καθόλου, ή έχει διδαχθεί κάτι διαφορετικό, παραπλήσιο. Για παράδειγμα, πολλοί μαθητές μπορούν να "διαβάσουν" στατιστικά διαγράμματα, να βρουν τον επόμενο όρο μιας απλής ακολουθίας, να σχεδιάσουν ένα ισοσκελές τρίγωνο κοκ. Αυτή η γνώση μπορεί να αξιοποιηθεί στην προσπάθεια οικοδόμησης της "τυπικής" (σχολικής) μαθηματικής γνώσης. Για παράδειγμα, αν δοθεί η διπλανή εικόνα της ζυγαριάς που ισορροπεί, με κάθε κύβο να ζυγίζει 50 γρ., οι περισσότεροι μαθητές μπορούν (αν έχουν χρόνο) να βρουν πόσο ζυγίζει κάθε σακουλάκι, αφαιρώντας νοητά τα ίδια βάρη από κάθε δίσκο. Αυτό, με κατάλληλους χειρισμούς, μπορεί να οδηγήσει τόσο στην έννοια της εξίσωσης, όσο και σε μια ιδέα επίλυσής της πολύ κοντά στη μαθηματική διαδικασία της ίδιας πράξης και στα δύο μέλη.

Η αξιοποίηση της άτυπης γνώσης και το πέρασμα στην τυπική δεν είναι πάντα εύκολη διαδικασία. Συχνά υπάρχουν περιορισμοί που πρέπει να ξεπεραστούν (πχ. στο παράδειγμα με τη ζυγαριά, δεν υπάρχουν αρνητικά βάρη, αλλά σε μια εξίσωση μπορεί να έχουμε αρνητικούς αριθμούς). Κατά το πέρασμα από την άτυπη στην τυπική γνώση, αυτοί οι περιορισμοί μπορεί να μετεξελιχθούν σε παρανοήσεις. Για παράδειγμα, η παρανόηση ότι ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει το αποτέλεσμα στηρίζεται στη γνώση του πολλαπλασιασμού μεταξύ φυσικών, και η σύγχυση μεταξύ των όρων "τετράγωνο", "ρόμβος", "ορθογώνιο" οφείλεται στο νόημα των λέξεων στην καθημερινή ζωή. Αυτές οι δυσκολίες δεν πρέπει να αποτρέπουν από την αξιοποίηση της άτυπης γνώσης, αλλά να λαμβάνονται υπόψη κατά το σχεδιασμό μιας διδασκαλίας που στηρίζεται στις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης τους.

5. Για ποιο λόγο υπάρχει μια τόσο μεγάλη αύξηση του περιεχομένου που αναφέρεται στη στατιστική και τις πιθανότητες;

Καθημερινά οι άνθρωποι βομβαρδίζονται με διάφορες δημοσκοπήσεις, παρουσιάσεις στατιστικών διαγραμμάτων στον τύπο, αναφορές στην έννοια του «μέσου ανθρώπου», ενώ κάποιοι παίρνουν αποφάσεις βασιζόμενοι σε μελέτες που στηρίζονται στη στατιστική και στις πιθανότητες, όπως οι γιατροί. Ένα σύγχρονο πρόγραμμα σπουδών πρέπει να παρέχει την δυνατότητα στους μαθητές , αυριανούς πολίτες, να κατανοούν τις βασικές έννοιες και τις διαδικασίες της Στατιστικής, ώστε να είναι σε θέση να κατανοούν και να ελέγχουν κριτικά τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται, τις ερμηνείες και τα συμπεράσματα που εξάγονται με βάση διάφορες στατιστικές μελέτες. Επιπλέον, με τη διδασκαλία των στοχαστικών μαθηματικών επιδιώκεται η ανάπτυξη της μη ντετερμινιστικής (αιτιοκρατικής) σκέψης. Παράλληλα στόχος είναι η ανάπτυξη των απαραίτητων μαθηματικών εργαλείων που θα συμβάλλουν στα παραπάνω. Τέλος, τα στοχαστικά μαθηματικά προσφέρονται ώστε οι μαθητές να έλθουν σε επαφή με εφαρμογές των μαθηματικών και μέσα από αυτές να δουν τη σημασία και το ρόλο τους στην οργάνωση και ανάπτυξη της κοινωνίας. Αυτό μπορεί να συντελέσει στην αλλαγή της στάσης τους και των πεποιθήσεων τους απέναντι στα μαθηματικά. (επίσης βλέπε ΠΣ σελ 24, Οδηγός σελ. 30, 120)

6. Για ποιο λόγο εισάγονται οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί;

Με τους μετασχηματισμούς βασικές έννοιες της γεωμετρίας όπως η ισότητα και η ομοιότητα των γεωμετρικών σχημάτων, εντάσσονται σε ένα ευρύτερο εννοιολογικό πλαίσιο. Οι ισομετρίες (μεταφορά, στροφή, ανάκλαση) και η ομοιοθεσία δείχνουν ότι η ισότητα και η ομοιότητα υπακούουν σε συγκεκριμένες ιδιότητες των μετασχηματισμών (διατήρηση γωνιών και αποστάσεων, διατήρηση γωνιών και λόγων αποστάσεων αντίστοιχα) και δεν εξαρτώνται από την θέση ή τον προσανατολισμό των σχημάτων. Αυτό που επιδιώκεται είναι να αποκτήσουν οι μαθητές, μέσω των μετασχηματισμών, μια ευελιξία στον τρόπο της γεωμετρικής τους σκέψης και να τους χρησιμοποιούν ως εργαλείο για τη μελέτη και αιτιολόγηση ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων. (επίσης βλέπε ΠΣ σελ 22, Οδηγός σελ. 24–25, 94–97)

7. Γιατί δεν υπάρχουν τα κεφάλαια των φυσικών, κλασμάτων και δεκαδικών στην Α΄ Γυμνασίου που υπήρχαν μέχρι τώρα, ως επανάληψη βασικών γνώσεων των πράξεων;

Υπάρχουν ερευνητικά δεδομένα που δείχνουν ότι μια επανάληψη στην Α΄ Γυμνασίου των πράξεων, οι οποίες έχουν διαπραγματευθεί για αρκετό χρόνο στο Δημοτικό, δεν οδηγεί σε βελτίωση τους μαθητές που έχουν κάποιες δυσκολίες, ενώ κάνει βαρετό το μάθημα στους μαθητές που έχουν κατακτήσει τις πράξεις. Επιπλέον, χάνεται πολύτιμος χρόνος, ο οποίος με το νέο ΠΣ επιχειρείται να αξιοποιηθεί σε άλλες θεματικές ενότητες όπως οι ακέραιοι και οι ρητοί αριθμοί, οι κανονικότητες, οι εξισώσεις. Στο πλαίσιο αυτών των ενοτήτων και μέσω προβλημάτων μπορεί να γίνεται κάποια επανάληψη στις πράξεις, τις ιδιότητές τους, τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων κλπ. (επίσης βλέπε ΠΣ σελ 35–38, Οδηγός σελ. 54–58)

8. Για ποιο λόγο εισάγονται οι κανονικότητες (μοτίβα); Τι ενδιαφέρον έχουν όσον αφορά στη μάθηση των μαθηματικών;

Ένα θεμελιώδες χαρακτηριστικό των μαθηματικών, ως επιστημονικό πεδίο αλλά και ως μαθησιακό αντικείμενο, είναι η αναζήτηση κανονικοτήτων, δηλαδή νόμων και κανόνων που διέπουν ομάδες αντικειμένων (και ιδιαίτερα μαθηματικών αντικειμένων). Μορφές τέτοιων κανονικοτήτων είναι τα γεωμετρικά μοτίβα (που σε μεγάλο βαθμό συζητούνται στο δημοτικό) και οι αριθμητικές ακολουθίες (που περιλαμβάνονται τόσο στο δημοτικό όσο και στο γυμνάσιο, ως αριθμητικές κανονικότητες). Η ενασχόληση των μαθητών με τα θέματα αυτά κρίνεται ότι μπορεί να συμβάλλει στην ανάπτυξη και τον έλεγχο εικασιών (πχ με ποιον τρόπο από κάποιον όρο μπορώ να βρω τον επόμενο; ποιος κανόνας "παράγει" αυτή την ακολουθία αριθμών; πως θα βρω τον νιοστό όρο; κλπ), στη διαδικασία της γενίκευσης και γενικότερα μπορεί να είναι προετοιμασία για το πέρασμα στην αλγεβρική παράσταση και στη συνάρτηση. Επιπλέον, οι κανονικότητες είναι ένα εργαλείο, με χρήση τόσο σε πραγματικές ή ρεαλιστικές καταστάσεις όσο και σε μαθηματικά προβλήματα. (επίσης βλέπε ΠΣ σελ 17–18, Οδηγός σελ. 19–21, 63–64)

9. Σε πολλές περιπτώσεις, κάποιες θεματικές ενότητες συνδέονται με κάποιες άλλες. Για παράδειγμα, οι εξισώσεις συνδέονται με τις συναρτήσεις, οι αλγεβρικές παραστάσεις με τα εμβαδά, κοκ. Για ποιο λόγο υπάρχει η συστηματική επιδίωξη αυτού του είδους των συνδέσεων;

Μια επιλογή του ΠΣ είναι η δημιουργία συνδέσεων δύο ειδών. Πρώτον, συνδέσεις των μαθηματικών με άλλες επιστήμες (πχ φυσική) και την καθημερινή ζωή (πχ περιβάλλον, οικονομικά και κοινωνικά θέματα). Δεύτερον, συνδέσεις ενδο–μαθηματικές, δηλαδή μεταξύ διαφορετικών ενοτήτων μέσα στα μαθηματικά (πχ. εξισώσεις με συναρτήσεις, αλγεβρικές παραστάσεις με εμβαδά, διανύσματα με μετασχηματισμούς, μετασχηματισμοί με ισότητα κλπ).

Μέσα από αυτές τις συνδέσεις, οι μαθητές: α) αποδίδουν νόημα σε αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα (όπως πχ την αλγεβρική παράσταση), β) έχουν ευκαιρίες εννοιολογικής κατανόησης όταν συνειδητοποιούν τις σχέσεις μεταξύ εννοιών και διαδικασιών, γ) αντιλαμβάνονται την χρησιμότητα των μαθηματικών στην επίλυση προβλημάτων άλλων επιστημών και της καθημερινής ζωής, δ) μπορεί να αποκτούν καλύτερες στάσεις απέναντι στα μαθηματικά.

Ειδικότερα, η σύνδεση των εξισώσεων με τις συναρτήσεις αναμένεται να συμβάλλει στην κατανόηση της έννοιας της εξίσωσης και της λύσης της, στη διάκριση των εννοιών (εξίσωσης και συνάρτησης), στη δημιουργία αναπαραστάσεων σχετικών με την εξίσωση (σημείο τομής δύο γραμμών). Επιπλέον, αυτή η σύνδεση είναι συμβατή με την πιο γενική μαθηματική θεώρηση των εξισώσεων ως ισότητας των τιμών δύο συναρτήσεων.

Ως επιπλέον παραδείγματα συνδέσεων (ενδο– ή εξω– μαθηματικών) μπορούν να αναφερθούν τα παρακάτω:

τα διανύσματα εισάγονται (ως σημαντικό στοιχείο της τροχιάς "διευθύνσεις και διαδρομές") και συνδέονται με τους μετασχηματισμούς (και ιδιαίτερα με τη μετατόπιση) και με έννοιες της φυσικής (δύναμη, ταχύτητα),

οι αλγεβρικές παραστάσεις και ο χειρισμός τους αποκτούν νόημα μέσω της μέτρησης (πχ. γεωμετρική ερμηνεία επιμεριστικής ιδιότητας και ταυτοτήτων) και της μοντελοποίησης καταστάσεων και προβλημάτων,

η ισότητα τριγώνων συνδέεται με τους μετασχηματισμούς, αναδεικνύοντας την ισότητα σχημάτων ως ιδιότητα ανεξάρτητη από τον προσανατολισμό του σχήματος. (επίσης βλέπε ΠΣ σελ 8)

10. Για ποιο λόγο εισάγονται ξανά τα διανύσματα ενώ είχαν αφαιρεθεί από τη διδακτέα ύλη τα έτη 2010–'11 και '11–'12;

Τα διανύσματα εισάγονται ως ουσιαστικό μέρος της τροχιάς "θέσεις, διευθύνσεις, διαδρομές σε χάρτες" που διατρέχει όλη την υποχρεωτική εκπαίδευση από το Νηπιαγωγείο μέχρι το Γυμνάσιο και έχει ως στόχο την ανάπτυξη εννοιών και διαδικασιών σχετικά με τον προσανατολισμό στο χώρο. Επίσης συνδέονται και χρησιμοποιούνται στην τροχιά "μετασχηματισμοί" (ιδιαίτερα στη μετατόπιση ή μεταφορά). Έτσι, τα διανύσματα εντάσσονται σε ένα ευρύτερο πλαίσιο και δεν αποτελούν ένα αποκομμένο τμήμα ανάμεσα στα υπόλοιπα. Η διδασκαλία των διανυσμάτων προσανατολίζεται σε περισσότερο εννοιολογικούς στόχους (σύγκριση – διάκριση με το ευθύγραμμο τμήμα, σχέση με έννοιες προσανατολισμού και μεταφοράς) και όχι με στόχους αλγοριθμικούς (πράξεις διανυσμάτων). Η σύνδεση με έννοιες και μεγέθη της φυσικής πραγματοποιείται για να ενισχύσει αυτόν τον προσανατολισμό και όχι για να υπηρετήσει τις αλγοριθμικές ανάγκες της φυσικής (οι οποίες εξάλλου, είναι ελάχιστες στο επίπεδο της υποχρεωτικής εκπαίδευσης). (επίσης βλέπε ΠΣ σελ 22, Οδηγός σελ. 92–94)

11. Η χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας φαίνεται να έχει έναν κεντρικό ρόλο στο νέο ΠΣ. Τι διαφορετικό ή καλύτερο προσφέρουν τα ψηφιακά εργαλεία σε σύγκριση με τα παραδοσιακά εργαλεία (πχ. χαρτί και μολύβι, γεωμετρικά όργανα κλπ);

Το νέο ΠΣ προτείνει τη χρήση όλων των εργαλείων: χειραπτικών (χαρτί και ψαλίδι, γεωμετρικά όργανα κλπ), αναπαραστασιακών (αριθμογραμμή, μοντέλο της ζυγαριάς κλπ) και ψηφιακών (έτοιμες εφαρμογές – applets, δραστηριότητες μέσω σχεδιασμένων μικροπειραμάτων κλπ). Τα εργαλεία αυτά επιτρέπουν στους μαθητές να πειραματιστούν, να κάνουν εικασίες, να ανακαλύψουν μαθηματικές έννοιες και ιδιότητες και συχνά να εντοπίσουν ακόμα και βασικές ιδέες που θα τους οδηγήσουν στην τεκμηρίωση των εικασιών τους με μαθηματική επιχειρηματολογία. Το κάθε εργαλείο όμως έχει δυνατότητες και περιορισμούς στην προσομοίωση μαθηματικών εννοιών, ιδιοτήτων και διαδικασιών. Για παράδειγμα, η κατασκευή του ύψους ενός τριγώνου με γνώμονα αναδεικνύει την καθετότητα στην απέναντι πλευρά, ενώ η χρήση ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να αναδείξει τις διαφορετικές θέσεις του ύψους όταν για παράδειγμα μετακινείται η κορυφή παράλληλα στην πλευρά η οποία διατηρείται σταθερή (και το ύψος μπορεί να ταυτιστεί με μια πλευρά ή να βρίσκεται έξω από το τρίγωνο). Ομοίως, η χρήση λογισμικού για τη χάραξη της γραφικής παράστασης της ευθείας $y=\alpha x+\beta$ μπορεί να αναδείξει το ρόλο των παραμέτρων α και β, αφού εύκολα ο μαθητής μπορεί να αλλάζει τις τιμές τους και να παρατηρεί τις αλλαγές στην ευθεία. (επίσης βλέπε ΠΣ σελ 26–27, Οδηγός σελ. 5–7, 88–89)

12. Δηλαδή προτείνεται η μείωση της χρήσης των παραδοσιακών εργαλείων; Για παράδειγμα υπάρχει η επιδίωξη των γεωμετρικών κατασκευών με κανόνα και διαβήτη;

Όχι, δεν προτείνεται η μείωση της χρήσης των παραδοσιακών εργαλείων. Οι μαθητές αναμένεται να χρησιμοποιούν όργανα μέτρησης (χάρακας, μοιρογνωμόνιο), χαρτί και ψαλίδι, κανόνα και διαβήτη, αναπαραστασιακά εργαλεία (ευθεία των αριθμών, μοντέλο της ζυγαριάς για την εξίσωση). Αλλά παράλληλα με αυτά, υπάρχουν κι άλλα εργαλεία που μπορούν να χρησιμοποιηθούν αναδεικνύοντας διαφορετικά χαρακτηριστικά και μαθηματικές ιδιότητες. Για παράδειγμα, η χρήση των θετικών και αρνητικών μετρητών (algebra tiles) μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αποδώσουν νόημα στην πρόσθεση και την αφαίρεση ακεραίων.

Ειδικότερα, η χρήση κανόνα και διαβήτη στις γεωμετρικές κατασκευές απαιτεί κατανόηση σχέσεων και ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων και για το λόγο αυτό δεν μπορεί να προταθεί ως γενικός και μοναδικός τρόπος γεωμετρικών κατασκευών. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέξει (ανάλογα με την τάξη) σε ποιες κατασκευές θα χρησιμοποιηθεί ο κανόνας και ο διαβήτης, σε ποιες άλλα εργαλεία (όργανα μέτρησης, δίπλωση ή περιστροφή του χαρτιού, διαφανές χαρτί) και σε ποιες μπορούν να χρησιμοποιηθούν παράλληλα και οι δύο τρόποι. Το κριτήριο είναι οι ιδιότητες και σχέσεις που επιδιώκεται να αναδειχθούν.

13. Στις πρώτες χρονιές εφαρμογής του νέου ΠΣ θα υπάρχει πρόβλημα με εκείνες τις ενότητες που στηρίζονται σε γνώσεις από προηγούμενες τάξεις, τις οποίες όμως οι μαθητές δεν θα έχουν, επειδή τα προηγούμενα χρόνια εφαρμοζόταν το προηγούμενο ΠΣ. Πως μπορεί να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα;

Αυτό το πρόβλημα σχετίζεται με προηγούμενη γνώση – εμπειρίες που προβλέπονται από το ΠΣ είτε στο Δημοτικό, είτε σε προηγούμενες τάξεις του Γυμνασίου και η κατάσταση μπορεί να εξομαλυνθεί μόνο μετά από 2–3 χρόνια εφαρμογής του νέου ΠΣ. Εντοπίζεται κυρίως στα στοχαστικά μαθηματικά (σε όλες τις τάξεις του Γυμνασίου) και στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς (στην Γ΄ Γυμνασίου). Σε πολύ μικρότερο βαθμό υπάρχει σε άλλες ενότητες (ακέραιοι και κανονικότητες στην Α΄, αλγεβρικές παραστάσεις και εξισώσεις στη Β΄, κλπ). Ένας τρόπος αντιμετώπισής του είναι να επιλεγούν κάποιες δραστηριότητες που αντιστοιχούν στην προηγούμενη γνώση και να αφιερωθούν λίγες διδακτικές ώρες για την διαπραγμάτευσή τους από τους μαθητές στην τάξη. Για παράδειγμα, για τους μετασχηματισμούς στη Γ΄ Γυμνασίου θα μπορούσαν να επιλεγούν δραστηριότητες της Β΄ από το ΠΣ και τον οδηγό, και να αφιερωθούν 3 διδακτικές ώρες για τη διδασκαλία της μεταφοράς, της στροφής (και της κεντρικής συμμετρίας) και της ανάκλασης και τη μελέτη κάποιων ιδιοτήτων που σχετίζονται με τη διατήρηση των μηκών και των μέτρων (πχ. ιδιότητες ισότητας σε ισοσκελή τρίγωνα και παραλληλόγραμμο).

14. Σε κάποιες από τις ενότητες του νέου ΠΣ δεν υπάρχει αντίστοιχο υλικό στο σχολικό βιβλίο. Πώς μπορεί να παραχθεί κάποιο υλικό για τη διδασκαλία τους σε αυτή τη φάση;

Και αυτό το πρόβλημα εντοπίζεται κυρίως στις ενότητες των στοχαστικών μαθηματικών και των γεωμετρικών μετασχηματισμών (βλέπε και την προηγούμενη ερώτηση). Στο παράρτημα (2η ενότητα) περιγράφεται η αντιστοίχηση και η συμβατότητα του νέου προγράμματος σπουδών με τα υπάρχοντα βιβλία. Αυτό που μπορεί να γίνει, είναι ο εκπαιδευτικός (μόνος του ή σε συνεργασία με συναδέλφους του) να σχεδιάσει τη διδασκαλία του με βάση το ΠΣ, τον οδηγό του εκπαιδευτικού και υλικό που μπορεί να βρει στο διαδίκτυο. Ένας τέτοιος σχεδιασμός μπορεί να περιλαμβάνει μια επιλογή δραστηριοτήτων (με βάση τα ΠΜΑ του ΠΣ), μια πιθανή πορεία διαπραγμάτευσής τους στην τάξη και μια κατανομή των διδακτικών ωρών. Επίσης, ίσως είναι χρήσιμο να παραχθεί ένα ή περισσότερα φύλλα εργασίας που να περιέχουν τις επιλεγμένες δραστηριότητες, κάποιες εργασίες για το σπίτι και (σε κάποιες περιπτώσεις) γενικεύσεις ή συμπεράσματα για τη μελέτη των μαθητών.

Στο πλαίσιο της πιλοτικής εφαρμογής, αναμένεται να παραχθεί υλικό από τους εκπαιδευτικούς που συμμετέχουν σε αυτήν και από μέλη της ομάδας ανάπτυξης του ΠΣ και να αναρτηθεί στο φόρουμ. Επιπλέον, για αρκετά θέματα έχει παραχθεί υλικό για τα νέα προγράμματα σπουδών της Κύπρου (διαθέσιμο στη διεύθυνση http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/index.html).

3. ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΤΟΥ ΟΔΗΓΟΥ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

Οι αλλαγές στο πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο δεν αφορούν απλά σε αλλαγή της ύλης αλλά και σε αλλαγή της διδασκαλίας του μαθήματος. Για το λόγο αυτό το κείμενο του ΠΣ και ο οδηγός του εκπαιδευτικού αποτελούν βασικά εργαλεία του εκπαιδευτικού για τη διδασκαλία. Η μελέτη του γενικού μέρους του π.σ. θα τον βοηθήσει να κατανοήσει τη συνολική φιλοσοφία και τις βασικές αρχές πάνω στις οποίες αυτό αναπτύχθηκε. Επίσης, θα τον βοηθήσει να κατανοήσει τη σημασία των τροχιών μάθησης στη διαμόρφωση του και να αποκτήσει μια συνολική γενική εικόνα της εξέλιξης τους στην υποχρεωτική εκπαίδευση. Η κατανόηση αυτών των στοιχείων αποτελεί τη βάση για τη σωστή εφαρμογή του ΠΣ

Η μελέτη του ειδικού μέρους του ΠΣ δίνει στους εκπαιδευτικούς το τμήμα κάθε θεματικής ενότητας και κάθε τροχιάς αυτής ανά τάξη, εξειδικεύοντας τα αντίστοιχα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Επίσης προτείνει σχετικές δραστηριότητες και διδακτικό υλικό που μπορεί να αξιοποιήσει ο εκπαιδευτικός στη διδασκαλία του.

Αυτό το τμήμα του ΠΣ βοηθάει τον εκπαιδευτικό να αποκτήσει μια συνολική εικόνα του μαθήματος στη κάθε τάξη. Πρέπει να γίνει σαφές ότι η σειρά του ΠΣ δεν αφορά στη σειρά διδασκαλίας στην τάξη. Στο Παράρτημα ($1^{η}$ ενότητα) υπάρχουν δύο εναλλακτικές προτάσεις για τη σειρά διδασκαλίας.

Η μελέτη του γενικού μέρους του οδηγού του εκπαιδευτικού θα βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να αποκτήσει μια περισσότερο λεπτομερή εικόνα της εξέλιξης των μαθησιακών τροχιών, καθώς και για τις μεθόδους και τα εργαλεία αξιολόγησης που προτείνονται. Αυτό το τμήμα του οδηγού σε συνδυασμό με το π.σ., βοηθά τον εκπαιδευτικό να αποκτήσει μια καλή γενική εικόνα σχετικά με το περιεχόμενο, τους στόχους και τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο. Για το λόγο αυτό, είναι σημαντικό ένας εκπαιδευτικός αρχικά να μελετήσει το π.σ. και το γενικό μέρος του οδηγού του εκπαιδευτικού.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, το ειδικό μέρος του οδηγού του εκπαιδευτικού είναι δομημένο κατά θεματική ενότητα και βασικά θέματα. Ο εκπαιδευτικός που έχει να διδάξει ένα βασικό θέμα σε μια τάξη συμβουλεύεται τον οδηγό του εκπαιδευτικού για να βοηθηθεί στο σχεδιασμό των διδασκαλιών που αφορούν το συγκεκριμένο θέμα. Ο οδηγός σπουδών θα του δώσει στοιχεία που αφορούν τη διδασκαλία του θέματος και στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου. Ειδικότερα, ο εκπαιδευτικός θα βρει στο οδηγό στοιχεία για τη σημασία του θέματος, τι στοιχεία αυτού του θέματος έχουν συναντήσει οι μαθητές στο δημοτικό σχολείο και πως εξελίσσεται η διδασκαλία του θέματος στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου καθώς και ποιες είναι οι σημαντικότερες δυσκολίες που αναμένεται να αντιμετωπίσουν οι μαθητές κατά τη διαπραγμάτευση του. Στη συνέχεια, θα βρει γενικά στοιχεία για τη διδακτική διαχείριση αυτού του θέματος σε κάθε τάξη του Γυμνασίου, καθώς και στοιχεία για την αξιοποίηση σχετικών δραστηριοτήτων. Το τμήμα αυτού του οδηγού σπουδών σε συνδυασμό με το ειδικό μέρος του π.σ. μπορεί να αξιοποιηθεί από τον εκπαιδευτικό στο σχεδιασμό της καθημερινής διδασκαλίας του.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τόσο το κείμενο του ΠΣ όσο και ο οδηγός του εκπαιδευτικού αποτελούν απαραίτητα εργαλεία του εκπαιδευτικού σε όλη τη διάρκεια του σχολικού έτους. Το βασικό διδακτικό εγχειρίδιο δεν παίζει για τον εκπαιδευτικό τον ίδιο ρόλο που έπαιζε πριν. Τώρα θα τον βοηθήσει αλλά δεν είναι το κύριο βοήθημα του για τον σχεδιασμό της διδασκαλίας. Ο σχεδιασμός θα γίνει από τον ίδιο με την βοήθεια του ΠΣ και του οδηγού του εκπαιδευτικού. Από το διδακτικό εγχειρίδιο και άλλες πηγές θα βρει χρήσιμο διδακτικό υλικό που θα το αξιοποιήσει, με βάση τη φιλοσοφία και τις αρχές του ΠΣ.

4. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Η αξιολόγηση εστιάζει από την μια μεριά στον ίδιο τον μαθητή και στην επίτευξη συγκεκριμένων ΠΜΑ και από την άλλη στη διδακτική πορεία (διδασκαλία). Το μοντέλο αξιολόγησης του μαθητή περιλαμβάνει την κατάταξη των στρατηγικών – προσεγγίσεων που αναπτύσσουν οι μαθητές, εργαζόμενοι σε δραστηριότητες τελικής ή διαμορφωτικής αξιολόγησης, ενώ για την αξιολόγηση της διδασκαλίας προτείνεται ένα εργαλείο αυτοαξιολόγησης του εκπαιδευτικού.

Αξιολόγηση του μαθητή

Η ανάλυση και ερμηνεία των απαντήσεων των μαθητών σε κάποια κατάσταση-πρόβλημα, είτε αυτό αντιμετωπίζεται στη συζήτηση στην τάξη είτε σε κάποιο γραπτό τεστ, είναι χρήσιμα στοιχεία για τον εκπαιδευτικό της τάξης προκειμένου να αντιληφθεί τις συγκεκριμένες δυσκολίες που αντιμετωπίζει ο κάθε μαθητής και να αποφασίσει για το είδος της διδακτικής παρέμβασης που κρίνεται απαραίτητη. Είναι αναγκαίος, λοιπόν, ο εντοπισμός της κύριας μαθηματικής ιδέας/ έννοιας του προβλήματος και η ταξινόμηση των απαντήσεων των μαθητών με βάση το βαθμό επίτευξης του στόχου της δραστηριότητας, της πληρότητας στην αντίληψη της βασικής μαθηματικής ιδέας/ έννοιας και, τέλος, της πληρότητας της αιτιολόγησης που αναπτύσσει ο μαθητής.

Στην κατεύθυνση αυτή μπορεί να βοηθήσει το επόμενο εργαλείο αξιολόγησης. Το προτεινόμενο μοντέλο αναπτύσσεται σε κλίμακα 4 επιπέδων αξιολόγησης των στρατηγικών – προσεγγίσεων που αναπτύσσουν οι μαθητές σε δραστηριότητες αξιολόγησης και στηρίζεται στο μοντέλο ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των μαθητών σε «ανοικτού» τύπου δραστηριότητες του Αναλυτικού Προγράμματος *Mathematics in Context*.

Αξιολογική κλίμακα τελικής αξιολόγησης

4.	Πλήρης επίτευξη του στόχου της δραστηριότητας. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν πλήρη αντίληψη της κεντρικής μαθηματικής ιδέας της δραστηριότητας. Η αιτιολόγησή τους είναι σαφής, ολοκληρωμένη και περιλαμβάνει τη χρήση γραπτής, συμβολικής και εικονικής αναπαράστασης.
3.	Μερική επίτευξη του στόχου της δραστηριότητας. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν μερική αντίληψη της κεντρικής μαθηματικής ιδέας της δραστηριότητας. Η αιτιολόγησή τους κρίνεται ελλιπής μολονότι καταφέρνουν να «επικοινωνούν» την προσέγγισή που ακολουθείται.
2.	Περιορισμένη πρόοδο/ επίτευξη της δραστηριότητας. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν ελλιπή αντίληψη της κεντρικής μαθηματικής ιδέας της δραστηριότητας. Η αιτιολόγηση κρίνεται ανεπαρκής, προβληματική και γεμάτη ασάφειες.
1.	Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδο στην επίτευξη της δραστηριότητας. Οι μαθητές φαίνεται να αγνοούν την κεντρική μαθηματική ιδέα της δραστηριότητας, ενώ αδυνατούν να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους.

Η εφαρμογή του συγκεκριμένου μοντέλου από τους εκπαιδευτικούς προϋποθέτει φυσικά την ανάλυση της μαθηματικής ιδέας/ έννοιας της δραστηριότητας. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, αρχικά γίνεται η σύνδεση της δραστηριότητας με τους στόχους του Προγράμματος Σπουδών και ακολουθεί η δραστηριότητα. Στη συνέχεια, η ανάλυση και ταξινόμηση των πιθανών στρατηγικών – προσεγγίσεων στηρίζεται στην ανάλυση της κεντρικής έννοιας της δραστηριότητας.

Παράδειγμα Δραστηριότητας Αξιολόγησης:

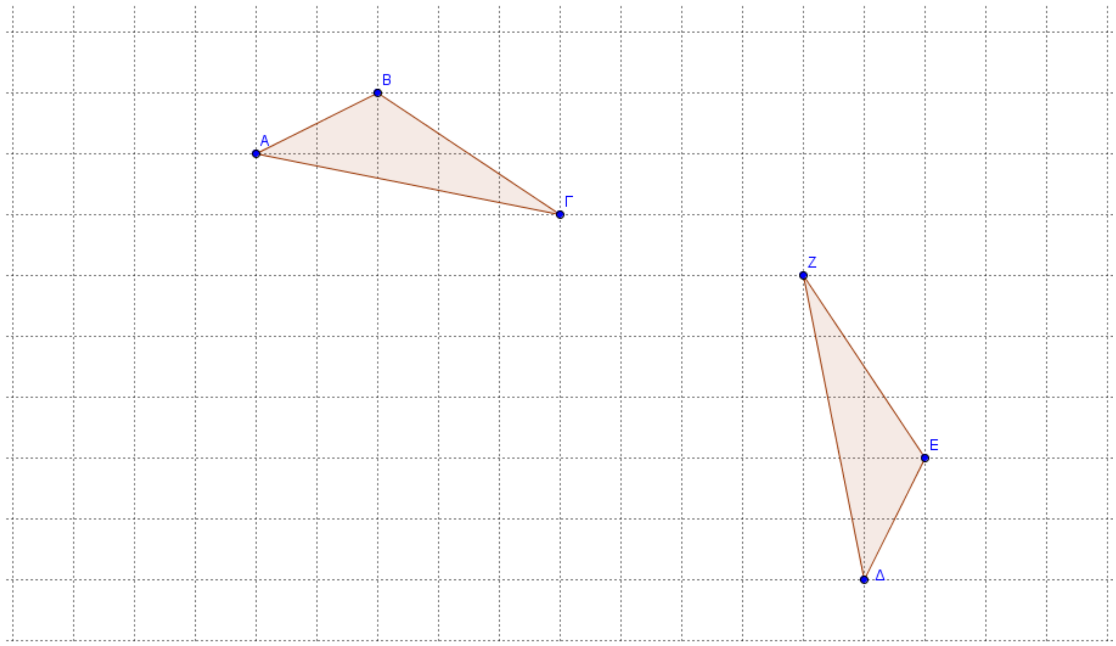
Β΄ Γυμνασίου: Μετασχηματισμοί (Στροφή , μεταφορά, αξονική συμμετρία)

Θεματική ενότητα: Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση

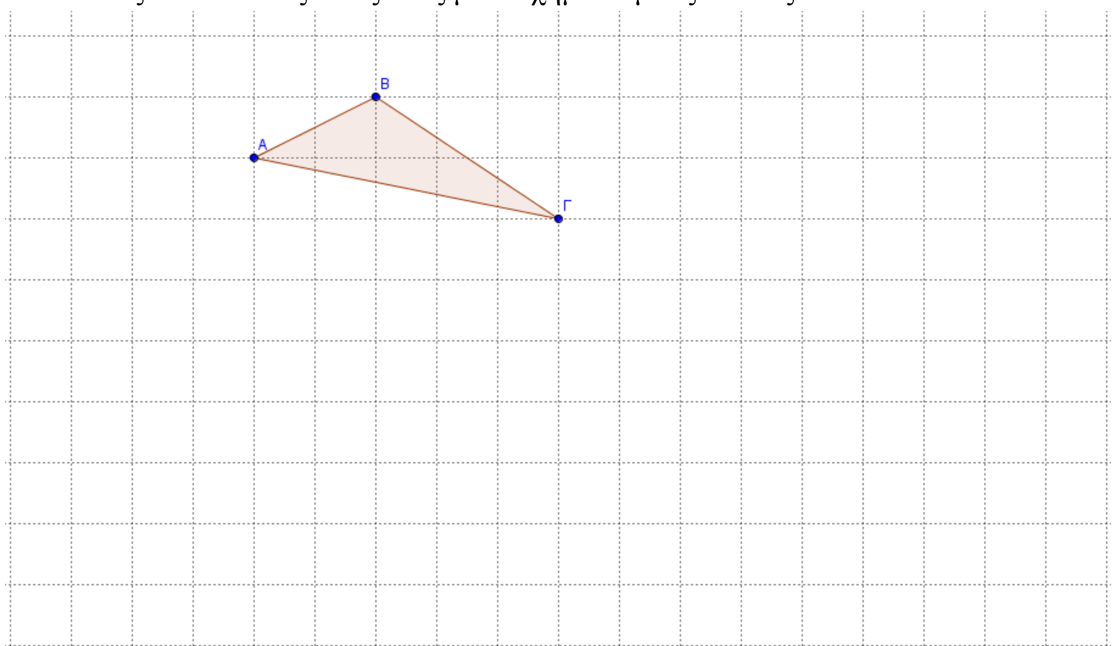
Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**
Γ5. Αναγνωρίζουν τη σημασία της μεταφοράς και της στροφής στις γεωμετρικές κατασκευές και την αιτιολόγηση ιδιοτήτων των σχημάτων. *Γ6.* Κατασκευάζουν το σχήμα που προκύπτει από τη μεταφορά ή τη στροφή ενός σχήματος και αναγνωρίζουν τη σχέση του με το αρχικό. *Γ7.* Αναγνωρίζουν σχήματα με άξονα συμμετρίας ή κέντρο συμμετρίας και κατασκευάζουν τα συμμετρικά γεωμετρικών σχημάτων ως προς διάφορους άξονες ή κέντρα σε πραγματικό και ψηφιακό περιβάλλον. *Γ8.* Εντοπίζουν τις γεωμετρικές ιδιότητες της αξονικής και της κεντρικής συμμετρίας.	**Μετασχηματισμοί** • μεταφορά και στροφή • αξονική συμμετρία (Ανάκλαση)

Η παρακάτω δραστηριότητα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως τελική αξιολόγηση της επίτευξης των ΠΜΑ: Γ5, Γ6, και από τα Γ7, Γ8 το μέρος της αξονικής συμμετρίας.

1. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ.

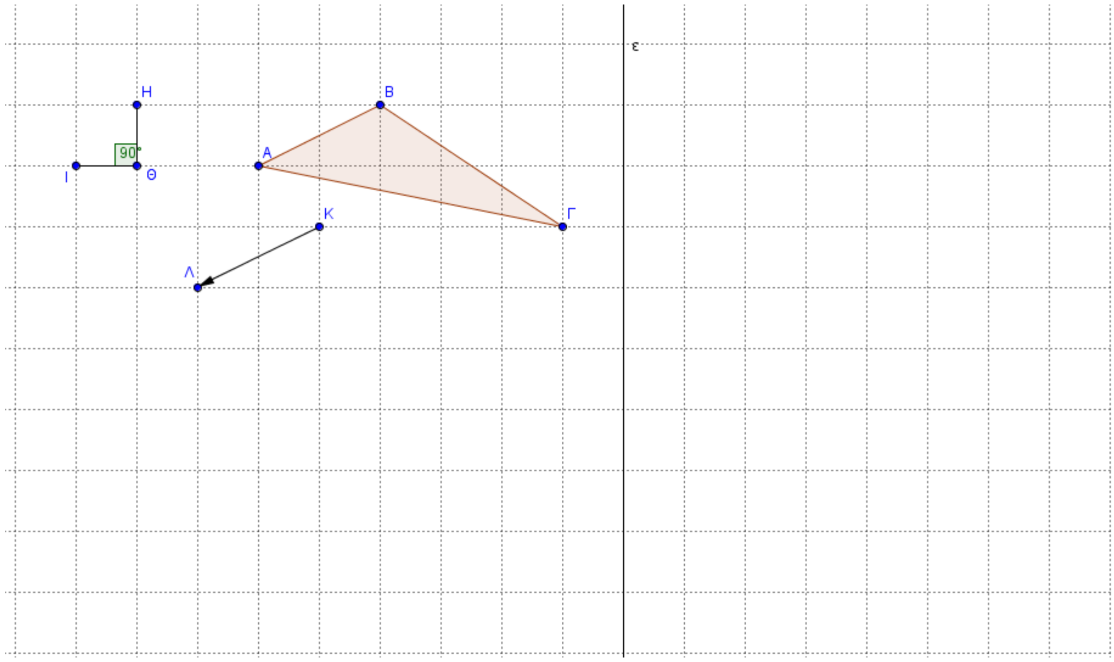


2. Θα μπορούσε το τρίγωνο ΕΔΖ να είναι η εικόνα του τριγώνου ΑΒΓ ως προς μια σειρά από διαδοχικούς μετασχηματισμούς; Αιτιολογήστε την απάντησή σας κατασκευάζοντας τους μετασχηματισμούς αυτούς.



3. Να κατασκευάσετε τους διαδοχικούς μετασχηματισμούς του τριγώνου ΑΒΓ :
   1. στροφή με κέντρο το σημείο Γ και γωνία την γωνία ΗΘΙ),
   2. παράλληλη μεταφορά ως προς το διάνυσμα $\underset{AB}{\rightarrow}$,και
   3. ανάκλαση ως προς την ευθεία ε.

   Συγκρίνετε το τελικό σχήμα με το τρίγωνο ΔΕΖ. Τι παρατηρείτε;



4. Αν ακολουθούσατε διαφορετική σειρά στους μετασχηματισμούς, θα ήταν ίδιο το αποτέλεσμα; Αν όχι, σε ποιες περιπτώσεις. Μπορείτε να το ερμηνεύσετε;

Ανάλυση της δραστηριότητας – Αξιολόγηση των απαντήσεων των μαθητών

Η κύρια μαθηματική έννοια της δραστηριότητας αφορά τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς της στροφής ενός γεωμετρικού αντικειμένου ως προς ένα κέντρο και μια δοσμένη γωνία, της παράλληλης μεταφοράς του ως προς ένα διάνυσμα και της ανάκλασης του ως προς άξονα. Οι συγκεκριμένοι μετασχηματισμοί ανήκουν στην ομάδα των μετασχηματισμών που διατηρούν το γεωμετρικό αντικείμενο αναλλοίωτο, δηλαδή διατηρεί τις ιδιότητές του αμετάβλητες, ενώ μεταβάλλονται ο προσανατολισμός και η θέση του στο επίπεδο. Οι μετασχηματισμοί αυτοί περιλαμβάνουν ένα αρχικό γεωμετρικό αντικείμενο, μια διαδικασία μετασχηματισμού και τη δημιουργία ενός νέου γεωμετρικού αντικειμένου ίσου με το αρχικό, το οποίο είναι, όμως, προϊόν του συγκεκριμένου μετασχηματισμού. Η ισότητα του τελικού αντικειμένου με το αρχικό δεν αποτελεί μοναδικό κριτήριο, καθώς η διαδικασία του μετασχηματισμού απαιτεί την ύπαρξη της 1-1 αντιστοιχίας των σημείων των δύο αντικειμένων. Είναι σημαντικό να αντιληφθούν οι μαθητές τους μετασχηματισμούς αυτούς ως μια ομάδα μετασχηματισμών με κοινά χαρακτηριστικά αλλά και ιδιαίτερα στοιχεία.

Οι πιθανές παρανοήσεις – ελλείψεις των μαθητών σχετικά με τη συγκεκριμένη μαθηματική έννοια περιλαμβάνουν είτε την ισότητα των δύο αντικειμένων (αρχικό – τελικό) είτε την ύπαρξη της 1-1 αντιστοιχίας των σημείων των δύο αντικειμένων είτε τη διαδικασία του μετασχηματισμού. Η διαδικασία του μετασχηματισμού της στροφής περιλαμβάνει τη φορά στροφής, το μέτρο της γωνίας και το κέντρο, – γωνία στροφής – κέντρο), Ο μετασχηματισμός της μεταφοράς περιλαμβάνει το διάνυσμα και της ανάκλασης τον άξονα συμμετρίας.

Έτσι, είναι δυνατόν να ταξινομήσουμε τις απαντήσεις – προσεγγίσεις των μαθητών σύμφωνα με την αξιολογική κλίμακα σε 4 κατηγορίες:

4.	Πλήρης επίτευξη του στόχου της δραστηριότητας. Η απάντηση-προσέγγιση των μαθητών φανερώνει ολοκληρωμένη αντίληψη της έννοιας των μετασχηματισμών ενός γεωμετρικού σχήματος και της σχέσης μεταξύ τους.
3.	Μερική επίτευξη του στόχου της δραστηριότητας. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα βασικά σημεία της έννοιας των μετασχηματισμών: • Ισότητα των δύο σχημάτων (αρχικό – τελικό) • 1 – 1 αντιστοιχία των σημείων των δύο αντικειμένων Η προσέγγισή τους, όμως, παρουσιάζει ελλείψεις σε κάποιο από τα απαραίτητα στοιχεία της διαδικασίας του κάθε μετασχηματισμού. Επιπλέον, πιθανόν δεν μπορούν να αντιληφθούν το βασικό ρόλο της ανάκλασης στην περίπτωση που προηγείται του μετασχηματισμού της μεταφοράς.
2.	Περιορισμένη πρόοδος/ επίτευξη της δραστηριότητας. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν ελλιπή αντίληψη της μαθηματικής ιδέας των μετασχηματισμών (ανισότητα των δύο σχημάτων ή/ και έλλειψη 1-1 αντιστοιχίας των σημείων τους), αν και είναι δυνατόν να ακολουθείται σωστά η εφαρμογή της διαδικασίας τους πχ. Στη περίπτωση περιστροφής (φορά – γωνία – σημείο περιστροφής).
1.	Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδος στην επίτευξη της δραστηριότητας. Οι μαθητές αδυνατούν να εφαρμόσουν τη διαδικασία των μετασχηματισμών. Πιθανές απαντήσεις τους είναι δυνατόν να φανερώνουν ότι μπερδεύουν τα είδη των μετασχηματισμών και για παράδειγμα στην ανάκλαση ως προς άξονα εφαρμόζουν την παράλληλη μεταφορά ως προς την κάθετη απόστασης του σχήματος από τον άξονα.

Η τελική κατάταξη των στρατηγικών των μαθητών μας δίνει την δυνατότητα να αξιολογήσουμε το βαθμό επίτευξης των συγκεκριμένων ΠΜΑ και να σχεδιάσουμε την διδακτική μας παρέμβαση είτε διδάσκουμε στην Β΄ είτε στην Γ΄ Γυμνασίου.

Αξιολόγηση της διδασκαλίας

Αυτό το εργαλείο Αξιολόγησης συνδέεται με το σχεδιασμό και την αξιολόγηση της διδασκαλίας. Αυτό το εργαλείο μπορεί να δώσει άμεσα πληροφορίες στον εκπαιδευτικό σχετικά με το αν η διδακτική πρακτική του στοχεύει στην ανάπτυξη τόσο των βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων, όπως:

- η ικανότητα *αποτελεσματικής χρήσης εργαλείων*,
- η ικανότητα *αλληλεπίδρασης και συνεργασίας σε ετερογενείς ομάδες*,
- η ικανότητα *αυτόνομης και υπεύθυνης λειτουργίας,*

και της μαθηματικής (δημιουργικής, αναστοχαστικής, κριτικής) σκέψης, όσο και στην ανάπτυξη των ιδιαίτερων μαθηματικών διεργασιών που προτείνονται στο Πρόγραμμα Σπουδών:

- διεργασία συλλογισμού και επιχειρηματολογίας,
- διεργασία δημιουργίας συνδέσεων,
- διεργασία επικοινωνίας,
- διεργασία επιλογής και χρήσης εργαλείων,
- διεργασία μεταγνωστικής ενημερότητας.

Ως εργαλείο λοιπόν προτείνεται η παρακάτω εσχάρα αξιολόγησης.

Αυτοαξιολόγηση			
4 Πλήρης	**3 Μερική επίτευξη**	**2 Περιορισμένη**	**1 Ελάχιστη**

Χαρακτηριστικά διδασκαλίας	**4 |3| 2 | 1**	**Παρατηρήσεις / Βελτιώσεις**
1. Είναι εμφανής η σύνδεση μεταξύ των μαθησιακών δραστηριοτήτων και των διδακτικών στόχων;	☐ ☐ ☐ ☐	
2. Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι σημαντικό και περιγράφεται με ακρίβεια;	☐ ☐ ☐ ☐	
3. Δημιουργείται ένα περιβάλλον πρόκλησης και εμπλοκής των μαθητών για μάθηση;	☐ ☐ ☐ ☐	
4. Περιλαμβάνονται δραστηριότητες που απαιτούν διαδικασίες πειραματισμού, διερεύνησης, διατύπωσης και ελέγχου υποθέσεων;	☐ ☐ ☐ ☐	

5. Δίνεται έμφαση στη διερεύνηση φαινομένων, στη διατύπωση και στον έλεγχο υποθέσεων, αλλά και στη συγκρότηση τεκμηριωμένων επιχειρημάτων;	☐ ☐ ☐ ☐	
6. Παρέχονται ευκαιρίες στους μαθητές για να δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών, μέσα στα μαθηματικά και μεταξύ των μαθηματικών και άλλων επιστημονικών περιοχών και του πραγματικού κόσμου.	☐ ☐ ☐ ☐	
7. Αξιοποιούνται κατάλληλα χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία, προκειμένου να εκτελούν οι μαθητές συγκεκριμένες μαθηματικές δράσεις, να διερευνούν μαθηματικές ιδέες και να επιλύουν προβλήματα	☐ ☐ ☐ ☐	
8. Αξιολογείται η επίτευξη των διδακτικών στόχων;	☐ ☐ ☐ ☐	
9. Αξιολογείται το σύνολο των μαθητών;	☐ ☐ ☐ ☐	
10. Παρέχονται ευκαιρίες για εμβάθυνση;	☐ ☐ ☐ ☐	
Σημείωση: Κάθε χαρακτηριστικό που έχει σκορ κάτω από 3 είναι υποψήφιο για βελτίωση και θα πρέπει να μελετηθεί με προσοχή.	**Σύνολο: / 40**	

5. ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΤΠΕ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΑΞΗ

Η αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών υποστηρίζει την έμφαση που δίνεται στο ΠΣ στην εμπλοκή των μαθητών σε μαθηματικές δραστηριότητες, διερεύνηση μαθηματικών ιδεών και επίλυση προβλήματος μέσα από τη χρήση εξειδικευμένων λογισμικών για μαθηματική διερεύνηση και εργαλείων κοινωνικού λογισμικού για συλλογική διαπραγμάτευση και συνεργασία.

Με τη χρήση ειδικά σχεδιασμένων ψηφιακών εργαλείων μπορεί να δημιουργηθεί ένα πεδίο ευκαιριών για τους μαθητές ώστε να επεκτείνουν τις ικανότητές τους να διερευνούν και να αναλύουν μαθηματικές έννοιες, να εξερευνούν μαθηματικές κανονικότητες, να κατανοούν μαθηματικές σχέσεις καλλιεργώντας ή αμφισβητώντας τη διαίσθησή τους. Η διαπίστωση αυτή βασίζεται στο ότι τα εργαλεία αυτά προσφέρουν λειτουργίες που σχετίζονται άμεσα με εντοπισμένες δυσκολίες των μαθητών που προέρχονται κυρίως από τις περιορισμένες δυνατότητες αναπαράστασης, χρήσης και έκφρασης των μαθηματικών εννοιών με τα στατικά μέσα που χρησιμοποιούνται στην παραδοσιακή τάξη. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε την δυνατότητα αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών μέσα από διασυνδεόμενα παράθυρα στην οθόνη του υπολογιστή (π.χ. της συνάρτησης με μορφή πίνακα, τύπου και γραφήματος) και τις δυνατότητες άμεσης αλληλεπίδρασης των μαθητών με τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να αλλάζει μια παράμετρο στον τύπο μιας συνάρτησης και να παρατηρεί τις αντίστοιχες αλλαγές στο γράφημά της. Στα περιβάλλοντα αυτά οι μαθητές μπορούν να αναπαριστούν μαθηματικές ιδέες και σχέσεις και να μοντελοποιούν καταστάσεις κάνοντας μετρήσεις και χρησιμοποιώντας διαγράμματα, γραφήματα, πίνακες και σύμβολα. Η έρευνα δείχνει ότι η δυνατότητα χρήσης των αναπαραστάσεων είναι κρίσιμη για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και μπορεί να ευνοήσει τη μετατόπιση του μαθητή από την παθητική θέση 'θεατή' του μαθήματος των μαθηματικών στην εμπλοκή με δραστηριότητες όπως ο πειραματισμός με μαθηματικά αντικείμενα και σχέσεις, η δημιουργία υποθέσεων, η ανάπτυξη επιχειρηματολογίας και η ερμηνεία καταστάσεων και φαινομένων. Ιδιαίτερη αξία έχουν η διαμεσολάβηση, η διαπραγμάτευση και η συνεργασία γύρω από τα αναπαριστώμενα μαθηματικά αντικείμενα.

Τα ψηφιακά εργαλεία που προτείνονται στο ΠΣ χρησιμοποιούνται ως *εργαλεία έκφρασης* και οργανώνονται σε πέντε κατηγορίες ανάλογα με το είδος της μαθηματικής δραστηριότητας και τον τρόπο χρήσης της υφιστάμενης τεχνολογίας. Αυτές είναι: η μαθηματική έκφραση μέσω προγραμματισμού, ο δυναμικός χειρισμός γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων, η αλγεβρική διερεύνηση με αντίστοιχα συστήματα, η διερεύνηση και επεξεργασία δεδομένων για στατιστική και πιθανότητες και ο πειραματισμός με ψηφιακά μοντέλα. Τα εργαλεία αυτά αξιοποιούνται σε δύο επίπεδα:

(α) επιλεκτικά με τη μορφή *μικροπειραμάτων* που ενσωματώνονται σε διαφορετικά σημεία της ύλης και μπορεί να συνδέονται είτε με ορισμούς και μαθηματικές ιδιότητες είτε με δραστηριότητες και ασκήσεις των σχολικών βιβλίων;

(β) σε βασικό υλικό αναφοράς σε *συνθετικές εργασίες* για το σχεδιασμό και προετοιμασία μαθητικών δραστηριοτήτων αλλά και για ίδια μαθηματική διερεύνηση.

Τα μικροπειράματα εμπεριέχουν διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις και η βασική χρήση τους από μαθητές προβλέπει δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων ώστε συμπεριφορές, σχέσεις και ιδιότητες να γίνονται αντικείμενο προβληματισμού, διερεύνησης και διαπραγμάτευσης (τι μένει σταθερό και τι αλλάζει καθώς μετεξελίσσονται τα μαθηματικά αντικείμενα). Για παράδειγμα, με αφετηρία μια δραστηριότητα – άσκηση του σχολικού βιβλίου, ένα μικροπείραμα μπορεί να στοχεύει στην επεξήγηση μιας έννοιας ή στην απαραίτητη εμβάθυνση για την κατανόησή της από τους μαθητές. Έτσι, το κάθε μικροπείραμα μπορεί να καλύπτει μια έννοια με στενό τρόπο ή ένα ευρύτερο εννοιολογικό πεδίο όπου εμπλέκονται συνδεδεμένες μαθηματικές έννοιες. Για παράδειγμα, σε μια δραστηριότητα κατασκευής της περιμέτρου ενός τριγώνου με ένα εργαλείο δυναμικής γεωμετρίας (μέσω τομής κύκλων) περιλαμβάνονται στοιχεία που αφορούν τον τρόπο κατασκευής ισοσκελούς και ισοπλεύρου τριγώνου αλλά και αναγκαίες συνδέσεις με γνώσεις που έχουν οι μαθητές για τις ιδιότητες του κύκλου.

Τα μικροπειράματα προορίζονται για χειρισμό από το μαθητή (εξατομικευμένα ή σε συνεργασία σε ομάδα) με δια ζώσης διδακτική υποστήριξη από τον εκπαιδευτικό ενώ μπορεί να χρησιμοποιηθούν κατά την παραδοσιακή μετωπική διδασκαλία με χρήση διαδραστικού πίνακα ως μέσα εξήγησης εννοιών αλλά και ως μέσα για σχεδιασμό μιας διευρυμένης μαθηματικής διερεύνησης ενώπιον όλης της τάξης. Τα μικροπειράματα είναι σχεδιασμένα ώστε οι όποιες απαντήσεις των μαθητών να αφήνουν πεδίο παρέμβασης στον εκπαιδευτικό και αφορμές για διενέργεια συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης (π.χ. μέθοδος επίλυσης ενός προβλήματος ή εύρεσης μιας απάντησης, γενίκευση της λύσης, ερμηνεία αποτελεσμάτων και συμπεριφορών μαθηματικών αντικειμένων).

Στην περίπτωση των συνθετικών εργασιών με αξιοποίηση των ψηφιακών εργαλείων, στο επίκεντρο βρίσκεται η συνεργασία μεταξύ των μαθητών (συχνά σε ομάδες) για τη διερεύνηση ενός θέματος ή τη λύση ενός προβλήματος στο οποίο εμπλέκονται τα μαθηματικά και αναδεικνύονται ως εργαλείο που ευνοεί τη διερεύνηση καθαυτή, τη διαπραγμάτευση και την ερμηνεία. Έτσι, ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να σχεδιάσει διερευνήσεις που αναδεικνύουν συνδέσεις εντός των μαθηματικών (π.χ. διερεύνηση με άξονα ένα μαθηματικό θέμα) ή εκτός των μαθηματικών (π.χ. μαθηματικά και πολιτισμός, μαθηματικά στο πλαίσιο πραγματικών καταστάσεων). Σε κάθε περίπτωση οι προτεινόμενες συνθετικές εργασίες δεν προτείνεται να ειδωθούν ως αντικείμενα υλικού προς επεξήγηση στους μαθητές, αλλά να λειτουργήσουν ως γεννήτορες ιδεών για τη δημιουργική εμπλοκή των ίδιων των εκπαιδευτικών στο σχεδιασμό νέων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων για τη διερεύνηση μιας ποικιλίας μαθηματικών εννοιών του ΠΣ από τους μαθητές. Το ΑΠΣ προτείνει τη διαχείριση 10 ωρών διδασκαλίας ανά σχολικό έτος από το προβλεπόμενο για να εργαστούν οι μαθητές σε συνθετικές εργασίες. Μέρος ή το σύνολο των συνθετικών εργασιών που βασίζονται στη χρήση ψηφιακών εργαλείων προτείνεται να εφαρμοστούν στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου.

Παράδειγμα αξιοποίησης ΤΠΕ
Σενάριο: Η έννοια του εμβαδού επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων[1]

Γνωστική περιοχή: Η έννοια του εμβαδού επίπεδων σχημάτων. Η μέτρηση κα ο υπολογισμός των εμβαδών απλών γεωμετρικών σχημάτων.

Θέμα: Οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν δυο ευθύγραμμα σχήματα ως προς την έκταση που καταλαμβάνουν στο επίπεδο, να συγκρίνουν την έκταση που καταλαμβάνουν διάφορα ευθύγραμμα σχήματα σε σχέση με ένα σταθερό ευθύγραμμο σχήμα και τέλος να βρουν την σχέση που έχει το εμβαδόν συγκεκριμένων γεωμετρικών σχημάτων με τα μήκη των πλευρών και των υψών τους.

Τεχνολογικά εργαλεία: Geogebra ή κάποιο άλλο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας.

Πλαίσιο εφαρμογής

Τάξη: Β΄ Γυμνασίου.

Χρόνος υλοποίησης: 3- 4 διδακτικές ώρες.

Χώρος υλοποίησης: Το σενάριο μπορεί να διεξαχθεί στο εργαστήριο υπολογιστών ή στην σχολική τάξη με τη βοήθεια βιντεοπροβολέα ή διαδραστικού πίνακα.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Οι μαθητές που θα εμπλακούν με το προτεινόμενο σενάριο θα πρέπει να γνωρίζουν:

- Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα, τετράγωνο, τρίγωνο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, πλάγιο παραλληλόγραμμο, ρόμβο και τραπέζιο καθώς και τις ιδιότητές τους.
- Τη μέτρηση του μήκους ευθυγράμμων τμημάτων και της απόστασης σημείων.
- Τις απαιτούμενες λειτουργίες και δυνατότητες χειρισμού του Geogebra.

Στόχοι: Οι προτεινόμενες δραστηριότητες σε συνδυασμό με τις προβλεπόμενες μεθόδους διδασκαλίας που προτείνονται έχουν σκοπό να παρέχουν την δυνατότητα στους μαθητές, από την πλευρά του γνωστικού αντικειμένου:

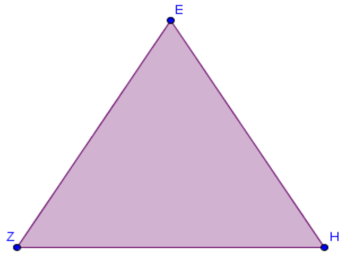
- Να κατανοήσουν την έννοια του εμβαδού.
- Να κατανοήσουν την μέτρηση του εμβαδού ως διαδικασία σύγκρισης της έκτασης που καταλαμβάνει ένα σχήμα σε σχέση με ένα άλλο που λαμβάνεται ως μονάδα.
- Να κατανοήσουν την διαδικασία υπολογισμού του εμβαδού των απλών σχημάτων με τη βοήθεια των γραμμικών του μεγεθών (μήκη πλευρών και υψών).

Ανάλυση του σεναρίου

Α΄ φάση: Σύγκριση των εκτάσεων που καταλαμβάνουν δύο σχήματα

Δίνονται στους μαθητές σε φύλλο εργασίας τα δύο ακόλουθα σχήματα και τους ζητείται να συγκρίνουν την έκταση που καταλαμβάνουν στο επίπεδο.

[1] Συνοπτική μορφή του σεναρίου 7 (Η έννοια του εμβαδού επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων με λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας και συλλογική διαπραγμάτευση) βλ. Κυνηγός, Χ., Ψυχάρης, Γ., Γαβρίλης, Κ. & Κείσογλου, Σ. (2010). *Επιμορφωτικό Υλικό για την Επιμόρφωση Εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης – Κλάδος Μαθηματικοί (ΠΕ03)*. Υπ. Παιδείας Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων, Ε.Π. Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση.



Οδηγίες εφαρμογής - Αναμενόμενες αλληλεπιδράσεις και αποτελέσματα

- Από τον εκπαιδευτικό αναλύεται το πρόβλημα, το φύλλο εργασίας και ο τρόπος που μπορούν να εργαστούν οι μαθητές είτε ατομικά, είτε ομαδικά (σε μικρές ομάδες) στο θρανίο τους. Αναλύει ακόμα τον τρόπο χρήσης του υπολογιστή τάξης (ή του διαδραστικού πίνακα αν υπάρχει) από τον ίδιο ή τους μαθητές.
- Σε σχέση με το πρόβλημα, δίνεται από τον εκπαιδευτικό η οδηγία ότι οι μαθητές μπορούν να κάνουν την εκτίμησή τους και να την ελέγξουν με όποιο τρόπο θεωρούν κατάλληλο.
- Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τετραγωνισμένο χαρτί ή να σχεδιάσουν σε διαφανές χαρτί ένα άλλο κατάλληλο σχήμα και με αυτό να προσπαθήσουν να καλύψουν κάθε ένα από τα δυο σχήματα ή να σκεφτούν κάποιο άλλη σχετική μέθοδο.
- Σε περίπτωση που οι μαθητές εργάζονται ατομικά ή σε μικρές ομάδες σε υπολογιστή, καλούνται να χρησιμοποιήσουν τα εργαλεία του λογισμικού για να κάνουν την εκτίμησή τους και να την ελέγξουν.
- Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να ανακοινώσουν την εκτίμησή τους στην τάξη και να εξηγήσουν την διαδικασία και το αποτέλεσμα της σύγκρισης που ανακοίνωσαν. Μπορεί επίσης να καταγράφει στον διαδραστικό πίνακα, σε ένα πίνακα όπως τον παρακάτω, τις μεθόδους που αναφέρονται από τους μαθητές και το αποτέλεσμα της σύγκρισης προκειμένου να διευκολυνθεί η περαιτέρω αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών. Παράλληλα, ζητά από τους μαθητές να σχολιάζουν τα αποτελέσματα των συγκρίσεων.

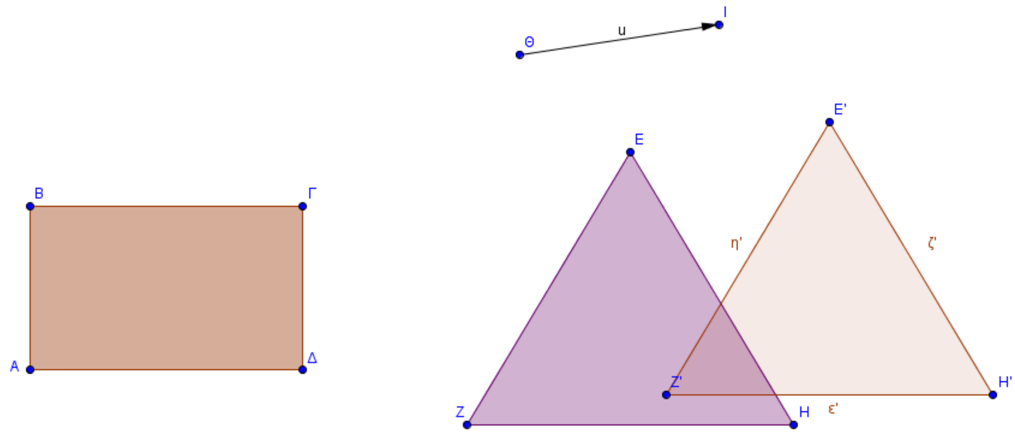
Μαθητής	Έκταση σχήματος	Σχέση	Έκταση σχήματος	Μέθοδος
		>, =, <		
	ΑΒΓΔ		ΕΖΗ	
	>>		>>	
	>>		>>	

- Ο εκπαιδευτικός επιδιώκει να αποκτήσουν οι μαθητές μια συνολική εικόνα για τον τρόπο σύγκρισης των εκτάσεων που καταλαμβάνουν τα δυο σχήματα. Έτσι:
    - οι μαθητές αναμένεται να αποκτήσουν την αντίληψη ότι τα δυο σχήματα δεν είναι εύκολο να συγκριθούν άμεσα ως προς την έκταση που καταλαμβάνουν,

- η σύγκριση των σχημάτων μπορεί να γίνει με τη βοήθεια τετραγωνισμένου χαρτιού ή μέσω άλλου σχήματος που να «ταιριάζει» στα δυο σχήματα ή εργαλείων του λογισμικού.

Προεκτάσεις: Διάκριση μεταξύ ισότητας και ισοδυναμίας δυο σχημάτων

Στην τάξη με τη βοήθεια βιντεοπροβολέα ή του αλληλεπιδραστικού πίνακα, ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει το αρχείο του εκπαιδευτικού λογισμικού (Geogebra ή άλλο) με τα δύο σχήματα. Στη συνέχεια σχεδιάζει ένα διάνυσμα και κάνει μεταφορά του ενός σχήματος (π.χ. του τριγώνου) κατά το διάνυσμα αυτό. Στη συνέχεια, αφού εξηγήσει λεκτικά ότι με αυτόν τον τρόπο κατασκεύασε μια εικόνα του σχήματος, ρωτά τους μαθητές να προβλέψουν αν το αρχικό και το νέο σχήμα καταλαμβάνουν την ίδια έκταση.



Αφού διατυπωθούν οι προβλέψεις των μαθητών ο εκπαιδευτικός μεταβάλλει το διάνυσμα έως ότου τα δυο σχήματα ταυτιστούν. Εξηγεί, έτσι, ότι «δυο σχήματα που ταυτίζονται ονομάζονται ίσα και ότι αυτά καταλαμβάνουν την ίδια έκταση». Στη συνέχεια, ρωτά τους μαθητές να προβλέψουν αν υπάρχουν σχήματα που ενώ δεν ταυτίζονται, μπορούν να καταλαμβάνουν την ίδια έκταση. Οι μαθητές, αξιοποιώντας τις εμπειρίες τους, αναμένεται να απαντήσουν θετικά. Ο εκπαιδευτικός μπορεί τότε να εξηγήσει στους μαθητές ότι στη γεωμετρία η έννοια της ταύτισης δυο σχημάτων έχει το ίδιο νόημα με την έννοια της ισότητας. Επιπλέον, η ισότητα της έκτασης που καταλαμβάνουν δυο σχήματα στο επίπεδο έχει την έννοια της ισοδυναμίας και όχι της ισότητας.

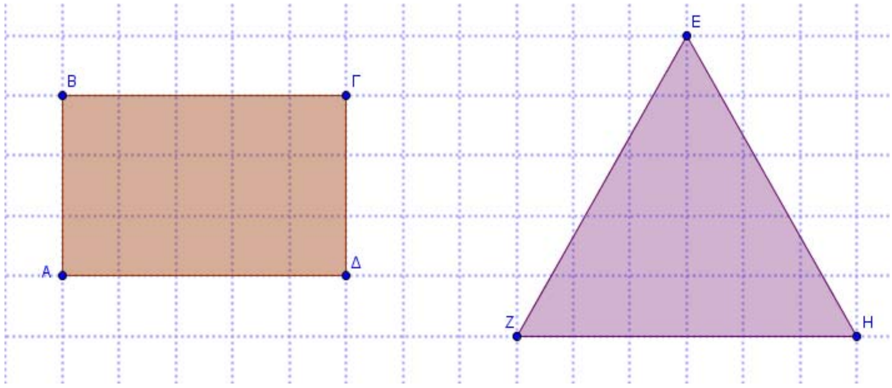
Στη συνέχεια τους καλεί να σκεφτούν και να απαντήσουν στο εξής ερώτημα:

> Υπάρχει μια κοινή μέθοδος με την οποία να μπορούν να συγκρίνουν την έκταση που καταλαμβάνουν στο επίπεδο δυο γεωμετρικά σχήματα;

Καθώς δεν αναμένεται από τους μαθητές η διατύπωση μιας σαφούς διαδικασίας, ο εκπαιδευτικός θα συζητήσει με τους μαθητές την περίπτωση της έμμεσης σύγκρισης των δυο σχημάτων με τη βοήθεια ενός κατάλληλου μικρότερου σχήματος. Το θέμα αυτό αποτελεί το αντικείμενο διδασκαλίας της Β΄ φάσης.

Β΄ φάση: Εισαγωγή στη μονάδα μέτρησης της επιφάνειας

Πρόβλημα - κατάσταση: Στον διαδραστικό πίνακα ο εκπαιδευτικός εμφανίζει στο Geogebra τα σχήματα που δόθηκαν αρχικά στους μαθητές (έχοντας επιλέξει εμφάνιση του πλέγματος σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και απόκρυψη των αξόνων). Έτσι προκύπτει το παρακάτω σχήμα.



Ζητείται από τους μαθητές:

1) Να μετρήσουν το πλήθος των τετραγωνιδίων τα οποία περιέχονται σε κάθε σχήμα.
2) Να συγκρίνουν την έκταση που καταλαμβάνουν τα δυο σχήματα και να επιβεβαιώσουν την σύγκριση που έκαναν στην Α΄ φάση.

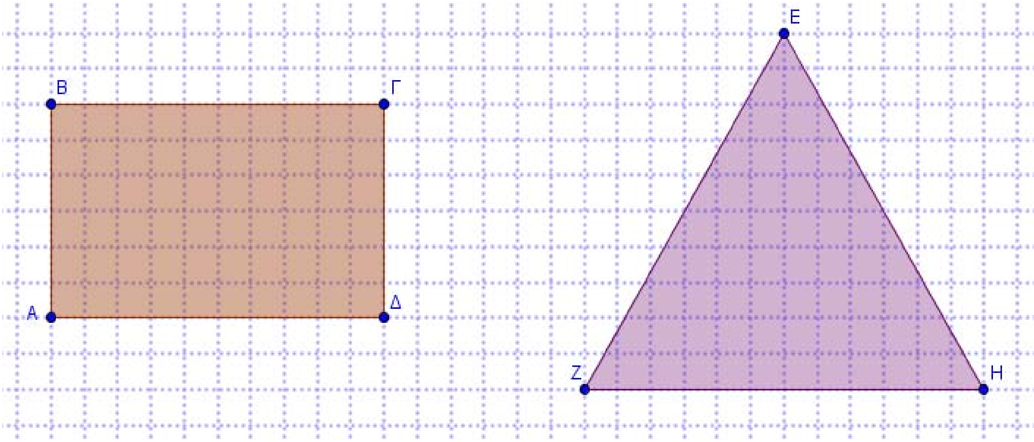
Οδηγίες εφαρμογής - Αναμενόμενες αλληλεπιδράσεις και αποτελέσματα

- Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να μετρήσουν προσεκτικά τα ολόκληρα τετραγωνίδια που περιέχονται σε κάθε σχήμα και να εκτιμήσουν πόσα ολόκληρα τετραγωνίδια αντιστοιχούν στα υπόλοιπα μέρη των τετραγωνιδίου κάθε σχήματος.
- Ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να ανακοινώσουν στην τάξη τα ευρήματά τους καθώς και την σύγκριση των εκτάσεων που καταλαμβάνουν τα δυο σχήματα. Καταγράφει δε τα αποτελέσματα στον πίνακα που χρησιμοποίησε στην πρώτη φάση προσθέτοντας δυο ακόμα στήλες με τα τετραγωνίδια που περιέχει κάθε σχήμα.

Μαθητής	Έκταση σχήματος	Σχέση	Έκταση σχήματος	Τετραγωνίδια στο σχήμα	Τετραγωνίδια στο σχήμα
		>, =, <		ΑΒΓΔ	ΕΖΗ
	ΑΒΓΔ		ΕΖΗ		
	>>		>>		
	>>		>>		

- Καθώς οι μαθητές αναμένεται να έχουν διαφορετικά αποτελέσματα από την μέτρηση του πλήθους των τετραγωνιδίων που καλύπτουν κάθε σχήμα, ο εκπαιδευτικός τους ζητά να σκεφτούν και να προτείνουν τρόπους για να μπορούν κάνουν ακριβέστερη μέτρηση των τετραγωνιδίων και τελικά περισσότερο αξιόπιστη σύγκριση των εκτάσεων των δυο σχημάτων.
- Οι μαθητές αναμένεται να σκεφτούν τη χρήση τετραγωνιδίων με πλευρά μικρότερου μήκους. Αν αυτό δεν γίνει από τους ίδιους τους μαθητές θα το προτείνει ο εκπαιδευτικός. Ο εκπαιδευτικός ή ένας μαθητής στον υπολογιστή ή στον διαδραστικό πίνακα επιλέγει με δεξί κλικ την επιφάνεια εργασίας στο Geogebra, στη συνέχεια «προβολή γραφικών» και ακολούθως «σύστημα συντεταγμένων με πλέγμα». Εκεί επιλέγει το «απόσταση στο χ:» 0.5 αντί 1

και στο ψ επίσης 0.5 αντί 1. Ακολούθως επιλέγει «εφαρμογή» και «κλείσε». Έτσι εμφανίζεται μια εικόνα όπως η παρακάτω.



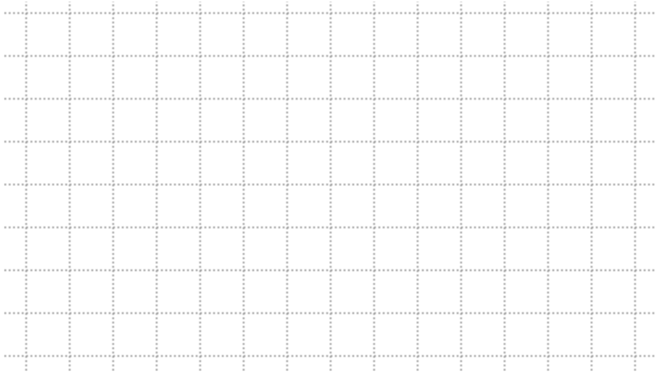
- Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να προσδιορίσουν τώρα το πλήθος των τετραγωνιδίων που περιέχονται σε κάθε σχήμα και στη συνέχεια να συγκρίνουν την έκταση που καταλαμβάνουν. Οι μαθητές μπορούν τώρα να μετρήσουν τα τετραγωνίδια και να συγκρίνουν την έκταση που καταλαμβάνουν τα δυο σχήματα.
- Συνέχιση της διαδικασίας. Ο εκπαιδευτικός ή ένας μαθητής στον υπολογιστή ή στον πίνακα μεταβάλλει ξανά το μήκος της πλευράς των τετραγωνιδίων επιλέγοντας «προβολή γραφικών», «σύστημα συντεταγμένων με πλέγμα και «απόσταση στο χ:» 0.3 αντί 0.5 και στο ψ επίσης 0.3 αντί 0.5. Στην περίπτωση αυτή ο εκπαιδευτικός μπορεί να διανείμει στους μαθητές μια εκτύπωση της νέας επιφάνειας εργασίας και να ζητήσει να επαναλάβουν την σύγκριση. Ο εκπαιδευτικός καλεί όσους μαθητές θέλουν να κάνουν και άλλα πειράματα είτε στον υπολογιστή τάξης είτε στον πίνακα με το Geogebra, μεταβάλλοντας κατάλληλα το μήκος της πλευράς των τετραγωνιδίων.
- Ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να ανακοινώσουν στην τάξη τα ευρήματά τους καθώς και την σύγκριση των εκτάσεων που καταλαμβάνουν τα δυο σχήματα. Καταγράφει δε τα αποτελέσματα στον πίνακα που χρησιμοποίησε στην πρώτη φάση προσθέτοντας μια ακόμα στήλη με το μήκος της πλευράς των τετραγωνιδίων.

Μαθητής	Μήκος πλευράς τετραγωνιδίων	Έκταση σχήματος	Σχέση >, =, <	Έκταση σχήματος	Τετραγωνίδια στο σχήμα ΑΒΓΔ	Τετραγωνίδια στο σχήμα ΕΖΗ
		ΑΒΓΔ		ΕΖΗ		
		>>		>>		
		>>		>>		
		>>		>>		

- Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να σχολιάσουν τα αποτελέσματα της σύγκρισης των δυο σχημάτων στις διάφορες περιπτώσεις πλευράς τετραγωνιδίων. Μεταξύ των άλλων τους ζητά να απαντήσουν σε ερωτήματα όπως: Σε ποιες περιπτώσεις μπορούμε να έχουμε ακριβή μέτρηση των τετραγωνιδίων που περιέχονται στο σχήμα;

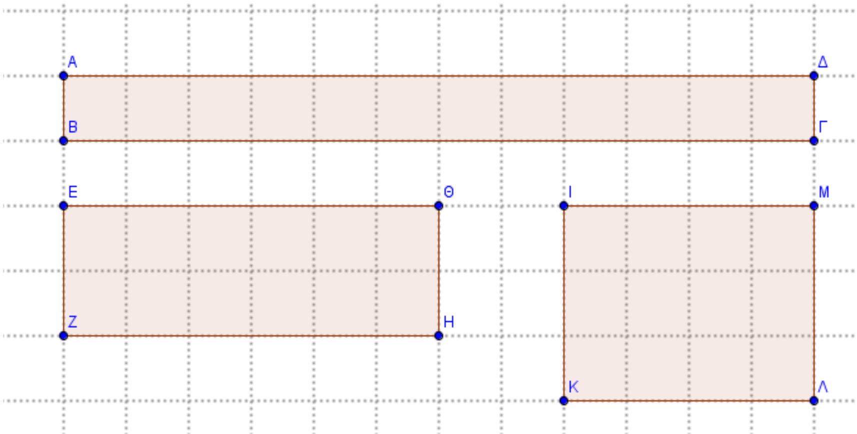
Γ΄ φάση: Σχεδίαση γεωμετρικών σχημάτων με συγκεκριμένο εμβαδόν

Ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν σχήματα με συγκεκριμένο εμβαδόν στην επιφάνεια εργασίας του Geogebra (με πλέγμα και χωρίς άξονες, όπως στην παρακάτω εικόνα):



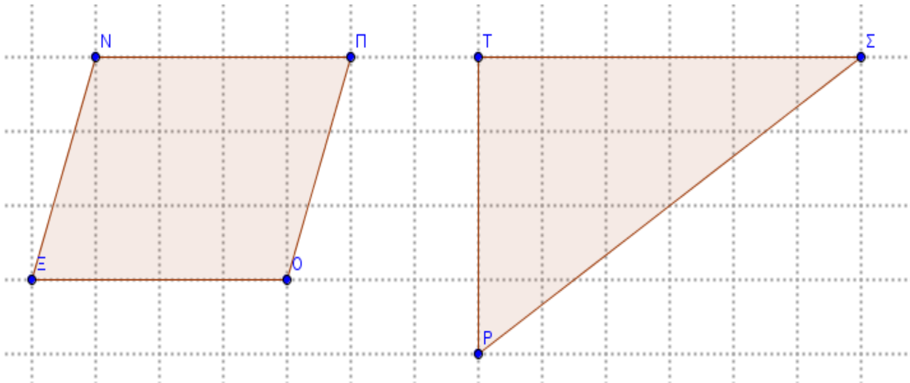
Οδηγίες εφαρμογής - Αναμενόμενες αλληλεπιδράσεις και αποτελέσματα

- Ο εκπαιδευτικός παρακινεί τους μαθητές να σχεδιάσουν περισσότερα από ένα διαφορετικά σχήματα που να περιέχουν ακριβώς 12 τετραγωνίδια. Οι μαθητές είναι πιθανόν να βρουν περισσότερα από ένα σχήματα – συνήθως ορθογώνια – τα οποία περιέχουν 12 τετραγωνίδια. Σε περιπτώσεις όπου οι μαθητές συναντούν δυσκολίες ο εκπαιδευτικός μπορεί να προτείνει την αναζήτηση σχημάτων συγκεκριμένου τύπου, όπως πλάγια παραλληλόγραμμα ή ορθογώνια τρίγωνα.



- Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να παρουσιάσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν για να σχεδιάσουν τα συγκεκριμένα σχήματα.
    - Οι μαθητές αναμένεται να εξηγήσουν τον ρόλο έπαιξαν οι αριθμοί που έχουν γινόμενο 12 (1 και 12, 2 και 6 ή 3 και 4) στη σχεδίαση των σχημάτων αυτών.
    - Αν δεν υπάρχει μαθητής που έχει σχεδιάσει άλλα σχήματα (π.χ. ισοσκελές τρίγωνο, πλάγιο παραλληλόγραμμο), ο εκπαιδευτικός

σχεδιάζει στο Geogebra σχήματα όπως τα παρακάτω και ζητά από τους μαθητές να ερευνήσουν αν είναι τα ζητούμενα και να εξηγήσουν τα συμπεράσματά τους. Οι μαθητές αναμένεται να εξηγήσουν ότι τα τμήματα των τετραγωνιδίων που περιέχονται στα σχήματα ανά δυο κάνουν ολόκληρα τετραγωνίδια.



- Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να επαναλάβουν το προηγούμενο πρόβλημα για σχήματα που περικλείουν 6 ή 8 ή 10 τετραγωνίδια. Οι μαθητές αναμένεται να επαναλάβουν την προηγούμενη διαδικασία και να συνδέσουν τα μήκη των πλευρών (στην περίπτωση των ορθογωνίων) και των υψών (στην περίπτωση πλάγιου παραλληλογράμμου ή ορθογωνίου τριγώνου) με το πλήθος των τετραγωνιδίων που περιέχονται στα σχήματα.
- Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να συμπληρώσουν τον παρακάτω πίνακα και να σχεδιάσουν το ανάλογο σχήμα.

Πλευρά	Πλευρά/Ύψος	Εμβαδόν
2	8	
4		16
3		15
	4	20

- Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να σχολιάσουν τον τρόπο που συμπλήρωσαν τον πίνακα και αν χρησιμοποίησαν κάποιο κανόνα. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει ανταπόκριση σε κανόνα, ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να σκεφτούν και να εξηγήσουν γιατί επέλεξαν τους συγκεκριμένους αριθμούς για να συμπληρώσουν τον πίνακα.
- Για να ενισχύσει τις αναμενόμενες εξηγήσεις καλεί κάποιον μαθητή στον υπολογιστή ή στον διαδραστικό πίνακα και κάνει το εξής πείραμα: Σχεδιάζει ένα ορθογώνιο με διαστάσεις 5 και 2. Ζητά από τους μαθητές να μετρήσουν τα ορθογώνια που περιέχει. Στη συνέχεια διπλασιάζει τη μια πλευρά του και από 2 την κάνει 4. Ζητά από τους μαθητές να υπολογίσουν το νέο πλήθος των ορθογωνίων που περιέχονται και να εξηγήσουν γιατί διπλασιάστηκαν. Επαναλαμβάνει το πείραμα και με άλλες μεταβολές των πλευρών του ορθογωνίου. Οι μαθητές αναμένεται να συνδέσουν τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου με το πλήθος των τετραγωνιδίων που περιέχονται.
- Ο εκπαιδευτικός επαναλαμβάνει το ίδιο πείραμα και για το ορθογώνιο τρίγωνο και για το πλάγιο παραλληλόγραμμο. Καλεί τους μαθητές να επαναλάβουν τα προηγούμενα σε ορθογώνιο πλέγμα με το μισό μήκος

πλευράς, να μετρήσουν τα τετραγωνίδια που περιέχονται σε κάθε σχήμα και να συγκρίνουν τα αποτελέσματα με τα προηγούμενα. Τέλος, ζητά από τους μαθητές να εξηγήσουν τις διαφορές των αποτελεσμάτων.

Δ΄ φάση: Τύποι υπολογισμού του εμβαδού γεωμετρικών σχημάτων

Ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν πόσα τετραγωνίδια περιέχει:

- Ένα ορθογώνιο με πλευρές 8 και 4 μονάδων (πλευρά τετραγωνιδίου).
- Ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 6 και 8 μονάδων.
- Ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο με μια πλευρά 10 μονάδων όταν η απέναντί της πλευρά βρίσκεται σε απόσταση (ύψος) 4 μονάδων.

Οδηγίες εφαρμογής - Αναμενόμενες αλληλεπιδράσεις και αποτελέσματα

- Ο εκπαιδευτικός δίνει οδηγίες στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τον υπολογιστή τάξης ή τον πίνακα προκειμένου να κάνουν πειράματα και να επαληθεύσουν τους υπολογισμούς τους.
- Ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να εκφράσουν λεκτικά κυρίως αλλά και αριθμητικά τους κανόνες που χρησιμοποίησαν για να βρουν το εμβαδόν. Για να διευκολύνει την έκφραση εξηγεί στους μαθητές τι καλούμε ύψος και τι βάση στα συγκεκριμένα σχήματα και τους παροτρύνει να χρησιμοποιούν αυτούς τους όρους στην έκφραση των αντίστοιχων κανόνων.
- Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να υπολογίσουν το εμβαδόν ορθογωνίων και πλαγίων παραλληλογράμμων χωρίς την παρουσία του πλέγματος, σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα.

Πλευρά	Πλευρά/ Ύψος	Εμβαδόν
3	5	
2		8
4		15
	4	18

- Ακολούθως καλούνται οι μαθητές να εφαρμόσουν τους κανόνες που διατύπωσαν στην προηγούμενη φάση και στη συνέχεια να επαληθεύσουν τα αποτελέσματα με τη βοήθεια του πλέγματος. Οι μαθητές ανακοινώνουν τα αποτελέσματα των υπολογισμών τους στην τάξη. Στον πίνακα επαναλαμβάνουν τους υπολογισμούς που έκαναν και παρουσιάζουν όλες τις σκέψεις τους στους συμμαθητές τους.
- *Επαναφορά στο αρχικό πρόβλημα:* Ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει ξανά στην τάξη το αρχικό πρόβλημα και ζητά από τους μαθητές να εξετάσουν αν τα δυο σχήματα είναι ισοδύναμα.
- Ο εκπαιδευτικός ανακεφαλαιώνει την προβληματική που αναπτύχθηκε στην τάξη, τις ακολουθούμενες στρατηγικές, τα χρησιμοποιούμενα μέσα και τα τελικά συμπεράσματα.

6. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται ορισμένα παραδείγματα προτάσεων ανάπτυξης μαθημάτων, μιας συνθετικής εργασίας, καθώς και στοιχεία από πραγματικές διδασκαλίες. Σκοπός αυτών των παραδειγμάτων είναι να γίνει σαφής η διδακτική προσέγγιση που υιοθετεί το νέο ΠΣ και τα θετικά στοιχεία που προκύπτουν από αυτή.

6.1 *Μια πρόταση διδακτικής διαπραγμάτευσης του θέματος "Μετασχηματισμοί" στη θεματική ενότητα "Γεωμετρία – Μέτρηση" της Β΄ Γυμνασίου.*

● Βασικές προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών:

Η έννοια του διανύσματος (διδάχθηκε στην ίδια τάξη)

Η έννοια του μέσου και της μεσοκάθετης ευθύγραμμου τμήματος (διδάχθηκε στην προηγούμενη τάξη)

Η έννοια της γωνίας και η μέτρηση των γωνιών (διδάχθηκε στην προηγούμενη τάξη)

Βασικές γεωμετρικές κατασκευές, όπως η κατασκευή παράλληλης προς δοθείσα ευθεία από σημείο εκτός αυτής, η κατασκευή μεσοκάθετης ευθύγραμμου τμήματος και η κατασκευή γωνίας με δεδομένο μέτρο (διδάχθηκαν στην προηγούμενη τάξη)

● Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα:

Γ5, Γ6, Γ7, Γ8 (βλέπε Πρόγραμμα Σπουδών Β΄ Γυμνασίου)

● Διδακτική πρόταση – Δραστηριότητες:

Η διδασκαλία των μετασχηματισμών στο Γυμνάσιο εντάσσεται στο γενικότερο πλαίσιο διδασκαλίας της Γεωμετρίας που περιλαμβάνει μια πιο θεωρητική, σε σχέση με το Δημοτικό, προσέγγιση στις γεωμετρικές έννοιες. Αυτή η προσέγγιση δίνει έμφαση στην ανάδειξη σχέσεων, την ακριβή διατύπωση ορισμών και ιδιοτήτων και την αιτιολόγηση των τελευταίων με εμπειρικά, κυρίως, μέσα.

Για το λόγο αυτό προτείνεται αρχικά η συσχέτιση της έννοιας του μετασχηματισμού με ορισμένες βασικές γεωμετρικές έννοιες και κατασκευές που γνωρίζουν οι μαθητές και περικλείουν την έννοια της κίνησης, όπως οι εξής:

α) Η κατασκευή της παράλληλης προς μια ευθεία από σημείο εκτός αυτής, με χρήση του κανόνα και του γνώμονα, περιλαμβάνει την παράλληλη μεταφορά (ολίσθηση) του γνώμονα κατά μήκος του κανόνα. Αυτή η διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία για το γενικό ορισμό της <u>παράλληλης μεταφοράς</u> ενός γεωμετρικού σχήματος στο επίπεδο και το χαρακτηρισμό της με τη βοήθεια ενός διανύσματος.

β) Η έννοια του μέσου και της μεσοκάθετης ενός ευθύγραμμου τμήματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως αφετηρία για το γενικό ορισμό της *ανάκλασης ως προς κέντρο και ως προς άξονα* αντίστοιχα, ενός γεωμετρικού σχήματος στο επίπεδο.

γ) Η περιστροφή ενός ευθύγραμμου τμήματος γύρω από το ένα άκρο του με την οποία αιτιολογείται η ιδιότητα της εξωτερικής γωνίας του τριγώνου (βλέπε συνθετική εργασία Νο 4 στο Πρόγραμμα Σπουδών Α΄ Γυμνασίου) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία για το γενικό ορισμό της *στροφής* ενός γεωμετρικού σχήματος στο επίπεδο και το χαρακτηρισμό της με τη βοήθεια μιας γωνίας.

Μετά από την πρώτη αυτή γνωριμία με τους συγκεκριμένους μετασχηματισμούς μπορεί να επιχειρηθεί μια γενικότερη προσέγγιση η οποία αναδεικνύει την έννοια του μετασχηματισμού ως απεικόνισης των σημείων ενός επιπέδου σε σημεία του επιπέδου. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία συνδέσεων με το θέμα "Κανονικότητες – Συναρτήσεις" που αποτελεί βασικό αντικείμενο διδασκαλίας στη θεματική ενότητα "Αριθμοί - Άλγεβρα" της ίδιας τάξης.

• Βασικός στόχος της διδασκαλίας των γεωμετρικών μετασχηματισμών στη Β΄ Γυμνασίου είναι να αποκτήσουν οι μαθητές ευχέρεια στην κατασκευή του σχήματος-εικόνας απλών γεωμετρικών σχημάτων μέσω μιας παράλληλης μεταφοράς ως προς δεδομένο διάνυσμα, μιας ανάκλασης ως προς δεδομένο κέντρο ή άξονα και μιας στροφής ως προς δεδομένη γωνία. Οι κατασκευές αυτές μπορούν και πρέπει να γίνουν με παράλληλη και ισορροπημένη χρήση γεωμετρικών οργάνων και λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας.

Άλλοι σημαντικοί στόχοι της διδασκαλίας είναι οι εξής:

• Να διερευνήσουν οι μαθητές την επίδραση που έχει κάθε είδος μετασχηματισμού σε ορισμένα βασικά στοιχεία ενός γεωμετρικού σχήματος, όπως είναι η θέση, ο προσανατολισμός, η μορφή, το μέγεθος κ.λπ.

• Να αποκτήσουν ευχέρεια στον εντοπισμό του διανύσματος μιας παράλληλης μεταφοράς, του κέντρου ή του άξονα μιας ανάκλασης και της γωνίας μιας στροφής, όταν δίνονται το αρχικό γεωμετρικό σχήμα και το σχήμα-εικόνα του ως προς τον αντίστοιχο μετασχηματισμό (π.χ. οι δραστηριότητες ΓΔ 4 και ΓΔ 5 του Π.Σ.).

• Να γνωρίσουν τον τρόπο χρήσης των γεωμετρικών μετασχηματισμών για τη ανακάλυψη και αιτιολόγηση ιδιοτήτων των σχημάτων (π.χ. η δραστηριότητα ΓΔ 6 του Π.Σ.)

Άλλες σχετικές δραστηριότητες που μπορεί να αξιοποιήσουν οι διδάσκοντες υπάρχουν στον Οδηγό του Εκπαιδευτικού, ενώ αντικείμενο ειδικής διαπραγμάτευσης πρέπει να γίνει η δυνατότητα διεξαγωγής ορισμένων από τις προηγούμενες δραστηριότητες στο καρτεσιανό επίπεδο (προβλέπεται στο Π.Σ. της Γ΄ Γυμνασίου).

6.2 *Μια πρόταση διδακτικής διαπραγμάτευσης της θεματικής ενότητας «Στοχαστικά Μαθηματικά – Στατιστική» της Α΄ Γυμνασίου.*

Η ενασχόληση των μαθητών με την Στατιστική είναι κάτι πολύ περισσότερο από την απλή εφαρμογή διαδικασιών υπολογιστικών όπως αυτή της εύρεσης της μέσης τιμής ή της διαμέσου ή των διαδικασιών κατασκευής ενός κυκλικού διαγράμματος. Για να εμπλακούν οι μαθητές σε διαδικασίες μάθησης της Στατιστικής και για να «κάνουν»

Στατιστική θα πρέπει να εμπλακούν με όλα τα στάδια - διαδικασίες επίλυσης ενός «Στατιστικού προβλήματος» (οδηγός εκπαιδευτικού σελ. 122):

- τον καθορισμό και την διατύπωση ενός ερωτήματος (ή ερωτημάτων)
- την συλλογή δεδομένων
- την οργάνωση, αναπαράσταση και ανάλυση των δεδομένων
- την ερμηνεία των αποτελεσμάτων και την εξαγωγή συμπερασμάτων με σκοπό να απαντηθεί το ερώτημα που τέθηκε.

Αυτή η προσέγγιση προσφέρει ένα πλαίσιο αλλά και ένα μέσο με το οποίο οι μαθητές μαθαίνουν πώς να οργανώνουν τα δεδομένα, να δημιουργούν γραφήματα, να υπολογίζουν την μέση τιμή, να αναλύουν τα δεδομένα με διάφορους τρόπους κλπ.

Η διατύπωση ερωτημάτων ίσως είναι αρχικά μια διαδικασία δύσκολη για τους μαθητές, λόγω έλλειψης σχετικών εμπειριών[2]. Όμως οι μαθητές θα πρέπει να έχουν ευκαιρίες να δημιουργήσουν τα δικά τους ερωτήματα, να αποφασίσουν ποια δεδομένα θα τους βοηθήσουν να απαντήσουν σε αυτά και να προσδιορίσουν μεθόδους συλλογής των δεδομένων. Γι' αυτό προτείνεται ο καθηγητής να διευκολύνει τους μαθητές και να διατυπώσει αυτός ένα γενικό ερώτημα και μέσα από συζήτηση στην τάξη να μπορέσουν οι μαθητές να διατυπώσουν και να καθορίσουν με ακρίβεια τα δικά τους ερωτήματα.

Αν και είναι σημαντικό και χρήσιμο να θέτει ο καθηγητής ερωτήσεις καθαρά μαθηματικής φύσεως (π.χ. που αφορούν μία διαδικασία, όπως η εύρεση της μέσης τιμής) είναι εξίσου σημαντικό να θέτει και ερωτήσεις στατιστικής φύσεως. Η έμφαση πρέπει να είναι στην ανάλυση του (στατιστικού) ερωτήματος που έχει τεθεί, στην ανάλυση των δεδομένων και στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Οι ερωτήσεις που θέτει ο καθηγητής και οι περιγραφές που κάνουν οι μαθητές πρέπει να επικεντρώνονται στο πλαίσιο της κατάστασης που μελετούν και στην οποία προσπαθούν να δουν τι μπορούν να μάθουν ή να συμπεράνουν από τα δεδομένα. Επιπλέον, οι ερωτήσεις, θα πρέπει να επικεντρώνονται σε ιδέες της Στατιστικής όπως η μεταβλητότητα, η σύνοψη των δεδομένων μέσω των μέτρων θέσης, ο τρόπος κατανομής των δεδομένων κλπ.
Παραδείγματα ερωτήσεων μπορεί να είναι τα παρακάτω:

- Τι μας λένε οι αριθμοί (ή τα γραφήματα) για την τάξη μας (ή κάποιον άλλο πληθυσμό);

[2] Η διατύπωση ερωτημάτων δεν υπάρχει ως μαθησιακός στόχος ή προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα στο προηγούμενο πρόγραμμα σπουδών του Δημοτικού ή του Γυμνασίου, ενώ με το τωρινό έχει ενταχθεί από το Δημοτικό.

- Αν ρωτήσουμε τους μαθητές μιας άλλης τάξης [ή ενός άλλου πληθυσμού ή μιας άλλης κατηγορίας (π.χ. ενήλικες)] πώς θα είναι τα δεδομένα;
  Πώς θα είναι αν ρωτήσουμε μια μεγαλύτερη (σε πλήθος) ομάδα;

- Πώς συγκρίνονται οι αριθμοί (ή τα σύμβολα) αυτού του γραφήματος με ένα άλλο γράφημα;

- Τι πληροφορίες μας δίνει (ή δεν μας δίνει) αυτός ο τύπος γραφήματος;

- Θα είναι διαφορετικά τα αποτελέσματα εάν… [είναι διαφορετικό το δείγμα ή ο πληθυσμός ή η κατάσταση (π.χ. διαφορετική ημέρα/ώρα/μήνας συγκέντρωσης των δεδομένων)]

- Πού (σε ποια περιοχή) συγκεντρώνονται τα δεδομένα; Πόσα από τα δεδομένα συγκεντρώνονται σε αυτή την περιοχή και πόσα δεν συγκεντρώνονται; Περίπου ποιο ποσοστό ανήκει / δεν ανήκει σ' αυτή την περιοχή;

- Τι μπορούμε να συμπεράνουμε με βάση τα δεδομένα;

- Τι άλλα νέα ερωτήματα μπορεί να προκύψουν απ' αυτά τα δεδομένα;

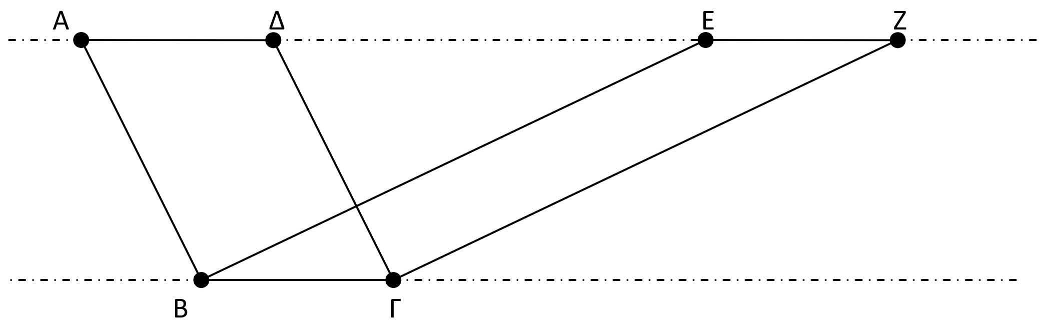
- Ποιόν μπορεί να ενδιαφέρουν τα δεδομένα που συγκεντρώσατε ή η στατιστική μελέτη που πραγματοποιήσατε (σε τι μπορεί να χρησιμεύσουν);

Ένα παράδειγμα δραστηριότητας με βάση το οποίο οι μαθητές μπορούν να συλλέξουν διάφορα δεδομένα για τον εαυτό τους και τους συμμαθητές τους είναι η διεξαγωγή μιας έρευνας προκειμένου να προσδιορίσουν τα «τυπικά» χαρακτηριστικά του μαθητή της Α΄ Γυμνασίου (οδηγός εκπαιδευτικού σελ 129). Πριν από την διεξαγωγή της έρευνας θα πρέπει οι μαθητές να καθορίσουν ακριβώς ποια χαρακτηριστικά μπορεί να θεωρηθούν «τυπικά» και ποια όχι. Επίσης θα πρέπει να καθορίσουν τους τρόπους και τις διαδικασίες συλλογής των δεδομένων. Τα δεδομένα που θα συλλέξουν θα πρέπει να τα οργανώσουν και να τα αναπαραστήσουν κατάλληλα ώστε μετά να μπορέσουν να τα αναλύσουν, να εξάγουν συμπεράσματα αλλά και να παρουσιάσουν τα αποτελέσματα της έρευνας τους.

6.3 *Μια πρόταση διαπραγμάτευσης συνθετικής εργασίας στη Β΄ Γυμνασίου με θέμα «"Παράδοξες" ιδιότητες των γεωμετρικών προτάσεων»*

Ένα πρόβλημα για το εμβαδόν των παραλληλογράμμων:

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΒΓΖ με την ίδια βάση ΒΓ και τις κορυφές τους πάνω σε δύο παράλληλες ευθείες.



Να εξετάσετε αν τα δύο παραλληλόγραμμα είναι ισοδύναμα, δηλαδή αν έχουν το ίδιο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ένα απόσπασμα από το έργο του Πρόκλου «Σχόλια στο α΄ βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη»

«Προκαλούσε πλήρη αμηχανία σε όλους εκείνους που αγνοούσαν την επιστήμη της Γεωμετρίας το γεγονός ότι τα παραλληλόγραμμα που έχουν την ίδια βάση και βρίσκονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες, πρέπει να είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. Διότι πώς είναι δυνατόν να παραμένει η ισότητα των εμβαδών, όταν τα μήκη των δύο άλλων πλευρών αυξάνονται επ' άπειρον; (αφού μπορούμε – προεκτείνοντας τις δύο παράλληλες – να αυξήσουμε όσο θέλουμε τα μήκη τους). Εύλογα θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς γιατί να παραμένει η ισότητα των εμβαδών όταν συμβαίνει αυτό. Διότι όταν το πλάτος είναι ίδιο (αφού η βάση είναι κοινή) και το μήκος μεγαλώνει, πώς γίνεται να μη μεγαλώνει και το εμβαδό; Αυτό το θεώρημα λοιπόν, και το αντίστοιχο για τα τρίγωνα, ανήκουν στα λεγόμενα "παράδοξα θεωρήματα" των Μαθηματικών….»

Μένουν έκπληκτοι λοιπόν οι περισσότεροι όταν μαθαίνουν ότι η αύξηση του μήκους των πλευρών δεν ανατρέπει την ισότητα των εμβαδών.

1) Θεωρείτε δικαιολογημένη την αμηχανία και την έκπληξη αυτών που αντιμετώπιζαν το συγκεκριμένο πρόβλημα;

2) Διαπιστώνετε ότι στο πρόβλημα αυτό εμφανίζεται κάποια αντίφαση ανάμεσα στην εποπτεία και τα αποτελέσματα των Μαθηματικών;

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

- *1η φάση*: Οι μαθητές διερευνούν τη γεωμετρικό πρόβλημα και χρησιμοποιούν διάφορα μέσα (μετρήσεις, υπολογισμούς, συλλογισμούς, κλπ) για να το λύσουν. Η δυνατότητα χρήσης εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας από τους μαθητές για την κατασκευή και χειρισμό των σχημάτων του αρχαίου κειμένου αναμένεται να εμπλουτίσει τον πειραματισμό των μαθητών καθώς θα τους επιτρέψει να ενεργοποιήσουν τις νοερές κινήσεις (στροφή και μετατόπιση αντίστοιχα) που περιγράφονται στις κατασκευές των σχημάτων αυτών. Στη συνέχεια οι μαθητές μελετούν το ιστορικό κείμενο και απαντούν στα ερωτήματα που το συνοδεύουν.

- *2η φάση:* Οι μαθητές παρουσιάζουν στην τάξη τα αποτελέσματα της εργασίας τους, ανταλλάσουν ιδέες και καταλήγουν σε ορισμένα συμπεράσματα για τη σχέση ανάμεσα σε ένα συμπέρασμα που φαίνεται διαισθητικά προφανές και στο συμπέρασμα που προκύπτει ως αποτέλεσμα της αιτιολόγησης των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

- Το ιστορικό κείμενο δίνει ένα παράδειγμα των γεωμετρικών προτάσεων που οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί αποκαλούσαν "παράδοξα θεωρήματα" επειδή το συμπέρασμά τους έρχεται σε άμεση αντίθεση με αυτό που υποδεικνύει η διαίσθηση και η κοινή λογική.
- Η δραστηριότητα δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να έλθουν σε επαφή με ένα παράδειγμα της διάστασης που υφίσταται πολύ συχνά ανάμεσα σε μια μαθηματική πρόταση και τη διαισθητική προφάνεια, και να εκτιμήσουν έτσι την εγκυρότητα που παρέχει το αποτέλεσμα της μαθηματικής απόδειξης.
- Η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας αναμένεται να ενισχύσει την εισαγωγή των μαθητών στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς οι οποίοι αποτελούν βασική καινοτομία στο νέο ΠΣ Γεωμετρίας του Γυμνασίου.

6.4 *Σχεδιασμός ενός μαθήματος Άλγεβρας Γ΄Γυμνασίου και καταγραφή στοιχείων της διδασκαλίας του από τον εκπαιδευτικό.*

Στην παράγραφο αυτή θα περιγραφεί μια πραγματική διδασκαλία στην Γ΄ Γυμνασίου, η οποία αφορά στην ενότητα Αλγεβρική παράσταση – ιδιότητες τετραγωνικών ριζών και έχει ως στόχο τη διερεύνηση και απόδειξη των σχέσεων $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}$, $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ και την εφαρμογή τους στην απλοποίηση – υπολογισμό της τιμής παραστάσεων.

Για το σχεδιασμό της διδασκαλίας λήφθηκαν υπόψη:

- οι στόχοι του ΠΣ,
- η τροχιά "αλγεβρικές παραστάσεις" σχετικά με τις προηγούμενες και τις επόμενες εμπειρίες – γνώσεις των μαθητών και η τροχιά "άρρητοι αριθμοί" που περιλαμβάνει την έννοια της τετραγωνικής ρίζας,
- η προτεινόμενη δραστηριότητα ΑΔ3 (ως πιθανώς αποτελεσματική στην επίτευξη των στόχων),
- η ανάπτυξή της δραστηριότητας ΑΔ3 στον οδηγό (για την πιθανή πορεία διαπραγμάτευσης και τις μαθηματικές διεργασίες).

Το μάθημα έγινε στον προβλεπόμενο από το ΠΣ χρόνο (3 ώρες).

Παρακάτω δίδονται τα σχετικά αποσπάσματα του ΠΣ και του οδηγού του εκπαιδευτικού.

Α6. Διερευνούν και αποδεικνύουν τις ιδιότητες των ριζών $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$. *Α7.* Χρησιμοποιούν τις τετραγωνικές ρίζες και τις ιδιότητές τους στην απλοποίηση παραστάσεων και στην επίλυση προβλημάτων.	**Αλγεβρική παράσταση** • Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών, μετασχηματισμοί *(3 ώρες)*	Η διερεύνηση και απόδειξη των ιδιοτήτων και η εφαρμογή τους σε απλές παραστάσεις είναι βασικός στόχος των δραστηριοτήτων. (*ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ3*)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Αργυράκης κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.1.Γ.

ΑΔ3	Η Μαρία υπολόγισε το γινόμενο $\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}$ και το βρήκε 15. Ο Γιάννης ισχυρίστηκε ότι δεν μπορεί το αποτέλεσμα να είναι ακέραιος. Πώς νομίζετε ότι οδηγήθηκε ο Γιάννης σε αυτό συμπέρασμα; Συμφωνείτε με το Γιάννη ή με τη Μαρία και γιατί;	**Α6**

Γ΄ Γυμνασίου: ΑΔ3

Η δραστηριότητα αυτή σχετίζεται με τις ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών, ειδικότερα την $\sqrt{\alpha\cdot\beta} = \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$. Επιπλέον, ίσως αναπτυχθεί και μια συζήτηση για τους άρρητους αριθμούς με αφορμή τη γνώμη του Γιάννη που υπονοεί ότι το γινόμενο δύο αριθμών με άπειρα δεκαδικά ψηφία (όπως οι $\sqrt{3}$ και $\sqrt{75}$) δεν θα είναι ακέραιος. Μια πιθανή πορεία της διερεύνησης των μαθητών περιλαμβάνει: αναζήτηση από τους μαθητές ερμηνειών για τις απόψεις που περιγράφονται στο σενάριο, εικασία για την ιδιότητα που ίσως ισχύει και διερεύνηση με παραδείγματα, ανάδειξη της ανάγκης μιας γενικής απόδειξης της ιδιότητας και δημιουργία της απόδειξης. Προτείνεται ο εκπαιδευτικός να επιλέξει το ρόλο του συντονιστή της συζήτησης, αφήνοντας χρόνο στους μαθητές να αναπτύξουν πρωτοβουλίες. Επεκτάσεις αυτής της πορείας θα μπορούσε να είναι η διερεύνηση του αν ισχύουν αντίστοιχες ιδιότητες για το άθροισμα, τη διαφορά και το πηλίκο αριθμών. Αυτή η διερεύνηση δίνει τη δυνατότητα να συζητηθούν η έννοια και ο ρόλος της αλγεβρικής απόδειξης και του αντιπαραδείγματος. Με αφορμή αυτό το πρόβλημα μπορούν να αναδειχθούν τα μειονεκτήματα της χρήσης υπολογιστή τσέπης και η αξία των ιδιοτήτων των ριζών (αφού, ο πολλαπλασιασμός $\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}$ με το κομπιουτεράκι δεν θα δώσει το σωστό αποτέλεσμα 15).

Διεργασίες διερεύνησης, εικασίας και ελέγχου, επιχειρηματολογίας και απόδειξης

Διεργασία επικοινωνίας με χρήση φυσικής γλώσσας και συμβόλων

Καταγραφή στοιχείων της διδασκαλίας από τον εκπαιδευτικό της τάξης

Πρώτο μάθημα (δίωρο) 22/9/2011

Μετά από μια σύντομη (10΄) εισαγωγή – επανάληψη της έννοιας της τετραγωνικής ρίζας, δίνεται στους μαθητές η δραστηριότητα:

Η Ελένη υπολόγισε το γινόμενο $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$ και το βρήκε 15. Ο Γιάννης ισχυρίστηκε ότι δεν μπορεί το αποτέλεσμα να είναι ακέραιος. Πώς νομίζετε ότι οδηγήθηκε ο Γιάννης σε αυτό συμπέρασμα; Ποια άποψη νομίζετε ότι είναι σωστή;

Μετά από 10΄ συζητήσεων ανά ομάδες (των 2–4 ατόμων, δηλαδή ανά 1 ή 2 θρανία), οι μισές ομάδες ήταν σε θέση να ερμηνεύσουν την άποψη του Γιάννη: "Αφού ο $\sqrt{3}$ και ο $\sqrt{75}$ είναι δεκαδικοί (κάποιοι λένε τη λέξη "άρρητοι", κάποιοι λένε "έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία") όταν τους πολλαπλασιάσουμε δεν μπορεί να βγει ακέραιος". Ομοίως, για την άποψη της Ελένης, λέει κάποιος μαθητής "$\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$ έκανε 3·75=225 και $\sqrt{225} = 15$" και ο Γιώργος σηκώνεται στον πίνακα και γράφει: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75} = \sqrt{225} = 15$.

Στην ερώτηση ποιο είναι σωστό, οι μαθητές λένε το $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75} = \sqrt{225} = 15$, αλλά υπάρχει μία τουλάχιστον ομάδα (μία το δήλωσε, αλλά η αίσθηση είναι ότι κι άλλοι μαθητές το σκέφτονταν) που "της φαινόταν σωστή" η άποψη του Γιάννη. Λένε "αν το υπολογίσουμε με το κομπιουτεράκι …" και ο εκπαιδευτικός υπολογίζει με το κομπιουτεράκι και γράφει στον πίνακα: $\sqrt{3}$=1,7320508, $\sqrt{75}$=8,660254 και 1,7320508 · 8,660254=14,999999. Κάποιοι λένε "δηλαδή 15".

Στην ερώτηση "αν είναι 15, τότε γιατί το κομπιουτεράκι έδωσε 14,999999", κάποιος μαθητής απαντάει "πέρσι μας είχατε πει ότι 14,999… με άπειρα εννιάρια είναι το 15". Ίσως κάποιοι μαθητές λέγοντας ότι είναι 15, να εννοούν ότι το 14,999999 είναι περίπου 15. Ο εκπαιδευτικός εξηγεί ότι το κομπιουτεράκι υπολογίζει κάνοντας στρογγυλοποιήσεις, δηλαδή κόβοντας δεκαδικά ψηφία και αυτό που δίνει σαν αποτέλεσμα δεν είναι 14,999… με άπειρα εννιάρια, αλλά 14,999999 με 6 εννιάρια. Δηλαδή, επειδή με το κομπιουτεράκι δεν έχουμε ακρίβεια, δεν ξέρουμε αν το σωστό είναι το 15 ή το 14,999999.

Οι μαθητές επιμένουν στο 15. Ο εκπαιδευτικός τους θέτει την ερώτηση αν είναι σίγουροι, και κάποιοι μαθητές λένε "όχι, να το ελέγξουμε". Κάποιοι προτείνουν να δοκιμάσουμε αν ισχύει το $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75} = \sqrt{225}$ χρησιμοποιώντας "ένα άλλο παράδειγμα με νούμερα που να υπολογίζονται πιο εύκολα". Ο Φώτης σηκώνεται στον πίνακα και δοκιμάζει αν το $\sqrt{4} \cdot \sqrt{36}$ είναι ίσο με το $\sqrt{4 \cdot 36} = \sqrt{144}$. Ο εκπαιδευτικός ρωτάει αν δοκιμάζοντας πολλούς αριθμούς θα είμαστε σίγουροι ότι ισχύει. Αναφέρει το παράδειγμα με τους διαιρέτες του 12 (δοκιμάζοντας τους 1,2,3,4,6 βρίσκουμε ότι είναι διαιρέτες του 12, αλλά αυτό προφανώς δεν σημαίνει ότι όλοι οι αριθμοί είναι διαιρέτες του 12). Εξηγεί έτσι την ανάγκη μιας γενικής απόδειξης και παρουσιάζει την αλγεβρική απόδειξη της ιδιότητας $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$. Τέλος αναφέρεται στην ιδιότητα με το πηλίκο ριζών.

Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός θέτει το ερώτημα αν ισχύει η ιδιότητα $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$. Κάποιοι μαθητές ισχυρίζονται πως ισχύει και κάποιοι πως δεν ισχύει. Ο Σωτήρης λέει ότι αν δοκιμάσουμε αριθμούς δεν βγαίνει. Ο εκπαιδευτικός γράφει το παράδειγμα $\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{9+16}$ και διαπιστώνουν ότι δεν ισχύει. Ρωτάει αν έτσι αποδείξαμε ότι δεν ισχύει η ιδιότητα $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$, κάποιος μαθητής απαντάει πως δεν αποδείξαμε ότι δεν ισχύει αλλά ότι υπάρχουν αριθμοί που δεν ισχύει. Ο εκπαιδευτικός εξηγεί ότι αν για ένα παράδειγμα δεν ισχύει, αυτό σημαίνει ότι δεν ισχύει η δήλωση "για όλους τους αριθμούς ισχύει $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$"…

<u>Δεύτερο μάθημα (1 ώρα), δύο μέρες μετά.</u>

Λύνονται κάποιες ασκήσεις (με αφορμή εκείνες που δυσκόλεψαν τους μαθητές από την εργασία στο σπίτι) σχετικά με την εφαρμογή των ιδιοτήτων στον υπολογισμό και την απλοποίηση παραστάσεων που περιέχουν ρίζες, όπως η 3β και η 11 του βιβλίου. Μέσα από αυτή τη συζήτηση έγινε και αξιολόγηση της επίτευξης των στόχων (παρατηρώντας τις δυσκολίες των μαθητών, τις απαντήσεις τους κλπ).

<u>Σχολιασμοί του εκπαιδευτικού πάνω στο πρώτο δίωρο:</u>

Η εξέλιξη νομίζω επιβεβαιώνει ότι η δραστηριότητα είναι μέσα στα πλαίσια των ικανοτήτων των μαθητών, είναι ενδιαφέρουσα (συμμετείχαν όλοι στις συζητήσεις των ομάδων) και είναι αποδοτική για τους στόχους για τους οποίους στήθηκε (διερεύνηση της ιδιότητας $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$ και της ανάγκης απόδειξής της, επεκτάσεις στους άρρητους και τη χρήση υπολογιστή τσέπης).

Αλλά υπάρχουν ερωτήματα που με προβλημάτισαν μετά το μάθημα:

α) Στη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης συμμετείχαν με τον ένα ή τον άλλο τρόπο οι μισοί μαθητές. Οι άλλοι μισοί τι είχαν κάνει στις ομάδες τους; Μέχρι που έφτασαν τη διερεύνησή τους; Δεν πρόλαβα να συζητήσω με όλες τις ομάδες ώστε να ξέρω τι έκανε ο καθένας.

β) Στη συζήτηση για το 14,999999 που δίνει το κομπιουτεράκι μίλαγα πολύ και την απόδειξη της ιδιότητας την παρουσίασα μόνος μου, χωρίς να αφήνω πρωτοβουλίες στα παιδιά. Μήπως θα μπορούσε να γίνει αλλιώς; Ίσως ζητώντας από τα παιδιά να εξηγήσουν αν το κομπιουτεράκι μας δίνει αποτελέσματα ακριβή για να κρίνουμε αν η ιδιότητα είναι σωστή. Για την απόδειξη, ίσως θα μπορούσα να ζητήσω από τα παιδιά να σκεφτούν. Δεν ξέρω αν θα είχαν κάποια ιδέα για το πώς θα μπορούσαν να δικαιολογήσουν ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει για όλους τους θετικούς αριθμούς.

6.5 *Σχεδιασμός ενός μαθήματος Άλγεβρας Α΄ Γυμνασίου και καταγραφή στοιχείων της διδασκαλίας του από τον εκπαιδευτικό.*

Θεματική ενότητα: Αριθμοί-Άλγεβρα (ΑΑ)

Βασικό θέμα: κανονικότητες / συναρτήσεις (4 ώρες)

Προηγούμενες γνώσεις των μαθητών: Οι μαθητές έχουν διδαχθεί την έννοια της κανονικότητας και έχουν διερευνήσει αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα (κανονικότητες). Δες **ΠΣ** ΣΤ Δημοτικού: κανονικότητες / συναρτήσεις (3 ώρες), σελ. 164, ΑΔ1 (ποιος είναι ο $8^{ος}$ όρος της ακολουθίας 720, 360, 120, …;), σελ. 174, και από **βιβλίο μαθητή**: Δ 2, σελ. 129 (αριθμητικό μοτίβο) και Δ 2 (γεωμετρικό μοτίβο), σελ. 131.

Υποστηρικτικό υλικό: ΠΣ (ΠΜΑ σελ. 39, δραστηριότητα ΑΔ1, σελ. 46) και Οδηγός Εκπαιδευτικού (κανονικότητες-συναρτήσεις, σελ. 63, 64, 65)

$1^{ο}$ μάθημα

Πρόβλημα 1 (αριθμητικά patterns)

Συμπλήρωσε τον επόμενο όρο στις παρακάτω ακολουθίες αριθμών και βρες ένα κανόνα που να περιγράφει την κανονικότητα (pattern):

(α) 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

(β) 3, 8, 13, 18, 23, ...

***(γ) 1, 3, 7, 15, 31,** ...*

ΠΜΑ (Α1): *Διερευνούν αριθμητικές και γεωμετρικές κανονικότητες και διατυπώνουν το γενικό τους όρο λεκτικά, συμβολικά και με μια αλγεβρική αναπράσταση.*

Καταγραφή στοιχείων από την διαπραγμάτευση στην τάξη

Δίνονται κάποιες διευκρινίσεις και κατόπιν οι μαθητές εργάζονται ατομικά ή ομαδικά για επαρκές χρονικό διάστημα. Στη συνέχεια ακολουθεί συζήτηση/διαπραγμάτευση με ολόκληρη την τάξη και ένας μαθητής από μια ομάδα εξηγεί με ποιο τρόπο το αντιμετώπισαν.

7 ***Μ1***[3]*: παρατηρήσαμε ότι από το 1 για να πάμε στο 3 θέλουμε 2, μετά από το 3 στο 7 θέλουμε 4, μετά 8, μετά 16, δηλαδή οι αριθμοί διπλασιάζονται ... έτσι η επόμενη διαφορά θα είναι 32, οπότε 31+32=63*

8 Δ: συμφωνείτε; υπάρχει αντίρρηση;

*9 **Μ2**: δεν το κατάλαβα ακριβώς, μπορεί να το επαναλάβει;*

*10 **Μ3**: να το εξηγήσω στον πίνακα;* [είναι μαθητής από την ομάδα του Μ1]

11 Δ: ναι έλα

*12 **Μ3**:* [γράφει στον πίνακα κάτω από τους όρους τις διαφορές ως εξής:]

1 3 7 15 31 ...

2 4 8 16 32

*13 **Μ2**: α ναι ... και προσθέτουμε το 32 ... εντάξει*

14 Δ: ωραία, λοιπόν συμπέρασμα ... ποιος θα το διατυπώσει;

[3] $Μ_i$: ο i μαθητής, Δ: δάσκαλος

*15 **Μ2**: για να βρούμε ένα αριθμό ... εντάξει τον επόμενο αριθμό, αφαιρούμε τους δύο τελευταίους και προσθέτουμε το διπλάσιο στον τελευταίο ... παράδειγμα ο επόμενος του 63 θα είναι ... 32×2=64 δηλαδή 63+64=127*

Ουσιαστικά εδώ απαντάται το ερώτημα και θα μπορούσε να τελειώσει η δραστηριότητα, αλλά δάσκαλος θεωρεί ότι πρέπει να αναδειχθούν όλες οι υποκείμενες έννοιες και συνεχίζει με ένα επιπλέον ερώτημα με σκοπό να οδηγηθούν οι μαθητές σε μια ***γενίκευση*** και στην ***εισαγωγή συμβολισμού***.

*16 Δ: εντάξει ... τώρα ας εξετάσουμε ένα άλλο ερώτημα: **αν γνωρίζουμε κάποιον όρο της ακολουθίας, πως μπορούμε να βρούμε τον επόμενό του;** Σκεφθείτε το και το συζητάμε σε λίγο ...* [δίνεται επαρκής χρόνος για να επεξεργαστούν οι μαθητές το ερώτημα και μετά γίνεται ΣΟΤ] *... ναι .. τι θα κάνουμε;*

*17 **Μ4**: νομίζω θα προσθέσουμε πάλι τη διαφορά και θα τον βρούμε*

18 Δ: συμφωνείτε;

*19 **Μ5**: σωστό φαίνεται, αλλά κάτι ... δηλαδή θα ξέρουμε όλους τους αριθμούς πριν;*

*20 **Μ6**: αν τους ξέρουμε όλους το κάνουμε όπως στο σχήμα με τις αφαιρέσεις*

*21 **Μ7**: θα ξέρουμε τους προηγούμενους όρους ή όχι; ... αν όχι είναι δύσκολο*

*22 Δ: θα κάνω το ερώτημα λίγο πιο συγκεκριμένο: αν στην ακολουθία μετά το 127 ακολουθούν κάποιοι όροι και μετά είναι ο **α*** [γράφει 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, ..., **α**, ...] *και θέλω να βρω τον επόμενο του **α** ...*

*26 **Μ8**: δύσκολο, αφού δεν ξέρουμε τον αριθμό*

*29 **Μ10**: μα δεν ξέρουμε τους προηγούμενους πως θα ξέρουμε*

*28 **Μ8**: αα ... πρέπει να ξέρουμε και τον προηγούμενό του για να βρούμε τη διαφορά*

*29 Δ: ακριβώς ... λοιπόν το ερώτημα είναι: **στην ακολουθία 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, ..., α, ... ποιος είναι ο επόμενος του α**; ... σκεφθείτε το πιο προσεκτικά*

Επειδή οι μαθητές έχουν δυσκολία να μπορέσουν να βρουν τον επόμενο του α, στη ΣΟΤ που ακολουθεί ο δάσκαλος τους εξηγεί ότι πρέπει να βρουν ένα **κανόνα** που να παράγει τον επόμενο αριθμό αν ξέρουν τον προηγούμενό του. Συζητείται τι σημαίνει κανόνας (πρέπει να παράγει *κάθε* αριθμό από τον προηγούμενό του) και για να τον βρουν πρέπει να παρατηρήσουν προσεκτικά όλους τους όρους της ακολουθίας για να διαπιστώσουν με ποιο τρόπο κάθε αριθμός παράγεται από τον προηγούμενό του. Οι μαθητές εργάζονται ομαδικά ή ατομικά (οι περισσότεροι σε ομάδες των 2 , 3 ή 4 μαθητών και ανταλλάσσουν απόψεις μεταξύ τους ή με τον δάσκαλο). Μετά κάποιοι είναι έτοιμοι να προτείνουν τον κανόνα τους σε ολόκληρη την τάξη.

*39 Μ9: κάθε αριθμό τον **πολλαπλασιάζουμε με το 2 και μετά προσθέτουμε το 1***

*40 **Μ10**:* [της ίδιας ομάδας, στον πίνακα] *κι αυτό το γράφουμε έτσι **2·( )+1***

*41 **Μ11**: η παρένθεση τι είναι;*

42 Μ9: ο προηγούμενος αριθμός και όλο μαζί ο επόμενος

43 ***Μ11****: η* ***παρένθεση*** *τι χρειάζεται;*

51 Δ: ... εντάξει εδώ θα μπορούσε και να μη χρησιμοποιηθεί, αλλά πως θα φαινόταν ότι το 2 πολλαπλασιάζεται με τον προηγούμενο αριθμό

Η γενίκευση με τη χρήση άτυπου συμβολισμού προκαλεί ΣΟΤ για το ρόλο της παρένθεσης όπου αρκετοί μαθητές εκθέτουν τις απόψεις τους για αν είναι απαραίτητη και προσπαθούν με την καθοδήγηση του δασκάλου να φθάσουν σε συναίνεση που εδώ το κατορθώνουν. Ο άτυπος συμβολισμός γίνεται πιο επίσημος με τη χρήση συμβόλων, όπως φαίνεται στη συνέχεια.

52 ***Μ13*** [άλλη ομάδα]: *εμείς έχουμε βρει κάτι παρόμοιο χωρίς παρένθεση ... έχουμε βάλει το α και ο επόμενος του α θα είναι ο* ***2·α+1*** [συμπληρώνεται στον πίνακα]

53 Δ: τι λέτε είναι εντάξει; τι συμβολίζει ο α; πως θα το ελέγξουμε ότι ο κανόνας που γράφτηκε με σύμβολα είναι εντάξει; ... όχι εσείς που το βρήκατε ... κάποιος άλλος.

54 ***Μ14****: νομίζω το α είναι ο αριθμός και αυτό* [εννοεί το 2·α+1] *ο επόμενός του ... θα το ελέγξουμε βάζοντας στη θέση του α τον 1023 για να βρούμε τον επόμενό του*

55 Δ: εντάξει έτσι θα βρούμε τον επόμενο του 1023, ελέγχουμε όμως ότι ο κανόνας είναι σωστός;

56 ***Μ15****: να βάλουμε όλους τους αριθμούς κι αν βγαίνει*

57 Δ: αυτό είναι καλύτερο ... ποιος θα μας πει τι ακριβώς πρέπει να κάνουμε;

58 ***Μ16****: θα βάλουμε στη θέση του α π χ τον 7 και θα κάνουμε πράξεις, δηλαδή 2·7+1=15 εντάξει βγαίνει ο επόμενός του*

59 Δ: μόνο για το 7;

60 ***Μ*** [πολλοί μαζί]: *για όλους τους αριθμούς*

Το επεισόδιο αυτό ολοκληρώνεται με τον έλεγχο του προτεινόμενου κανόνα για να διαπιστωθεί ότι δουλεύει για όλους τους αριθμούς. Οι μαθητές εργάζονται και παράγουν όρους της ακολουθίας.

61 ***Μ17****: εγώ βρήκα ένα άλλο «****κανόνα****» π χ για τον 2^o πρέπει να τριπλασιάσω το 1, βγαίνει 3, μετά τριπλασιάζω το 3, δεν βγαίνει 7 πρέπει να αφαιρέσω 2, μετά τριπλασιάζω το 7 δεν βγαίνει 15 πρέπει να αφαιρέσω 6 ... είναι πιο δύσκολο ... τριπλασιάζω και αφαιρώ, αλλά όχι τον ίδιο αριθμό κάθε φορά ... είναι σωστό;*

62 Δ: τι λέτε παιδιά, πως σας φαίνεται ο «κανόνας» του συμμαθητή σας

63 ***Μ18****: πως θα ξέρουμε τι θα αφαιρούμε κάθε φορά*

64 ***Μ19****: είναι πιο πολύπλοκος από τον προηγούμενο*

65 Δ: εντάξει έτσι είναι, ο κανόνας πρέπει να εφαρμόζεται με τον ίδιο τρόπο για όλους τους όρους, όμως μπορείς να τον επεξεργαστείς περισσότερο και ενδεχομένως να βρεις κάτι πιο συγκεκριμένο και τότε το ξανασυζητάμε ...

Ο δάσκαλος δεν αποθαρρύνει το μαθητή που θεωρεί ότι βρήκε άλλο «κανόνα», αλλά τον προτρέπει να τον ελέγξει περισσότερο μήπως μπορέσει να βρει ένα ενιαίο τρόπο που να παράγει όλους τους όρους.

66 ***Μ20****: εδώ στο προηγούμενο με την* ***παρένθεση*** *... νομίζω πως χρειάζεται η παρένθεση, γιατί πως θα βρούμε τον* ***επόμενο*** *του 2·α+1;*

67 Δ: καλή η ιδέα σου ... ο συμμαθητής σας βάζει το εξής σημαντικό ερώτημα ***ποιος είναι ο επόμενος του 2·α+1; σκεφτείτε το***

Η ιδέα του μαθητή να βρει τον επόμενο του 2·α+1 και να το συσχετίσει με την παρένθεση θέτει δύο νέα σημαντικά ζητήματα: (α) αναδεικνύει την αναγκαιότητα της παρένθεσης και (β) τη χρήση της αλγεβρικής παράστασης 2·α+1 ως μαθηματικού αντικειμένου, αφού την χρησιμοποιεί σαν ‘ένα αριθμό’ και προσπαθεί να βρει τον επόμενό του. Δίνεται χρόνος στους μαθητές να επεξεργαστούν το ερώτημα και μετά ακολουθεί ΣΟΤ:

68 ***Μ21****: ο επόμενος του 2·α+1 είναι* ***2·(2·α+1)+1*** [συμπληρώνεται στον πίνακα]

69 ***Μ11****: γιατί έβαλε παρένθεση, πριν δεν είπαμε ότι αν θέλουμε βάζουμε;*

Ενώ η συζήτηση εξελίσσεται ομαλά και θεωρούμε ότι έχει διευκρινιστεί ένα ζήτημα αυτό δεν είναι καθόλου βέβαιο για κάποιους μαθητές, όπως φαίνεται από το ερώτημα του Μ11. Έτσι ενώ μερικοί μαθητές μπόρεσαν να βρουν και να συμβολίσουν τον επόμενο του 2·α+1 με ένα πιο σύνθετο συμβολισμό, για κάποιους άλλους υπάρχουν ακόμα δυσκολίες σε ζητήματα, που θεωρούνται πιο εύκολα όπως της παρένθεσης. Μετά από ΣΟΤ για το ρόλο της παρένθεσης στη νέα κατάσταση ο μαθητής φαίνεται εν μέρει να έχει ξεκαθαρίσει το θέμα αυτό:

79 ***Μ11****: ξέρετε κάτι, νομίζω ότι πρέπει να βάζω πάντα για να είμαι σίγουρος*

Ενώ για 2η φορά φαίνεται να κλείνει το θέμα μια νέα ιδέα ενός μαθητή ανοίγει ένα καινούργιο ζήτημα, η εύρεση του προηγούμενου όρου του α, που δεν ήταν στις προθέσεις του δασκάλου να το ρωτήσει. Έτσι σ’ αυτή τη διδασκαλία σε πολλά σημεία φαίνεται να επαληθεύεται η φράση του Simon ότι «*το μόνο που μπορείς να αναμένεις από τους μαθητές είναι το αναμενόμενο*».

80 ***Μ20****: σκέφτηκα κάτι άλλο εδώ στους αριθμούς που έχουμε* [δείχνει την ακολουθία όπως έχει τροποποιηθεί: **1, 3, 7, 15, 31, ..., α, 2·α+1, 2·(2·α+1)+1, ...**] *... μπορούμε να βρούμε τον προηγούμενο του α;*

81 Δ: α πολύ ενδιαφέρον το ερώτημά σου ... όμως επειδή δεν μας παίρνει ο χρόνος το ερώτημα μπαίνει για ***διερεύνηση*** *στο σπίτι: το ερώτημα είναι* ***ποιος είναι ο προηγούμενος του α;***

82 [αρκετοί μαθητές]: *δε γίνεται να συνεχίσουμε τώρα;*

83 Δ: έχουμε ξεφύγει αρκετά από το χρόνο, ήταν ενδιαφέρουσα η συζήτηση ... κάτι άλλο που είχα ... δε θα το προλάβουμε ... θα το εξετάσουμε όμως την άλλη φορά

Ενώ το ερώτημα του μαθητή μετατίθεται από το δάσκαλο ως εργασία στο σπίτι (δεν απαντάει γρήγορα ο ίδιος ο δάσκαλος, γιατί έτσι θα ακύρωνε όλη τη φιλοσοφία του διδακτικού μοντέλου που αναπτύξαμε, παρόλο που μερικές φορές μπορεί να βρεθεί σ’ αυτή στη θέση να γίνει πιο παραδοσιακός) παρατηρούμε ότι οι μαθητές ενδιαφέρονται να συνεχίσουν την διερεύνηση του προβλήματος, δείχνοντας έτσι μια αποδοχή του συγκεκριμένου τόπου εργασίας στην τάξη. Παρά την πρόθεση του δασκάλου να ολοκληρώσει το πρόβλημα εδώ, ένα νέο ερώτημα ανατρέπει την κατάσταση και φυσικά ο δάσκαλος δεν μπορεί να το ξεπεράσει χωρίς να το θέσει στην τάξη.

84 ***M12****: να ρωτήσω κάτι άλλο ... σ' αυτή τη σειρά αν συνεχίζαμε θα βρίσκαμε αριθμούς ... εδώ που βάλαμε* **$2\cdot\alpha+1$** *και μετά* **$2\cdot(2\cdot\alpha+1)+1$** *αυτά δεν είναι πολύπλοκα; ... δεν είναι αριθμοί ... είναι πράξεις αριθμών*

85 Δ: θέλει κάποιος να απαντήσει στο ερώτημα του συμμαθητή σας;

87 ***M21****: δεν είμαι σίγουρος, αλλά αυτές οι πράξεις δίνουν ένα αποτέλεσμα ... ένα αριθμό, δηλαδή και πάλι ένα αριθμός θα είναι*

88 ***M12****: και γιατί δεν γράφονται σαν αριθμός;*

89 ***M21****: γιατί δεν ξέρουμε τον α ... αν τον ξέραμε π χ αν ήταν ο 50 ξέρω γω τότε θα ήταν $2\cdot 50+1 = 100+1$, 101 και ο άλλος 2 φορές το 101 συν 1*

Ο μαθητής έθιξε ένα πολύ σοβαρό ζήτημα στη μάθηση της άλγεβρας: τον χειρισμό μιας αλγεβρικής παράστασης σαν μαθηματικό αντικείμενο. Ένα σημαντικό ζήτημα στην άλγεβρα είναι να μπορεί ο μαθητής να δει μια παράσταση και σαν μια διαδικασία και σαν το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας. Ο συγκεκριμένος μαθητής φαίνεται ότι δεν το έχει κατακτήσει ακόμα αυτό το στάδιο. Βλέπει μόνο τη διαδικασία σε αντίθεση με τον συμμαθητή του που φαίνεται να το κατανοεί σε μεγαλύτερο βαθμό. Μια απάντηση σ' αυτό προσπαθεί να δώσει άλλος μαθητής όπως φαίνεται παρακάτω:

91 ***M22****: δεν θα μπορούσαμε αφού δεν ξέρουμε ακριβώς ποιος είναι ο $2\cdot\alpha+1$ και αφού θα είναι ένας αριθμός να τον συμβολίσουμε με β π χ και αυτόν* [δείχνει τον $2\cdot(2\cdot\alpha+1)+1$] *με γ* [και σημειώνει στην ακολουθία $2\cdot\alpha+1=\beta$ και $2\cdot(2\cdot\alpha+1)+1=\gamma$].

92 Δ: ο συμμαθητής σας λέει να τα συμβολίσουμε έτσι; συμφωνείτε ότι μ' αυτό;

93 ***M15****: γιατί το κάνουμε αυτό ... κι αν το κάνω αυτό μπορώ να βάλω ότι γράμμα*

94 ***M22****: νομίζω ναι*

95 ***M7****: μια ερώτηση δεν ξέρω αν είναι σωστή ... δηλαδή ο επόμενος θα είναι ο δ;*

96 Δ: καταλάβατε τι ρωτάει ο συμμαθητής σας;

97 ***M****: ...*

98: Δ: λοιπόν νομίζω ότι θεωρείς τα γράμματα με τη σειρά της αλφαβήτου που είπε ο συμμαθητής σου σαν τους διαδοχικούς αριθμούς της ακολουθίας;

99 ***M7****: κάτι τέτοιο*

100 ***M22****: όχι μπορούμε να βάλουμε ότι γράμμα θέλουμε*

101 Δ: έτσι είναι, τα γράμματα είναι σύμβολα, συμβολίζουν αριθμούς, δεν έχουν σχέση με τη σειρά τους στην αλφάβητο

103 ***M7****: γιατί να βάλουμε το β και το γ εδώ και να μην το αφήσουμε έτσι;*

104 Δ: μπορεί να απαντήσει κάποιος στο ερώτημα αυτό;

105 ***M22****: ...για διευκόλυνση*

106 Δ: εντάξει ... θα προσπαθήσω να δώσω και μια εξήγηση ... εδώ στην ακολουθία τι κάναμε για να βρούμε τον επόμενο του 31 σύμφωνα με τον κανόνα μας;

*107 **Μ11**: πολλαπλασιάζω με το 2 και προσθέτω 1 δηλαδή ...63*

108 Δ: ακριβώς, συγκεκριμένα 2·31+1 αυτή είναι η διαδικασία, δεν μοιάζει με το 2·α+1 όπου στη θέση του α θέσαμε το 31; ... λοιπόν το 2·31+1=63 δηλαδή το 63 είναι ένα σύμβολο που δείχνει το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας ... έτσι και εδώ το 2·α+1 έχει κάποιο αποτέλεσμα που μπορεί να συμβολιστεί με κάτι ... ας πούμε το β, το ξέρουμε ποιο ακριβώς είναι το β;

*109 **Μ15**: όχι*

110 Δ: γιατί;

*111 **Μ4**: γιατί δεν ξέρουμε το α*

112 Δ: καθώς μεταβάλλεται λοιπόν το α τι άλλο μεταβάλλεται;

*113 **Μ13**: το αποτέλεσμα ... το β δηλαδή*

114 Δ: εδώ στο 2·α+1=β έχουμε λοιπόν δύο μεταβλητές τις α και β ... ποια εξαρτάται από την άλλη;

*115 **Μ*** [αρκετοί μαθητές] *το β από το α*

Το τελευταίο επεισόδιο του μαθήματος για το *αν* και *γιατί* μπορούμε να συμβολίσουμε μια παράσταση με ένα άλλο γράμμα, ανέδειξε το συναρτησιακό χαρακτήρα της αλγεβρικής παράστασης αφού *για κάθε τιμή της μεταβλητής α έχουμε ένα διαφορετικό αποτέλεσμα που το συμβολίζουμε με το β* και αναγνωρίστηκε το α σαν ανεξάρτητη και το β σαν εξαρτημένη μεταβλητή. Η συζήτηση αποτέλεσε ένα ουσιαστικό μέρος της μαθησιακής διαδικασίας, όπου η γνώση ήταν στοιχείο διαπραγμάτευσης όλης της τάξης.

Το μάθημα ολοκληρώνεται με ανακεφαλαίωση από το δάσκαλο και με το ερώτημα προς διερεύνηση στο σπίτι, που είχε θέσει ένας μαθητής:

«*στην ακολουθία 1, 3, 7, 15, 31, ..., α, 2·α+1, 2·(2·α+1)+1,* ... ποιος είναι ο προηγούμενος του α;»

2^o μάθημα

Καταγραφή στοιχείων από τη διπαραγμάτευση στην τάξη

Εξετάζεται το προηγούμενο ερώτημα και μια νέα ενδιαφέρουσα συζήτηση αναπτύσσεται.

118 Δ: εντάξει ... ποιος θα μας πει πως εργάστηκε

*119 **Μ17**: λοιπόν είδα πρώτα τους αριθμούς ... το 1, 3, 7, 15, 31 και σκέφτηκα πως από κάποιον θα βρω όχι τον επόμενό του, αλλά τον προηγούμενό του και είδα ότι π χ για τον προηγούμενο του 15 ότι είναι **το μισό** ... 7,5 ... μετά **μείον 0,5** και βγαίνει το 7*

120 Δ: αυτό έλεγξες αν γίνεται για όλους τους αριθμούς;

*121 **Μ17**: ναι γίνεται για το 31 π χ είναι ... το μισό του 15,5 μείον 0,5 ... 15, και για τους άλλους γίνεται ... όμως για τον α τι θα πω **το μισό του α και μετά μείον 0,5**;*

*122 **Μ18**: ναι βγαίνουν όλοι οι αριθμοί, είναι σωστό*

123 Δ: πως θα συμβολίζουμε τώρα τον προηγούμενο του α; ποιος μπορεί να πει;

*124 **Μ**: (αρκετοί μαθητές) α δια 2 μείον 0,5*

*125 Δ: δηλαδή να γράψω **α:2-0,5*** [το γράφει στον πίνακα]

*126 **Μ**: (αρκετοί μαθητές) ναι*

*127 **Μ20**: νομίζω το α:2 θέλει παρένθεση γι' αυτό το έγραψα αλλιώς* $\frac{\alpha}{2}-0{,}5$ *...*

*128 **Μ18**: το ίδιο είναι*

129 Δ: εντάξει ... ίδιο είναι ... για την παρένθεση που είπε ο συμμαθητής σας είναι σωστό;

Υπάρχει διαφωνία για τον αν απαιτείται ή όχι παρένθεση και ένας μαθητής δικαιολογεί τελικά τη άποψή του κλείνοντας τη συζήτηση:

*132 **Μ4**: δεν χρειάζεται γιατί και με παρένθεση και χωρίς παρένθεση προηγείται η διαίρεση*

133 Δ: έχει κάποιος αντίρρηση ... λοιπόν ας ανακεφαλαιώσουμε ... έχουμε δύο παραστάσεις που δίνουν τον προηγούμενο του α τις α:2-0,5 και $\frac{\alpha}{2}-0{,}5$ *... μήπως έχουμε και μια λίγο διαφορετική ... ως προς το γράψιμο ...*

*134 **Μ10**: δεν μπορούμε να το γράψουμε και* $\frac{\alpha-0{,}5}{2}$*;*

135 Δ: τι λέτε; Έχει δίκιο ο συμμαθητή σας; Είναι το ίδιο με τα προηγούμενα;

Υπάρχει διαφωνία, μερικοί θεωρούν ότι είναι ίδιο με τα προηγούμενα, άλλοι όχι.

*138 **Μ11**: νομίζω είναι ίδιο, δεν είμαι σίγουρος όμως*

*139 **Μ12**: δεν είναι το ίδιο γιατί ... η προτεραιότητα των πράξεων αλλάζει ... εδώ* [εννοεί την $\frac{\alpha-0{,}5}{2}$] *γίνεται πρώτα η αφαίρεση και μετά η διαίρεση, ενώ εδώ* [εννοεί την $\frac{\alpha}{2}-0{,}5$] *γίνεται πρώτα η διαίρεση*

*138 **Μ11**: αφού δεν έχει παρένθεση γιατί γίνεται πρώτα η αφαίρεση;*

Ανοίγει και πάλι το ζήτημα της παρένθεσης, που είχε ανοίξει από τον ίδιο μαθητή στο προηγούμενο μάθημα. Εδώ αναδεικνύονται ζητήματα που για το δάσκαλο είναι τετριμμένα, αλλά για μερικούς μαθητές δεν είναι καθόλου έτσι. Ο μαθητής αυτός πρέπει να κατανοήσει ότι η παράσταση $\frac{\alpha-0{,}5}{2}$ είναι ισοδύναμη με την (α-0,5):2 και όχι με τις $\frac{1}{2}$α-0,5 ή $\frac{\alpha}{2}-0{,}5$. Μετά από τη συζήτηση για τις παρενθέσεις το θέμα επανέρχεται στο ερώτημα του δασκάλου [133] και σε ένα «άλλο» τρόπο αντιμετώπισης που προτείνει ένας μαθητής.

144 ***M9****: νομίζω ότι μπορεί να γραφτεί* $\frac{1}{2}$ *α-0,5 γιατί το* $\frac{\alpha}{2}$ *είναι ίδιο με το* $\frac{1}{2}$ α

145 ***M20****: εγώ το βρήκα αλλιώς ...* ***πρώτα αφαίρεσα και μετά διαίρεσα***

146 Δ: για πες τι ακριβώς σκέφτηκες

147 ***M20****: έκανα τις αντίστροφες πράξεις που κάναμε στην αρχή για να βρούμε τον επόμενο ενός όρου ... δηλαδή εκεί διπλασιάσαμε και προσθέσαμε ένα, τώρα που θέλουμε τον προηγούμενο* ***αφαιρούμε ένα και διαιρούμε δια δύο***

148 Δ: συμφωνείτε με το συμμαθητή σας; ... Δοκιμάστε για να δείτε αν από ένα αριθμό βγαίνει ο προηγούμενός του με τη διαδικασία που είπε ... αφαιρούμε ένα και διαιρούμε δια δύο

149 ***M****:* [πολλοί μαθητές δοκιμάζουν] *ναι βγαίνει*

150 Δ: χρησιμοποιώντας συμβολισμό, ποιος είναι ο προηγούμενος του α;

151 ***M5****: ο α-1:2* [με προτροπή του Δ, το γράφει στον πίνακα]

152 ***M10****: θέλει παρένθεση γιατί πρέπει πρώτα να γίνει η αφαίρεση* [διορθώνει σε **(α-1):2**]

153 Δ: αν δεν έχετε κάποια ερώτηση ... εντάξει ... πως μπορώ να το γράψω αυτό λίγο διαφορετικά; Κάτι που είδαμε και προηγουμένως

154 ***M2****: σαν κλάσμα ... α-1 δεύτερα* [γράφει $\frac{\alpha-1}{2}$]

155 Δ: εντάξει ... είδαμε λοιπόν δύο διαφορετικές διαδικασίες κάτι σαν δύο κανόνες, δύο παραστάσεις που δίνουν τον προηγούμενο όρο του α: πρώτα την ***διαιρώ δια 2 και αφαιρώ 0,5*** *και την* ***αφαιρώ 1 και διαιρώ δια 2*** *και με χρήση συμβόλων* $\frac{\alpha}{2}-0{,}5$ *και* $\frac{\alpha-1}{2}$*... Λοιπόν γράφω τις δυνατές παραστάσεις με τον 1^{ο} τρόπο που είπαμε και τις δυνατές με τον 2^{ο} τρόπο*

Διαδικασία/Κανόνας	1^{ος} τρόπος	2^{ος} τρόπος
Με λόγια	***διαιρώ δια 2 και αφαιρώ 0,5***	***αφαιρώ 1 και διαιρώ δια 2***
Με συμβολισμό	α:2-0,5 ή $\frac{\alpha}{2}-0{,}5$ ή $\frac{1}{2}$α-0,5	(α-1):2 ή $\frac{\alpha-1}{2}$ ή $\frac{1}{2}$(α-1)

... Μπορείτε να σκεφθείτε γιατί όλες είναι μεταξύ τους ισοδύναμες;

Η συζήτηση με την τάξη ολοκληρώνεται με διάφορες απόψεις για την ισοδυναμία των δύο τρόπων όχι χωρίς δυσκολία. Τελικά η πιο σαφής εξήγηση δίνεται από ένα μαθητή με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας στην παράσταση $\frac{1}{2}$(α-1).

161 ***M7****: με πράξεις στην παράσταση* $\frac{1}{2}$*(α-1)* [γράφει: $\frac{1}{2}$(α-1)=$\frac{1}{2}$α-$\frac{1}{2}$=$\frac{1}{2}$α-0,5] *που είναι ίδιο με το προηγούμενο...*

165 Δ: *λοιπόν παιδιά τώρα θα ασχοληθούμε με ένα άλλο πρόβλημα που δεν προλάβαμε να κάνουμε την προηγούμενη ώρα, είναι αυτό που έχετε στο φύλλο εργασίας με τίτλο «τα χρώματα», κάπου μοιάζει, κάπου διαφέρει από τα πρηγούμενα, διαβάστε το, ασχοληθείτε λίγη ώρα και μετά το βλέπουμε όλοι μαζί, αν θέλετε διευκρινίσεις ρωτήστε με …*

Πρόβλημα 2 (λεκτικό pattern)

Στην επόμενη διαδοχή λέξεων: **ΠΡΑΣΙΝΟ**, **ΚΟΚΚΙΝΟ**, **ΜΠΛΕ**, **ΠΡΑΣΙΝΟ**, **ΚΟΚΚΙΝΟ**, **ΜΠΛΕ**, …
Ποια είναι η $10^{η}$ λέξη της σειράς; ποια είναι η $500^{η}$ λέξη;

Συνοπτική περιγραφή από τη διαπραγμάτευση στην τάξη

Οι μαθητές για την εύρεση του $10^{ου}$ όρου της ακολουθίας έγραψαν απλώς τις λέξεις επαναλαμβάνοντας το pattern, αλλά όταν έπρεπε να βρουν την $500^{η}$ λέξη κατάλαβαν ότι έπρεπε να βρουν ένα κανόνα. Άρχισαν να παρατηρούν και να διατυπώνουν άτυπους κανόνες, χωρίς να καταφέρουν να γενικεύσουν και να απαντήσουν στο ερώτημα, όπως: «*ένα χρώμα επαναλαμβάνεται μετά από δύο άλλα*» ή «*δημιοργούνται τριάδες κάθε φορά*» ή «*για να πάμε από ένα χρώμα σε ένα άλλο ίδιο θέλουμε 3*». Ο δάσκαλος παρεμβαίνει και τους λέει να συμπληρωσουν ένα πίνακα σαν τον παρακάτω.

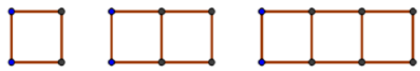
ΠΡΑΣΙΝΟ	**ΚΟΚΚΙΝΟ**	**ΜΠΛΕ**	**ΠΡΑΣΙΝΟ**	**ΚΟΚΚΙΝΟ**	**ΜΠΛΕ**	**ΠΡΑΣΙΝΟ**	**ΚΟΚΚΙΝΟ**	**ΜΠΛΕ**	**…**	**?**
1	***2***	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**…**	**500**

Συμπληρώνουν μέχρι το 9 και παρατηρούν ότι «*στο μπλε βγαίνουν οι αριθμοί 3, 6, 9*». Με τις ερωτήσεις του δασκάλου καταλαβαίνουν ότι οι επόμενοι αριθμοί είναι: «*12, 15, 18, 21, …*», δηλαδή «*πολλαπλάσια του 3*». Άρα «*στα πολλαπλάσια του 3 θα είναι μπλε … πριν θα είναι κόκκινο και μετά περάσινο*». «Το 500 είναι πολλαπλάσιο του 3;», το εξετάζουν με το κριτήριο διαιρετότητας και καταλήγουν «*όχι … το 499, … κι αυτό δεν είναι*», «*το 501 … ναι είναι*», «*άρα το 501 είναι μπλε, συνεπώς το προηγούμενο, το 500, θα είναι κόκκινο*». Στη συζήτηση οι μαθητές κατάλαβαν πόσο χρήσιμη καθοριστική ήταν και η καταγραφή των στοιχείων σε πίνακα: «*χωρίς τον πίνακα νομίζω δεν θα μπορούσαμε εύκολα να δούμε πως επαναλαμβάνονται οι αριθμοί και οι λέξεις … αλλά αν δεν μας το λέγατε πως θα το σκεφτόμαστε*». Ο δάσκαλος επισημαίνει ότι «*δεν είναι δυνατόν όλα να ανακαλύπτονται, αλλά απαιτούνται κάποιες κατευθύνσεις και οδηγίες για την ανάπτυξη στρτηγικών από μένα, αλλά τώρα είδατε την αξία του πίνακα, ας το έχετε υπόψη σας σε παρόμοια προβλήματα*».

<u>3ο μάθημα</u>

Η τάξη διαπραγματεύεται το παρακάτω πρόβλημα, που είναι ένα γεωμετρικό pattern (Δραστηριότητα ΑΔ1 από το ΠΣ, σελ. 46), με ΠΜΑ Α1, Α2, Α3

Πρόβλημα 3: Τα σπίρτα

ΑΔ1	Χρησιμοποιώντας σπίρτα κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο (1ο σχήμα) και κατόπιν προσθέτουμε δίπλα του άλλο ένα τετράγωνο (2ο σχήμα), κι άλλο ένα τετράγωνο (3ο σχήμα), κοκ  α) Να βρείτε πόσα σπίρτα χρειάζονται για 4 τετράγωνα, για 10 τετράγωνα, για 57 τετράγωνα β) Να παραστήσετε τα ζεύγη (αριθμός τετραγώνων, αριθμός σπίρτων) σε ένα σύστημα αξόνων.	**Α1, Α2, Α3**

Συνοπτική περιγραφή από τη διαπραγμάτευση στην τάξη

Οι μαθητές εργάζονταν σε μικρές ομάδες. Για τα 4 τετράγωνα όλοι εύκολα με συμπλήρωση του 3ου σχήματος και μέτρηση των σπίρτων βρήκαν 10. Για τα 10 τετράγωνα άρχισαν να συμπληρώνουν το νέο σχήμα μέχρι να προκύψουν 10 τετράγωνα. Με το ερώτημα του δασκάλου: «*με τα 57 το ίδιο θα κάνετε; Θα κατασκευάσετε 57 τετράγωνα; Μήπως μπορείτε να σκεφθείτε μια στρατηγική που είδαμε σε προηγούμενο πρόβλημα;*», άρχισαν να συνειδητοποιούν ότι απαιτείται μία άλλη στρατηγική. Κάποιοι θυμήθηκαν τον πίνακα και τελικά οδηγήθηκαν στην κατασκευή του παρακάτω πίνακα, που συμπλήρωσαν οι περισσότεροι χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία, απαρατηρώντας ότι «*για κάθε νέο σχήμα προσθέτουμε 3 σπίρτα στο προηγούμενο*».

Σειρά	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σπίρτα	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31

Για τα 57 άρχισαν οι δυσκολίες. Κάποιος μαθητής είχε μια ιδέα που στηρίζονταν στα ανάλογα ποσά:

Μ: *αφού για τα 6 θέλουμε 19 για τα 60 θέλουμε 190, έχουμε 3 λιγότερα, άρα θα βγάλουμε 9 σπίρτα, τρία για καθένα από τα επιπλέον, δηλαδή 181*

Δ: *Είναι λίγο πολύπλοκο, στην αρχή χρησιμοποιείς ανάλογα ποσά, έτσι δεν είναι; … και μετά αφαιρείς για καθένα 3; Τι λέτε; Είναι σωστό; Πώς θα το εξετάσουμε;*

Επειδή οι μαθητές δυσκλεύονται ο δάσκαλος τους έθεσε το εξής ερώτημα επιχειρώντας να δημιουργήσει μια γνωστική σύγκρουση:

Δ: *αν ο κανόνας είναι σωστός τότε, θα πρέπει να ισχύει και για άλλα τετράγωνα. Πχ αφού τα 7 τεράγωνα θέλουν 22 σπίρτα, τα 14 τετράγωνα θα θέλουν 44. Για τα 11* *τετράγωνα που ε'ιναι τρία λιγότερα από τα 14 πρέπει όπως και πριν να αφαιρέσουμε 9 σπίρτα, έτσι δεν είναι; Πόσα λοιπόν θα έχουν τα 11 τετράγωνα;*

Μ (αρκετοί μαθητές): *44-9=35*

Δ: *δοκιμάστε να συνεχίσετε τον πίνακα, μετά τα 10 τετράγωνα που θέλουν 31 σπίρτα τα 11 τετράγωνα πόσα θα θέλουν;*

Μ (αρκετοί μαθητές): *34*

Δ: *συνεπώς ο κανόνας έρχεται σε αντίθεση με αυτά που μετράμε ... άρα το συμπέρασμα;*

Μ: *δεν ισχύει ο κανόνας ...*

Η παρατήρηση «προσθέτω 3» δεν μπόρεσε να οδηγήσει σε κανόνα από μόνη της. Απαιτήθηκε συζήτηση με ολόκληρη την τάξη για το τι σημαίνει *κανόνας* (: *παράγει κάθε ζεύγος και όχι μόνο ένα ή δύο*) για την εύρεση κάποιου όρου. Μετά από αρκετή ώρα και εκτενή διερεύνηση δύο ομάδες κατέληξαν στους εξής κανόνες:

Μ: ***για ένα σχήμα ο αριθμός των σπίρτων είναι 3×(τετράγωνα σχήματος)+1***

Μ: ***4 σπίρτα το πρώτο+(αριθμός τετραγώνων – 1)·3***

Δ: *ελέγξτε όλοι αν οι κανόνες εφαρμόζονται για όλα τα σχήματα που έχουμε*

Διαπιστώνουν ότι πράγματι ισχύουν και οι δύο κανόνες. Απαντούν ότι για 57 τετράγωνα απαιτούνται 3·57+1=172 ή 4+(57-1)·3=172. Τότε ο δάσκαλος τους προτρέπει:

Δ: *αν **συμβολίσουμε** με **x** τον **αριθμό των τετραγώνων** που έχει το σχήμα, προσπαθήστε τους προηγούμενους κανόνες να τους γράψετε με σύμβολα, με πιο μαθηματικό τρόπο*

Πράγματι καταφέρνουν και γράφουν με δύο αλγεβρικές παραστάσεις τους κανόνες που βρήκαν: **3*x*+1** και **4+(*x*-1)·3**. Εδώ προέκυψαν με φυσικό τρόπο ερωτήματα όπως:

Μ: *γιατί κάνουν και οι 2 κανόνες γι αυτό το παιγνίδι;*

Δ: *μήπως είναι «ίδιοι;»*

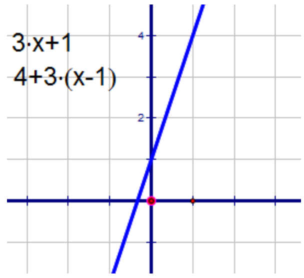
Μ: *πως και γιατί είναι ίδιοι;*

Δ: *μπορώ να πάω από τη μια μορφή στην άλλη;*

Το τελευταίο ερώτημα είναι ισοδύναμο με το πιο τυπικό:

Δ: *πως μπορώ να δικαιολογήσω την ισοδυναμία των δύο παραστάσεων;*

Η απλοποίηση των αλγεβρικών παραστάσεων για να φανεί η ισοδυναμία τους δεν ήταν μια εύκολη δραστηριότητα για την τάξη αυτή. Ήταν μια δομική δραστηριότητα που κυρίως είναι θέμα διαπραγμάτευσης στη Β τάξη. Στο τέλος του μαθήματος ο δάσκαλος τους προέτρεψε να αναπαραστήσουν τα ζεύγη του πίνακα με σημεία σε ένα σύστημα ημιαξόνων (ΠΜΑ Α3). Οι μαθητές εργάστηκαν σε χαρτί μελιμετρέ και κατόπιν ο δάσκαλος με βιντεοπροβολέα πρόβαλλε τις γραφικές παραστάσεις και των δύο αλγεβρικών παραστάσεων που κατασκευάστηκαν με μαθηματικό λογισμικό και διαπλιστωσαν ότι και οι δύο ευθείες συμπίπτουν (διαπίστωση της ισοδυναμίας των παραστάσεων με γραφικό τρόπο).



Στις ενότητες 7, 8 και 9 δίνονται ορισμένα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ) από την περιοχή της Γεωμετρίας, της Άλγεβρας και των Στοχαστικών Μαθηματικών αντίστοιχα και το υλικό που υπάρχει στο ΠΣ και τον οδηγό του εκπαιδευτικού σχετικά με αυτά. Στο πλαίσιο των εργαστηρίων ανάπτυξης σχεδίου μαθήματος, οι εκπαιδευτικοί θα χωριστούν σε ομάδες 3-5 ατόμων θα μελετήσουν το υλικό που τους δίνεται και με βάση αυτό ή και άλλο θα αναπτύξουν ένα σχέδιο μαθήματος που θα αφορά τη προσέγγιση αυτών των ΠΜΑ. Στη συνέχεια οι ομάδες θα παρουσιάσουν το σχέδιο τους και θα γίνει συζήτηση. Στο Παράρτημα ($3^η$ ενότητα) δίνονται οι άξονες με βάση τους οποίους μπορεί να αναπτυχθεί ο σχεδιασμός της διδασκαλίας.

7. ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΣΧΕΔΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Θέμα: Σχεδιασμός διδασκαλίας της θεματικής ενότητας «Γεωμετρία –Μέτρηση: Μέτρηση επιφάνειας»» της Β΄ Γυμνασίου

Στην ενότητα υπάρχουν 4 στόχοι (Μ2 έως Μ5). Σχεδιάστε μια διδασκαλία για την εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητα σχετική με τους στόχους Μ2 ή Μ3. Περιγράψτε μια πιθανή (επιδιωκόμενη) πορεία διαπραγμάτευσης στην τάξη.

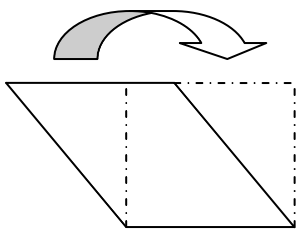
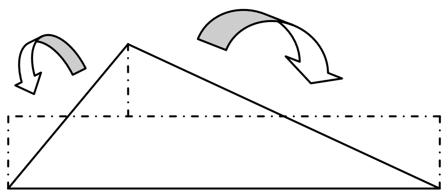
Υλικό προς αξιοποίηση

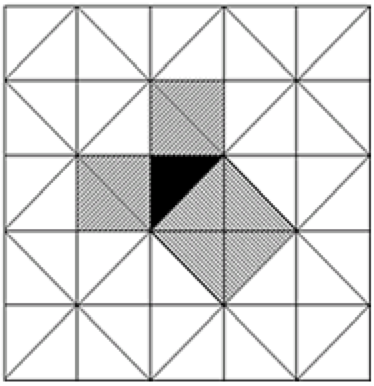
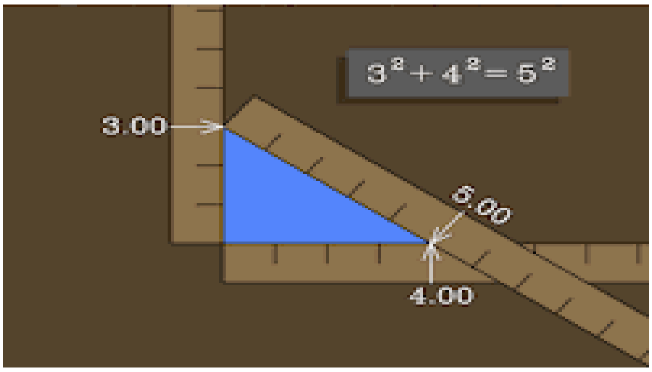
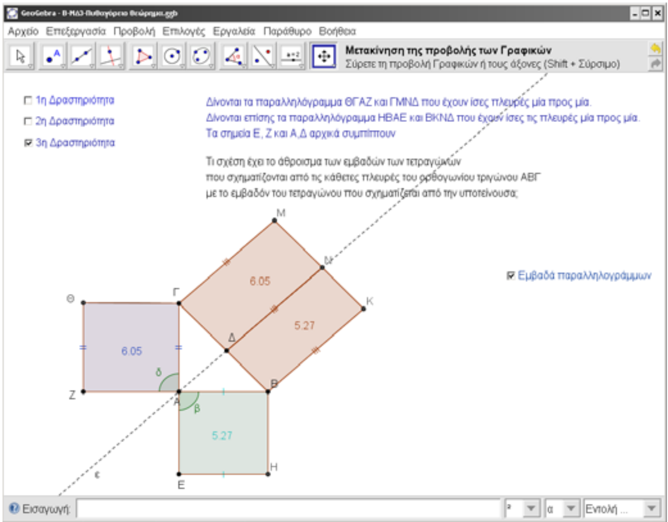
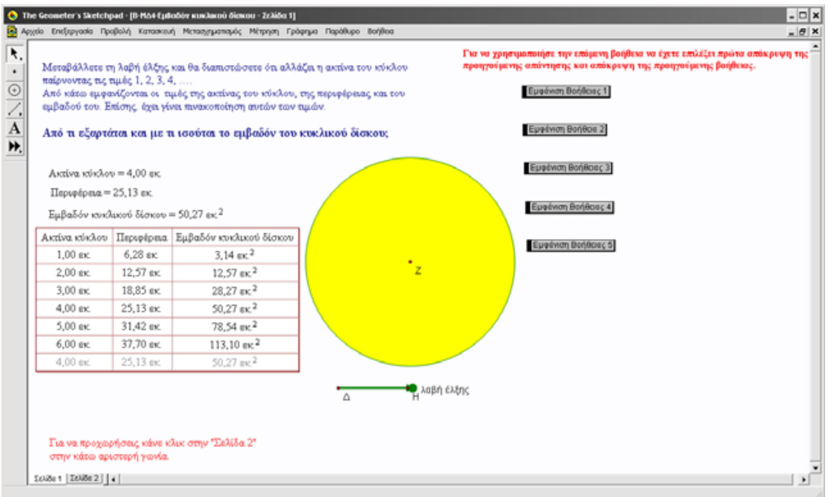
Από το Πρόγραμμα σπουδών

Μ1. Αναγνωρίζουν και κατασκευάζουν ισεμβαδικές	**Μέτρηση επιφάνειας** • Άμεσες και έμμεσες	Για τη δημιουργία των τύπων εμβαδού των	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄

επιφάνειες με βάση ιδιότητες και σχέσεις για να αιτιολογήσουν τους γνωστούς τύπους εμβαδού. *Μ2.* Διερευνούν και διατυπώνουντο Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του και τα χρησιμοποιούν για τον υπολογισμό μηκών και τον προσδιορισμό ορθών γωνιών. *Μ3.* Υπολογίζουν το εμβαδό κυκλικού δίσκου και κυκλικού τομέα. *Μ4.* Επιλύουν προβλήματα υπολογισμού εμβαδών με τη χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης (με βάση την ακρίβεια που απαιτείται).	συγκρίσεις επιφανειών. • Μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης επιφανειών *(16 ώρες)*	γεωμετρικών σχημάτων είναι βασικός ο μετασχηματισμός τους σε απλούστερα σχήματα με διατήρηση του εμβαδού. (*ενδεικτικές δραστηριότητες ΜΔ1, ΜΔ2, ΜΔ3, ΜΔ4*)	Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφ. $1^{ο}$& $3^{ο}$. Β-ΜΔ3-Πυθαγόρειο θεώρημα Β-ΜΔ4-Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Α/Α	**Περιγραφή δραστηριότητας**	**ΠΜΑ**
ΜΔ1	Βασική δραστηριότητα για τη δημιουργία των τύπων εμβαδού των γεωμετρικών σχημάτων είναι ο μετασχηματισμός τους σε απλούστερα σχήματα με διατήρηση του εμβαδού. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας οι μαθητές καθοδηγούνται μέσω κατάλληλων ερωτήσεων να λύσουν το πρόβλημα μετασχηματισμού ενός παραλληλογράμμου και ενός τριγώνου σε ισοδύναμο ορθογώνιο. Στη συνέχεια αυτής της δραστηριότητας διατυπώνουν και αιτιολογούν τους αντίστοιχους τύπους εμβαδού. Τα επόμενα σχήματα δείχνουν έναν από τους πολλούς τρόπους επίλυσης του προβλήματος:  	**Μ2**
ΜΔ2	Οι μαθητές κατασκευάζουν τετράγωνα στις πλευρές ενός ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου (βλ. το διακοσμητικό μοτίβο στο σχήμα αριστερά) και χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης εμβαδού το ίδιο το ορθογώνιο τρίγωνο επαληθεύουν τη σχέση του Πυθαγόρειου θεωρήματος. Στη συνέχεια επαληθεύουν τη σχέση αυτή στο ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές μήκους 3cm και 4cm και υποτείνουσα μήκους 5cm.	**Μ3**

	 	
ΜΔ3	Με το Geogebra κατανοούν γεωμετρικά το Πυθαγόρειο θεώρημα μετασχηματίζοντας ίσα παραλληλόγραμμα σε ισεμβαδικά τετράγωνα και ορθογώνια, δημιουργώντας ταυτόχρονα τα τετράγωνα των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου. (αρχείο: [Β-ΜΔ3-Πυθαγόρειο θεώρημα]). 	**Μ2, Μ3**
ΜΔ4	Στο Sketchpad μεταβάλλουν δυναμικά την ακτίνα ενός κύκλου και με την δυνατότητα του λογισμικού να πινακοποιεί τιμές μεταβλητών, "ανακαλύπτουν" μέσα από μία διαδικασία μοντελοποίησης τον τύπο του εμβαδού κυκλικού δίσκου και εμφανίζουν τη γραφική παράσταση της συναρτησιακής σχέσης 'ακτίνας' και 'εμβαδού'. Συνδέουν τη γραφική παράσταση με το είδος της συγκεκριμένης συναρτησιακής σχέσης και τα μέτρα των εμπλεκόμενων μεγεθών (αρχείο: [Β-ΜΔ4-Εμβαδόν κυκλικού δίσκου]). 	**Μ4, Α1**

Από τον οδηγό του εκπαιδευτικού

Σχετικά με την Τροχιά της Μέτρησης επιφάνειας

Η **τρίτη τροχιά της Μέτρησης επιφάνειας** αφορά τη σύγκριση επιφανειών, την ανάλυση και σύνθεσή τους, την πραγματοποίηση επικαλύψεων με τυπικές και μη τυπικές μονάδες και, στη συνέχεια, τη μέτρησή τους όπως και την επίλυση προβλημάτων που περιέχουν μετρήσεις επιφανειών και εκτιμήσεις.

Συγκεκριμένα, στον πρώτο κύκλο οι μαθητές πραγματοποιούν άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις επιφανειών, με αναλύσεις και συνθέσεις και μετατοπίσεις, επικαλύπτουν επιφάνειες χρησιμοποιώντας μη τυπικές ή τυπικές μονάδες, δομούν τις επιφάνειες με μη τυπικές και τυπικές μονάδες σε γραμμές και στήλες και καταμετρούν συστηματικά το πλήθος των μονάδων, συνδέοντας το αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης με την επιφάνεια και τη μονάδα μέτρησης. Επιλύουν απλά προβλήματα μέτρησης επιφάνειας με τη χρήση χειραπτικού υλικού και αναπαραστάσεων και ασκούνται στην εκτίμηση επιφανειών (βλ. ΜΔ5, ΜΔ6, ΜΔ7, Νηπιαγωγείο, ΜΔ 2, ΜΔ3, Α΄ Δημοτικού και ΜΔ12, Β΄ Δημοτικού).

Στο δεύτερο κύκλο συστηματοποιούν τις παραπάνω γνώσεις πραγματοποιώντας συγκρίσεις απλών επιφανειών με τη χρήση ιδιοτήτων και σχέσεων, δομώντας ορθογώνιες επιφάνειες με γραμμές και στήλες και χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ γραμμών και στηλών για να υπολογίσουν το εμβαδόν δομημένων επιφανειών (βλ. ΜΔ1, Γ΄ Δημοτικού, ΜΔ2, ΜΔ3, Δ΄ Δημοτικού, ΜΔ2, ΜΔ3, Ε΄ Δημοτικού και ΜΔ1, ΜΔ2, ΜΔ4, ΜΔ5, ΣΤ΄ Δημοτικού). Υπολογίζουν το εμβαδόν των βασικών σχημάτων και διερευνούν τις σχέσεις πλευρών, περιμέτρου και εμβαδού ενός γεωμετρικού σχήματος (ΜΔ3, ΜΔ6, ΣΤ΄ Δημοτικού). Προσεγγίζουν τις .υποδιαιρέσεις των μονάδων και κάνουν μετατροπές. Επιλύουν προβλήματα μέτρησης επιφανειών με τη χρήση οργάνων και τύπων και πραγματοποιούν συγκρίσεις επιφανειών κατ’ εκτίμηση.

Τέλος, στον τρίτο κύκλο πραγματοποιούν συγκρίσεις καμπυλόγραμμων ή μικτόγραμμων ή ακανόνιστων επιφανειών με αναλύσεις / συνθέσεις και με τη χρήση ιδιοτήτων και σχέσεων, υπολογίζουν το εμβαδόν κύκλου κι άλλων μικτόγραμμων σχημάτων χρησιμοποιώντας ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών και επιλύουν σχετικά προβλήματα με τη χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης και υπολογισμών κατ’ εκτίμηση (βλ. ΜΔ1, ΜΔ2, ΜΔ4, Β΄ Γυμνασίου). Παράλληλα, υπολογίζουν το εμβαδόν επιφανειών στερεών σχημάτων.

Βασικά θέματα: *Μέτρηση μήκους, μέτρηση γωνίας (Α΄ και Β΄ Γυμνασίου), μέτρηση επιφάνειας (Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου), μέτρηση χωρητικότητας – όγκου (Γ΄Γυμνασίου)*

Σημασία της ενότητας: Η μέτρηση γενικά, είναι μία από τις διαδικασίες που έχουν μεγάλη πρακτική εφαρμογή σε καθημερινές καταστάσεις ενώ ταυτόχρονα παρέχει ευκαιρίες για την εκμάθηση και την εφαρμογή άλλων μαθηματικών γνώσεων. Η μέτρηση είναι δυνατόν να συμβάλει εκτός από την μελέτη της γεωμετρίας, με την οποία συνδέεται στενά, στη μελέτη των αριθμών, των συναρτήσεων, της στατιστικής και των πιθανοτήτων.

Στο Γυμνάσιο, η μέτρηση δεν περιορίζεται στην εξάσκηση χρήσης των οργάνων και μονάδων μέτρησης, αλλά συνδέεται με την προσπάθεια για μια περισσότερο θεωρητική ανάπτυξη της Γεωμετρίας. Οι συγκρίσεις και οι υπολογισμοί μηκών και γωνιών βασίζονται κυρίως στην χρήση ιδιοτήτων και σχέσεων. Η μέτρηση επιφάνειας συνδέεται με τους μετασχηματισμούς που διατηρούν αναλλοίωτη την επιφάνεια και την αιτιολόγηση των τύπων του εμβαδού γνωστών σχημάτων. Ομοίως και η μέτρηση όγκου συνδέεται με τους τύπους υπολογισμού του όγκου γνωστών στερεών, την σχέση που έχουν μεταξύ τους κάποιοι απ' αυτούς και τη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση.

Μέτρηση επιφάνειας, μέτρηση χωρητικότητας-όγκου: Στο Δημοτικό οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί με τη μέτρηση της επιφάνειας σχημάτων και με τη σχέση των μονάδων μέτρησης επιφάνειας. Επίσης υπολογίζουν το εμβαδόν τετραγώνων, ορθογώνιων, παραλληλογράμμων, τριγώνων και τραπεζίων και προσεγγιστικά το εμβαδόν σχημάτων, υπολογίζουν το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων και διακρίνουν την έννοια της περιμέτρου από την έννοια του εμβαδού, και την έννοια της χωρητικότητας από την έννοια του όγκου (για παράδειγμα η χωρητικότητα μιας δεξαμενής πετρελαίου είναι διαφορετική από τον όγκο της γιατί στην πρώτη περίπτωση λαμβάνονται υπ' όψιν οι εσωτερικές διαστάσεις της ενώ στην δεύτερη περίπτωση οι εξωτερικές διαστάσεις της).

Στην Β΄ Γυμνασίου οι μαθητές εμπλέκονται με την αιτιολόγηση των τύπων του εμβαδού παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου, καθώς και το εμβαδόν κυκλικού τομέα. Εδώ εντάσσεται και το Πυθαγόρειο θεώρημα με στόχο την ανάδειξη της σχέσης των εμβαδών των τετραγώνων που κατασκευάζονται στις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, αλλά και τη χρήση του στον υπολογισμό αποστάσεων και στον έλεγχο αν μία γωνία είναι ορθή.

Οι μαθητές στην Γ΄ Γυμνασίου εμπλέκονται με τη μέτρηση της επιφάνειας και του όγκου πρισμάτων, πυραμίδων, κυλίνδρων, κώνων και σφαιρών.

Δυσκολίες των μαθητών: Η έννοια της μέτρησης (σύγκριση του μεγέθους που μετράμε με μία μονάδα που έχει το ίδιο χαρακτηριστικό, για παράδειγμα επιφάνεια με επιφάνεια), η εξοικείωση με την μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται, τα όργανα μέτρησης (βαθμολογημένος χάρακας, μετροταινία, μοιρογνωμόνιο κ.λπ.) ως εργαλεία με τα οποία κάνουμε συγκρίσεις και η χρήση τους, ο τρόπος μεταβολής του αποτελέσματος της μέτρησης όταν χρησιμοποιούμε πολλαπλάσια ή υποδιαιρέσεις μιας μονάδας μέτρησης και η προσεγγιστική φύση της μέτρησης είναι στοιχεία που πρέπει να κατανοηθούν από τους μαθητές.

……………………………………………

Ως προς την μέτρηση της επιφάνειας και του όγκου θα πρέπει να αντιμετωπιστούν κάποιες από τις δυσκολίες των μαθητών, που θεωρούν ότι:

- βάση (ή βάσεις) στα σχήματα είναι μόνο αυτή (ή αυτές) που έχουν οριζόντιο προσανατολισμό και ύψος είναι μόνο αυτό που έχει κατακόρυφο προσανατολισμό ή μόνον αυτό που άγεται από κάποια κορυφή (στην περίπτωση των παραλληλογράμμων και των τραπεζίων) και όχι η απόσταση μεταξύ των παραλλήλων.
- η μεταβολή κατά ανάλογο τρόπο των διαστάσεων ενός σχήματος (διπλασιασμός , τριπλασιασμός κ.λπ. όλων των πλευρών) επιφέρει ανάλογη μεταβολή στο εμβαδό των σχημάτων
- σχήματα με μεγαλύτερη περίμετρο έχουν μεγαλύτερο εμβαδό
- αν αλλάξει το σχήμα, αλλάζει και η επιφάνεια πχ. δύο διαφορετικά τρίγωνα με την ίδια βάση και ίσα ύψη

………………………………………………………………………

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση:

…………………………………………………………..

Ο στόχος στο Γυμνάσιο, για τη μέτρηση της επιφάνειας, είναι αρχικά μια ανακεφαλαίωση των γνωστών τύπων από το δημοτικό για το εμβαδόν του τετραγώνου, του ορθογωνίου, του παραλληλόγραμμου, του τριγώνου και του τραπεζίου. Βασική επιδίωξη παραμένει όμως η αιτιολόγηση των τύπων εμβαδού για τα παραπάνω σχήματα καθώς και του κύκλου. Για το σκοπό αυτό είναι χρήσιμο να αξιοποιηθούν οι προτεινόμενες στο Π.Σ. δραστηριότητες καθώς και η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας ώστε μέσα από συζητήσεις, να καταλήξουν οι ίδιοι οι μαθητές στις αιτιολογήσεις.

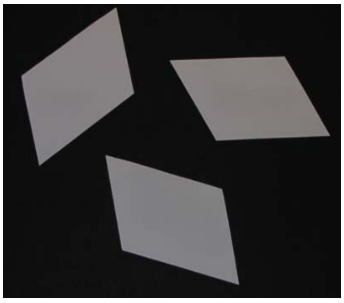
Το Πυθαγόρειο θεώρημα, εκτός από τις άμεσες εφαρμογές, προσφέρεται ιδιαίτερα για δραστηριότητες που εισάγουν μια ιστορική προοπτική στη διδασκαλία των Μαθηματικών και αναδεικνύουν τη σημασία των διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας μαθηματικής έννοιας (γεωμετρικά εμβαδά, αλγεβρική σχέση).

…………………………………………………………

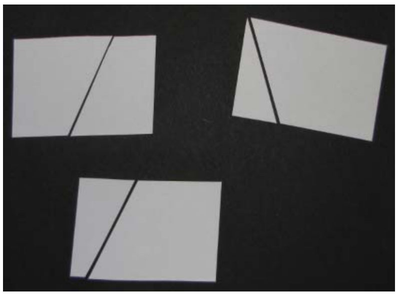
Β΄ Γυμνασίου: ΜΔ1 (ΠΜΑ: Μ2)

Οι μαθητές δουλεύουν σε ομάδες και ο εκπαιδευτικός μοιράζει σε κάθε ομάδα 2-3 ίσα μη ορθογώνια παραλληλόγραμμα από χαρτί (εικόνα 26). Προσπαθούν να βρουν τρόπο ή τρόπους να κόψουν με ψαλίδι τα παραλληλόγραμμα και να τα μετασχηματίσουν σε ισοδύναμα ορθογώνια. Η συνειδητοποίηση εκ μέρους των μαθητών ότι η δημιουργία ορθογωνίου απαιτεί την ύπαρξη ορθών γωνιών ενδέχεται να τους οδηγήσει στην χάραξη της κάθετης προς ένα ζεύγος απέναντι πλευρών του παραλληλογράμμου και τον χωρισμό του σε δύο μέρη με την βοήθεια του ψαλιδιού.

Το μέσο (χαρτί) είναι τέτοιο που θα βοηθήσει τους μαθητές να το



Εικόνα 26



Εικόνα 27

χειριστούν άμεσα και να δημιουργήσουν το ορθογώνιο, αφήνοντας όμως αμφιβολίες για το τελικό αποτέλεσμα (εικόνα 27) και άρα την ανάγκη αιτιολόγησης

Κατόπιν οι ομάδες καταγράφουν σε ένα χαρτί την διαδικασία που ακολούθησαν, σχεδιάζοντας κατάλληλα σχήματα και χρησιμοποιώντας γεωμετρική ορολογία προσπαθούν να αιτιολογήσουν τα βήματα της διαδικασίας, με βάση τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και των μετασχηματισμών που έκαναν. Για παράδειγμα, δικαιολογούν γιατί ταιριάζουν οι πλευρές των δύο σχημάτων ή γιατί η κάτω βάση είναι ευθύγραμμο τμήμα και όχι τεθλασμένη γραμμή κ.λπ.

Διεργασία επικοινωνίας

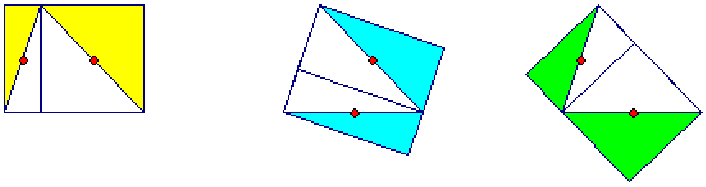
Διεργασία διερεύνησης και επιχειρηματολογίας

Συζητούν με το σύνολο της τάξης τους τρόπους που ακολούθησαν, αν έχει σημασία ή όχι το σημείο στο οποίο σχεδίασαν την κάθετη και γιατί, αν έχει σημασία ή όχι ποια πλευρά του παραλληλογράμμου ονομάζουν βάση, αν μπορεί η μέθοδος να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο και τι συμπεράσματα βγάζουν σχετικά με τις επιφάνειες των δύο σχημάτων και το εμβαδό του παραλληλογράμμου.

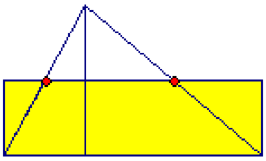
Υπέρβαση πρωτοτυπικών αναπαραστάσεων

Η διερεύνηση μπορεί να γίνει επικουρικά με τη χρήση λογισμικού (αρχείο: Β Γυμ - ΜΔ1 - Εμβαδόν παραλληλογράμμου.ggb). Οι μαθητές μεταφέρουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο μετασχηματίζοντας ένα παραλληλόγραμμο σε ορθογώνιο. Η προστιθέμενη αξία χρήσης του λογισμικού βρίσκεται στην δυνατότητα δυναμικής μεταβολής του σχήματος του παραλληλογράμμου, από τους μαθητές και στην ευκολότερη δυνατότητα αναγνώρισης ότι ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός ισχύει σε οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο.

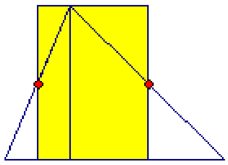
Με παραπλήσιο τρόπο δουλεύουν στον μετασχηματισμό ενός τριγώνου σε ορθογώνιο (εικόνα 28) ή σε ισοδύναμο ορθογώνιο (εικόνες 29 και 30). Η αιτιολόγηση στην εικόνα 30 ότι η βάση είναι η μισή από την βάση του τριγώνου δεν είναι μέσα στις δυνατότητες, από άποψη γνώσεων, των μαθητών, όμως μπορεί να γίνει μέσω του τύπου του εμβαδού τριγώνου, που θα έχει αιτιολογηθεί με κάποιον άλλο τρόπο.



Εικόνα 28

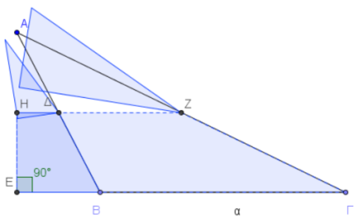


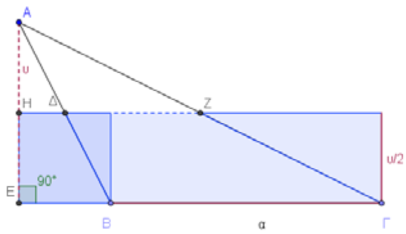
Εικόνα 29



Εικόνα 30

Η διερεύνηση της περίπτωσης της εικόνας 29, μπορεί να γίνει και με την βοήθεια λογισμικού (αρχείο: Β Γυμ-ΜΔ1-Εμβαδόν τριγώνου.ggb), γιατί θα επιτρέψει στους μαθητές να πειραματιστούν με ένα πλήθος τριγώνων και κυρίως να εξετάσουν και να αιτιολογήσουν την περίπτωση των αμβλυγωνίων.



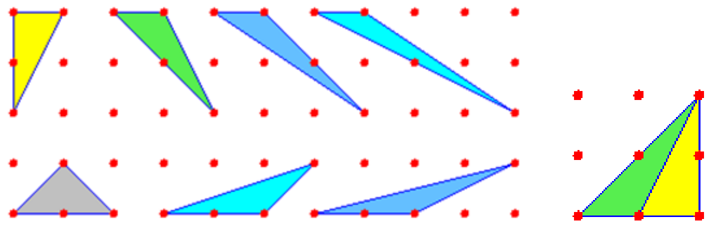


Β΄ Γυμνασίου: Εμβαδό και Περίμετρος (ΠΜΑ: Μ2, Μ3)

Οι μαθητές χρησιμοποιούν χαρτί με διάστικτους καμβάδες που το έχουν χωρίσει σε περιοχές 5 Χ 5 σημείων. Σχεδιάζουν όσο το δυνατόν περισσότερα τρίγωνα των οποίων οι κορυφές είναι σημεία του καμβά, εμβαδού 1 τ.μ., τα οποία να μην είναι ίσα μεταξύ τους και δικαιολογούν γιατί τα τρίγωνα που σχεδίασαν ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος (οι αιτιολογήσεις τους για την διαφορετικότητα των τριγώνων μπορούν να βασίζονται στους μετασχηματισμούς των σχημάτων, που τους είναι γνωστοί από το Δημοτικό).

Αναζητούν ανάμεσα στα τρίγωνα αυτό που έχει την μικρότερη και την μεγαλύτερη περίμετρο και δικαιολογούν την επιλογή τους. Συζητούν για τις μεθόδους που ακολούθησαν για να προσδιορίσουν όλα τα τρίγωνα , αν θα μπορούσε η μέθοδός τους να επεκταθεί σε έναν μεγαλύτερο καμβά και τι θα συνέβαινε τότε με την περίμετρο και το εμβαδό των τριγώνων. Επίσης συζητούν για το που θα κινείται η τρίτη κορυφή του τριγώνου (χωρίς τους περιορισμούς να είναι σημείο του καμβά ή τα τρίγωνα να είναι διαφορετικά), όταν τα τρίγωνα τοποθετηθούν έτσι ώστε να έχουν κοινή βάση. Με τη βοήθεια του Sketchpad (αρχείο: Β Γυμ - Εμβαδόν - περίμετρος τριγώνου.gsp) διερευνούν το τι αλλάζει και τι δεν αλλάζει σε ένα τρίγωνο όταν η μία κορυφή του κινείται σε ευθεία παράλληλη προς μια πλευρά του τριγώνου. Με αφορμή τις παρατηρήσεις και τα συμπεράσματα τους γενικεύουν για τρίγωνα που έχουν κοινή βάση (ή ίσες βάσεις) και η τρίτη κορυφή κινείται σε ευθεία παράλληλη προς την βάση.

Επίσης με κατάλληλη τοποθέτηση των τριγώνων, κατά τη σύγκριση των περιμέτρων (εικόνα 32) και αντίστοιχες διερευνήσεις, μπορούν να εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τον χωρισμό ενός τρίγωνου σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα από την διάμεσο.



8. ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΣΧΕΔΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Θέμα: Σχεδιασμός διδασκαλίας της θεματικής ενότητας «Κανονικότητες-Συναρτήσεις: συμμεταβολή μεγεθών, πολλαπλές αναπαραστάσεις συνάρτησης»» της Β΄ Γυμνασίου

Στην ενότητα υπάρχουν 8 στόχοι (Α1 έως Α8). Σχεδιάστε μια διδασκαλία για την εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητα σχετική με τους στόχους Μ2 ή Μ3. Περιγράψτε μια πιθανή (επιδιωκόμενη) πορεία διαπραγμάτευσης στην τάξη.

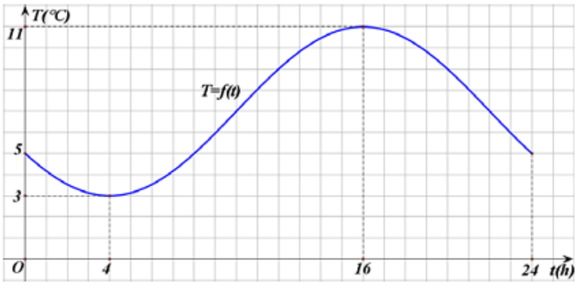
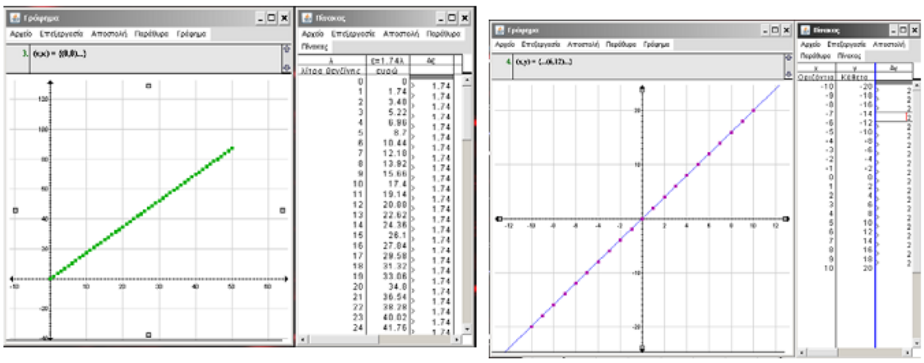
Υλικό προς αξιοποίηση

Από το Πρόγραμμα σπουδών:

Α1. Αναγνωρίζουν συμμεταβαλλόμενα ποσά (μεταβλητές) σε συγκεκριμένες καταστάσεις και διακρίνουν ποιο ποσό εξαρτάται από το άλλο. *Α2.* Αναγνωρίζουν σχέσεις που είναι συναρτήσεις (σε κάθε τιμή της μιας αντιστοιχεί μόνο μία τιμή της άλλης) και τις διακρίνουν από σχέσεις που δεν είναι συναρτήσεις. Αναγνωρίζουν ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή σε μια συνάρτηση. *Α3.* Σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση συναρτήσεων χρησιμοποιώντας πίνακες τιμών. *Α4.* Εξετάζουν αν ένα σημείο (διατεταγμένο ζεύγος) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.	**Κανονικότητες–Συναρτήσεις** • συμμεταβολή μεγεθών, πολλαπλές αναπαραστάσεις συνάρτησης (7 ώρες)	Η συμμεταβολή μεγεθών είναι οικεία στους μαθητές από την καθημερινή τους ζωή αλλά και από προηγούμενες σχολικές εμπειρίες. Οι δραστηριότητες θα πρέπει να εισάγουν την έννοια της συνάρτησης και των αναπαραστάσεών της με άμεση αναφορά σε καταστάσεις και προβλήματα (μοντελοποίηση). Η ικανότητα να μεταφράζουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν) είναι στοιχείο κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ1)*	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 3.1 και 3.2. http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasio/11_03_2011_ekpaideftiko_yliko_enotita_4.pdf σελ 20-34 (μόνο δραστηριότητες).

Α5. Υπολογίζουν, γραφικά και αλγεβρικά, τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής για δεδομένες τιμές της ανεξάρτητης και αντιστρόφως. *Α6.* Μοντελοποιούν μια κατάσταση με μια συνάρτηση λεκτικά, αριθμητικά (με πίνακα τιμών), γεωμετρικά (με γραφική παράσταση) και συμβολικά (με τύπο). *Α7.* Βρίσκουν τις τιμές που μπορεί να πάρει η ανεξάρτητη μεταβλητή από τη γραφική παράσταση και από τις συνθήκες της κατάστασης. *Α8.* Επιλύουν προβλήματα που μοντελοποιούνται με συναρτήσεις. Αιτιολογούν τις απαντήσεις τους χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων (γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών, τύπους) και μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν).			

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Α/Α	Περιγραφή δραστηριότητας	ΠΜΑ
ΑΔ1	Η παρακάτω γραφική παράσταση δείχνει τη θερμοκρασία Τ (σε βαθμούς Κελσίου) ενός τόπου κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου.  α) Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη θερμοκρασία; Ποια ώρα του 24ώρου συμβαίνουν; Ποια σημεία της γραφικής παράστασης δείχνουν την ελάχιστη και τη μέγιστη θερμοκρασία; β) Ποια είναι η θερμοκρασία στις 2 τη νύχτα, στις 2 το μεσημέρι και στις 11 το βράδυ; Ποια ώρα η θερμοκρασία είναι 6ºC; γ) Τι εκφράζει με βάση το πρόβλημα το σημείο (20, 9) της γραφικής παράστασης; δ) Ποιες άλλες πληροφορίες μπορούμε να αντλήσουμε από αυτή τη γραφική παράσταση;	Α4, Α5, Α8
ΑΔ3	 Χρησιμοποιούν τη δυνατότητα πολλαπλών αναπαραστάσεων (τύπος, πίνακας τιμών, γραφική αναπαράσταση) των μαθηματικών αντικειμένων του F-Probe, για να μεταβούν από τα ανάλογα ποσά στη συνάρτηση ψ=αχ και να διερευνήσουν το ρόλο του α στη γραφική της παράσταση (αρχεία;Β-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η ψ=αχ-1, Β-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η ψ=αχ-2 Φύλλο εργασίας:Φύλλο εργασίας-Β-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η ψ=αχ).	Α4, Α5, Α7, Α8, Α9, Α10

Από τον οδηγό του εκπαιδευτικού:

3. Τροχιά «μοτίβο/ κανονικότητα και συνάρτηση»

Η συγκεκριμένη τροχιά περιλαμβάνει δύο υπο-τροχιές, μία για το μοτίβο/ κανονικότητα και μία για τις συναρτήσεις.

Υπο-τροχιές	**Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα ανάπτυξης**
Μοτίβο/ κανονικότητα	• Αναγνώριση, συμπλήρωση, περιγραφή της κανονικότητας και της διαδικασίας παραγωγής της, κατασκευή κανονικοτήτων διαφόρων τύπων. • Αναπαράσταση κανονικοτήτων με διαφορετικούς τρόπους - μετάβαση από μία αναπαράσταση σε άλλη. • Εύρεση και συμβολική διατύπωση του γενικού όρου της κανονικότητας. • Μοντελοποίηση και μελέτη καταστάσεων μέσω κανονικοτήτων.
Συνάρτηση	• Διερεύνηση σχέσεων μεγεθών από την καθημερινή ζωή - συμμεταβαλόμενα μεγέθη. • Εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης (μεταβλητή, μονοσήμαντη απεικόνιση, αναπαραστάσεις συναρτήσεων, ερμηνεία αναπαραστάσεων). • Μοντελοποίηση απλών καταστάσεων και απαντήσεις σε ερωτήματα που τις αφορούν μέσω συναρτήσεων. • Διερεύνηση συγκεκριμένων συναρτήσεων (γραμμικών, της μορφής ψ=α/x, τετραγωνικών και ρυθμού μεταβολής).

Η ανάπτυξη των δύο υπο-τροχιών σε καθέναν από τους τρεις κύκλους διακρίνεται από τα κάτωθι χαρακτηριστικά:

Α΄ κύκλος: Βασικός προσανατολισμός της σχετικής εργασίας στην τάξη είναι η μύηση των μαθητών στη διερεύνηση σχέσεων και δομών. Προς αυτήν την κατεύθυνση, αναφορικά με τα μοτίβα, οι σχετικές δραστηριότητες ενθαρρύνουν τους μαθητές να αναγνωρίζουν, να συμπληρώνουν, να περιγράφουν και να κατασκευάζουν απλές γεωμετρικές, αριθμητικές και άλλες κανονικότητες, πρώτα επαναλαμβανόμενες και κατόπιν αυξανόμενες ή μειούμενες.

Σχετικά με τις συναρτήσεις, οι μαθητές καλούνται να διερευνούν μεταβολές μεγεθών σε σχέση με άλλα μεγέθη στην καθημερινή ζωή και αντιστοιχίες μέσα από παιχνίδια.

Β΄ κύκλος: Στη μελέτη των κανονικοτήτων επαναλαμβάνονται όσα και στον προηγούμενο κύκλο, αλλά σε ανώτερο επίπεδο, καθώς οι αριθμητικές και γεωμετρικές κανονικότητες είναι πιο σύνθετες, ενώ προστίθενται και αναδρομικές. Επιπλέον, η σχετική εργασία των μαθητών περιλαμβάνει γενίκευση της κανονικότητας, αναπαράστασή της με διαφορετικά μέσα (εικονικά, λεκτικά, αριθμητικά), σύγκριση κανονικοτήτων, λεκτική διατύπωση του κανόνα του μοτίβου, εύρεση του επόμενου, αλλά και ενός απομακρυσμένου όρου και, τέλος, συμβολική διατύπωση του γενικού όρου στις αριθμητικές κανονικότητες, χρησιμοποιώντας μεταβλητές (π.χ., ν+2).

Σε σχέση με τις συναρτήσεις, η έμφαση βρίσκεται στην αισθητοποίηση της σχετικής έννοιας. Συγκεκριμένα, οι μαθητές συνεχίζουν να διερευνούν καταστάσεις συμμεταβολής: ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, συσχέτιση μεγεθών στη γεωμετρία (Ε=1/2βυ), στη φυσική (υ=s/t), κτλ, γενικά, σχέση ανεξάρτητης-εξαρτημένης μεταβλητής και υπολογισμός ενός μεγέθους με αντικατάσταση αριθμού στις μεταβλητές. Τέλος, διερευνούν την έννοια της συνάρτησης μέσω διαφορετικών αναπαραστάσεων μονοσήμαντων αντιστοιχιών.

Γ΄ κύκλος: Η ανάπτυξη της υπο-τροχιάς της κανονικότητας ολοκληρώνεται με τους μαθητές να διερευνούν αριθμητικές κανονικότητες, να διατυπώνουν το γενικό όρο λεκτικά και συμβολικά και να τις αναπαριστούν εικονικά, αριθμητικά με πίνακες ή γεωμετρικά σε σύστημα ημι-αξόνων.

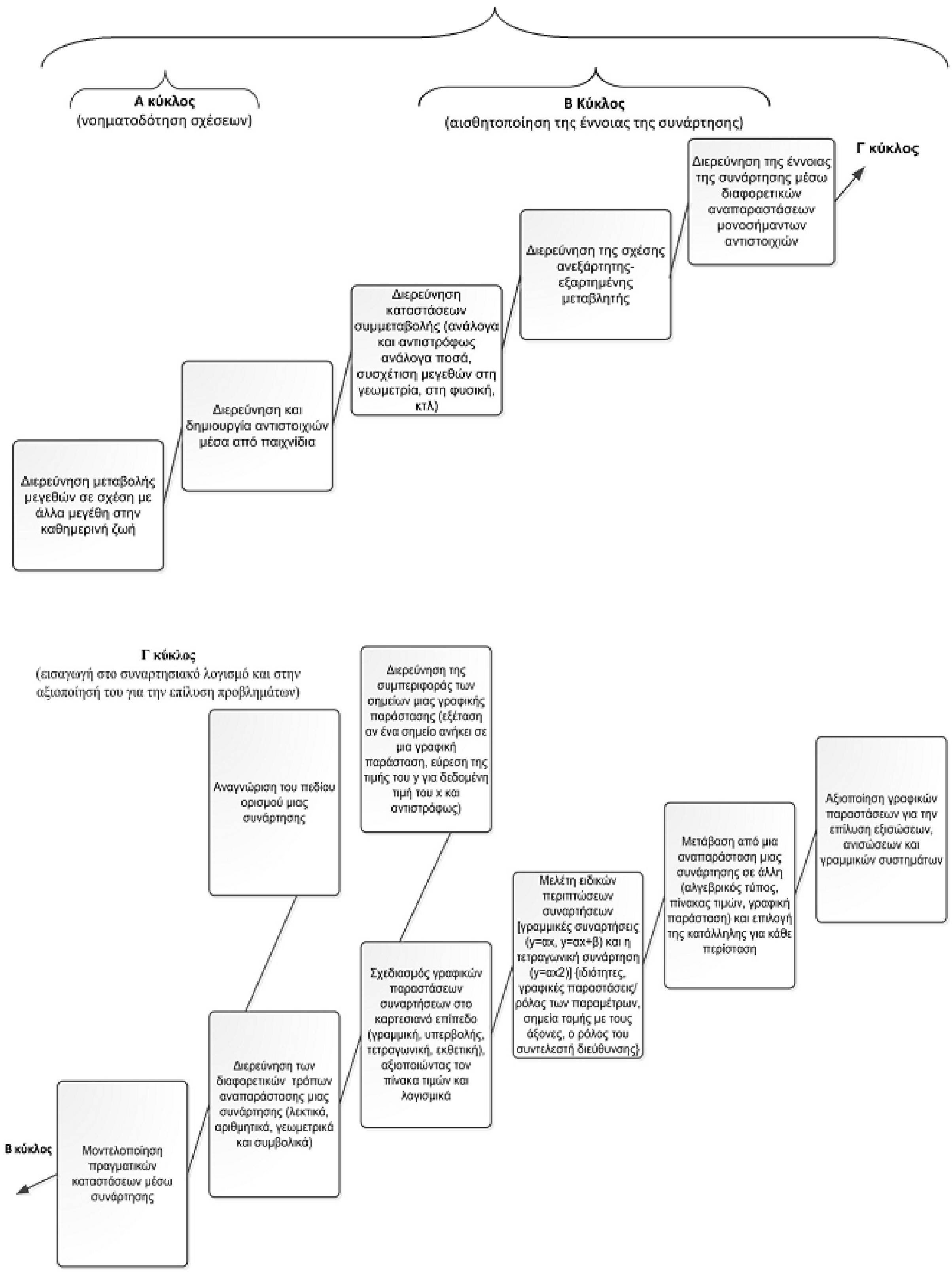
Η υπο-τροχιά των συναρτήσεων επικεντρώνεται, πλέον, στις διαφορετικές μορφές αναπαράστασής της και της χρήσης τους για την επίλυση προβλημάτων. Ειδικότερα, οι μαθητές, οικοδομώντας πάνω στη σχετική εμπειρία των προηγούμενων κύκλων, μοντελοποιούν μια κατάσταση με μια συνάρτηση, εκφράζουν μια συνάρτηση με διαφορετικούς τρόπους (λεκτικά, αριθμητικά, γεωμετρικά και συμβολικά), βρίσκουν τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής για δεδομένες τιμές της εξαρτημένης και αντιστρόφως και αναγνωρίζουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης.

Ακολούθως, η σχετική εργασία στην τάξη εστιάζεται στις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων: οι μαθητές σχεδιάζουν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων (γραμμικών, υπερβολών, τετραγωνικών, εκθετικών με αυτήν τη σειρά), οι οποίες μοντελοποιούν μια κατάσταση, χρησιμοποιώντας σημεία (πίνακα τιμών) και λογισμικά. Ακόμη, εξετάζουν αν ένα σημείο ανήκει σε μια γραφική παράσταση και, τη χρησιμοποιούν για να βρουν την τιμή του y για δεδομένη τιμή του x και αντιστρόφως.

Στη συνέχεια, η εστίαση μετακινείται στη μελέτη ειδικών περιπτώσεων συναρτήσεων: οι μαθητές διερευνούν τις γραμμικές συναρτήσεις ($y=αx$, $y=αx+β$) και την τετραγωνική συνάρτηση $y=αx^2$, τις ιδιότητές τους και τις γραφικές τους παραστάσεις (εξετάζονται ο ρόλος των παραμέτρων, τα σημεία τομής με τους άξονες, ο ρόλος του συντελεστή διεύθυνσης και η χρήση του στο σχεδιασμό της γραφικής παράστασης).

Η υπο-τροχιά που αφορά στη συνάρτηση ολοκληρώνεται με δραστηριότητες που ενθαρρύνουν τους μαθητές να μετακινούνται από μια αναπαράσταση σε άλλη (αλγεβρικός τύπος, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση), να επιλέγουν την κατάλληλη, σε κάθε περίσταση, αναπαράσταση και να χρησιμοποιούν τις γραφικές παραστάσεις για την επίλυση εξισώσεων, ανισώσεων και γραμμικών συστημάτων.

Τα σχεδιαγράμματα που παρουσιάζονται στη συνέχεια συνιστούν μια προσπάθεια σχηματικής αποτύπωσης της ανάπτυξης μιας τροχιάς για την έννοια της συνάρτησης στην υποχρεωτική εκπαίδευση (Α΄, Β΄ και Γ΄ κύκλοι).



Σχεδιάγραμμα 2. Σχηματική αναπαράσταση μιας ανάπτυξης της τροχιάς «συνάρτηση» στους τρεις κύκλους (εδώ εμφανίζεται σε δύο μέρη για πρακτικούς λόγους).

Βασικά θέματα: Κανονικότητες – Συναρτήσεις

Κανονικότητες (Α΄ τάξη), Συναρτήσεις (Β΄ και Γ΄ τάξεις)

Σημασία της ενότητας: Η συνάρτηση είναι μια θεμελιώδης μαθηματική έννοια και αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο με το οποίο μπορεί να μελετηθεί μια ποικιλία θεμάτων από τους αριθμούς (π.χ. πράξεις), την άλγεβρα (π.χ. εξισώσεις), τη μέτρηση (π.χ. εμβαδά) κλπ. Συγχρόνως είναι και μια από τις πιο σύνθετες και δυσκολότερες μαθηματικές έννοιες για τους μαθητές. Η αναζήτηση κανονικοτήτων (και γενικότερα, αναλλοίωτων χαρακτηριστικών και σχέσεων) βρίσκεται στο κέντρο της μαθηματικής δραστηριότητας. Η ενασχόληση των μαθητών με αυτό το πεδίο μπορεί να βοηθήσει στην καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης (διερεύνηση, εικασία, μοντελοποίηση) και να αποτελέσει ένα σημείο εισαγωγής στις συναρτήσεις και την άλγεβρα.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Οι μαθητές στο Δημοτικό σχολείο έχουν ασχοληθεί με κανονικότητες (γεωμετρικά μοτίβα αλλά και ακολουθίες αριθμών) και έχουν φτάσει να διατυπώνουν το γενικό όρο μιας κανονικότητας (τουλάχιστον λεκτικά). Έχουν ασχοληθεί με φαινόμενα συμμεταβολής μεγεθών (από την καθημερινή ζωή και από τη γεωμετρία) και με προβλήματα ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Επιπλέον, έχουν χρησιμοποιήσει συστήματα συντεταγμένων. Στην Α΄ Γυμνασίου θα ασχοληθούν με την αλγεβρική και τη γραφική αναπαράσταση αριθμητικών κανονικοτήτων, στη Β΄ Γυμνασίου με την έννοια της συνάρτησης, τις αναπαραστάσεις της και ιδιαίτερα με τις $y=\alpha x$, $y=\alpha x+\beta$ και $y=\alpha/x$, ενώ στη Γ΄ Γυμνασίου με την $y=\alpha x^2$. Συγχρόνως, θα συνδέουν τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης με τις εξισώσεις, τα συστήματα και άλλα θέματα.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι δυσκολίες των μαθητών με τις συναρτήσεις σχετίζονται κυρίως με:

- τη συνθετότητα της έννοιας, την ποικιλία των μαθηματικών νοημάτων που σχετίζονται με αυτήν, όπως μεταβλητή (ανεξάρτητη και εξαρτημένη), συμμεταβολή, σύνολο, καθώς και την ποικιλία των αναπαραστάσεών της (λεκτική διατύπωση, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση, πίνακας τιμών)
- το επίπεδο αφαίρεσης που απαιτεί η μελέτη της συνάρτησης από τα διαφορετικά πλαίσια στα οποία μπορεί να εμφανίζεται (αριθμητική, μέτρηση κλπ), καθώς και η ίδια η διαφορετικότητα αυτών των πλαισίων
- την αναγκαιότητα να αντιληφθούν οι μαθητές την έννοια της συνάρτησης σε ένα επίπεδο ως διαδικασία (πχ βρίσκω την τιμή του y για κάποια τιμή του x) και σε ένα άλλο ως αντικείμενο που συνοδεύεται από μια ποικιλία αναπαραστάσεων (πχ. διαφορετικές συναρτήσεις–αντικείμενα μπορεί να συγκρίνονται μεταξύ τους ως προς κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά). Συνήθως οι μαθητές Γυμνασίου παραμένουν στην αντίληψη της συνάρτησης ως μια υπολογιστική διαδικασία και δυσκολεύονται να περάσουν στο επίπεδο της συνάρτησης–αντικείμενο (πχ. να συσχετίσουν έναν τρόπο αναπαράστασής της με έναν άλλο)

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση: Η διερεύνηση των κανονικοτήτων μπορεί να περιλαμβάνει δραστηριότητες μοντελοποίησης ενός προβλήματος (πχ με έναν πίνακα), ανακάλυψης του κανόνα που παράγει για γνωστή ακολουθία αριθμών, αλγεβρικής διατύπωσής του (με χρήση μόνο μιας μεταβλητής) και γραφικής αναπαράστασης. Είναι σκόπιμη η διερεύνηση κανονικοτήτων με διαφορετικά χαρακτηριστικά: γραμμικές (πχ. 2ν, 3ν+2) αλλά και μη γραμμικές (πχ. $ν^2$, 1/ν, $2^ν$), κοκ. Τέτοιου είδους μαθηματικές δραστηριότητες μπορούν να βοηθήσουν την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και να αποτελέσουν έναν αποτελεσματικό τρόπο μετάβασης στην αλγεβρική παράσταση και στην έννοια της συνάρτησης.

Η μοντελοποίηση καταστάσεων, και η επίλυση προβλημάτων συνδέει τα μαθηματικά με τον κόσμο και τις άλλες επιστήμες και δίνει αξία και νόημα στην ενασχόληση των μαθητών με τις συναρτήσεις. Έτσι, θα πρέπει να αφιερώνεται χρόνος σε δραστηριότητες μετάφρασης πραγματικών ή ρεαλιστικών καταστάσεων και λεκτικών διατυπώσεων σε αλγεβρικές παραστάσεις και συναρτήσεις. Ομοίως, χρειάζεται να δίνεται χρόνος στους μαθητές για να χειριστούν τις συναρτήσεις στο λειτουργικό–διαδικαστικό επίπεδο (εύρεση της εξαρτημένης μεταβλητής για συγκεκριμένες τιμές της ανεξάρτητης και αντιστρόφως, κατασκευή πίνακα τιμών, ερμηνεία των τιμών που βρέθηκαν με βάση το πρόβλημα). Συγχρόνως, χρειάζεται να συζητούνται με ρητό τρόπο θεμελιώδη στοιχεία της έννοιας της συνάρτησης (πχ. ότι για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής υπάρχει μοναδική τιμή της εξαρτημένης), χωρίς αυτό να σημαίνει την αποστήθιση κανόνων και ορισμών. Επίσης, μέσα από συγκεκριμένες καταστάσεις μπορεί να φαίνεται ότι υπάρχουν χαρακτηριστικά που δεν απαιτούνται ώστε μια σχέση να είναι συνάρτηση (πχ. η ύπαρξη αλγεβρικού τύπου, η ανεξάρτητη μεταβλητή να παίρνει τιμές από ένα διάστημα πραγματικών, κλπ).

Το πέρασμα στο επίπεδο της συνάρτησης–αντικείμενο μπορεί να υποστηριχθεί δίνοντας έμφαση στην ποικιλία των αναπαραστάσεων και τη μετάφραση από τη μία στην άλλη, καθώς και από τη διερεύνηση και σύγκριση στοιχείων όπως η κλίση ή ο ρυθμός μεταβολής, ο ρόλος των α και β στην y=αx+β, κοκ. Η ψηφιακή τεχνολογία παρέχει αποτελεσματικά εργαλεία διερεύνησης, οπτικοποίησης και σύνδεσης των παραπάνω στοιχείων, με την προϋπόθεση ότι οι μαθητές δεν έχουν το ρόλο του θεατή, αλλά εμπλέκονται με τη χρήση των προσφερόμενων αναπαραστάσεων για την εκτέλεση μαθηματικών δράσεων, τη διερεύνηση μαθηματικών ιδεών και την επίλυση προβλημάτων.

Οι συνδέσεις με άλλες περιοχές των σχολικών μαθηματικών (πχ. εξισώσεις, εμβαδά) αλλά και τις εξωσχολικές εμπειρίες των μαθητών μπορούν να συμβάλουν στην κατανόηση τόσο των συναρτήσεων, όσο και των περιοχών με τις οποίες συνδέονται. Ιδιαίτερη σημασία χρειάζεται να δοθεί στην αντιμετώπιση προβλημάτων με ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, καθώς και στην αντιμετώπιση πιθανών παρανοήσεων (όπως πχ. ότι ανάλογα είναι δύο ποσά τα οποία όταν αυξάνει το ένα τότε αυξάνει και το άλλο, ή αυξάνονται και τα δύο με τον ίδιο αθροιστικό τρόπο).

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Β΄ Γυμνασίου: ΑΔ1

Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η ερμηνεία της γραφικής παράστασης. Το πρόβλημα και η εξοικείωση των μαθητών με τέτοιου είδους εικόνες από την καθημερινή και τη σχολική τους ζωή, αναμένεται να διαμορφώσουν ένα πρόσφορο πλαίσιο για τη διερεύνηση εννοιών όπως γραφική παράσταση, ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή, διατεταγμένο ζεύγος και (χωρίς τη χρήση της ορολογίας) πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών.

διεργασία επικοινωνίας με χρήση φυσικής γλώσσας, συμβόλων και αναπαστά–σεων

Β΄ Γυμνασίου: ΑΔ3

Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εννοιολογική μετάβαση από τα ανάλογα ποσά και τη σχέση αναλογίας στη συνάρτηση ψ=αχ και ακολούθως για τη διερεύνηση του ρόλου του α ως η μεταβολή της τεταγμένης σε μοναδιαία αύξηση της τετμημένης. Χρησιμοποιείται το λογισμικό F-Probe, ένα δυναμικό εργαλείο αλγεβρικής έκφρασης που συνδέει πολλαπλές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων (τύπος, πίνακας τιμών, γραφική αναπαράσταση). Προτείνεται η ανάπτυξη των δραστηριοτήτων να γίνει στο σχολικό εργαστήριο σε ομάδες των 3-4 ατόμων. Αν οι μαθητές δεν έχουν προηγούμενη επαφή με το συγκεκριμένο λογισμικό προτείνεται να αφιερώσει ο εκπαιδευτικός διδακτικό χρόνο για την εξοικείωση των μαθητών με τις απλές και βασικές λειτουργίες του λογισμικού. Υποστηρικτικά θα μπορούσε στο συγκεκριμένο φύλλο εργασίας να ενσωματωθεί βοήθεια χρήσης του λογισμικού.

διεργασία επιλογής και χρήσης ψηφιακών εργαλείων για διερεύνηση και επικοινωνία

διεργασία ενδομαθηματ ικών συνδέσεων

Β΄ Γυμνασίου: ΑΔ4

Η δραστηριότητα έχει ως στόχο τη διερεύνηση του σταθερού ρυθμού μεταβολής στις συναρτήσεις y=αx και y=αx+β και τη σύγκριση με άλλες συναρτήσεις. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και για τη διερεύνηση της επίδρασης των α και β στη γραφική παράσταση της y=αx+β. Στο Geogebra οι μαθητές διερευνούν τη μεταβολή του y για

διεργασία διερεύνησης με χρήση ψηφιακών εργαλείων μοναδιαία αύξηση του x, παρατηρούν ότι αυτή είναι σταθερή για τις ευθείες, αντίθετα από ότι συμβαίνει σε τετραγωνικές και άλλες συναρτήσεις. Τα πλεονεκτήματα της χρήσης του ψηφιακού εργαλείου σχετίζονται με τη δυνατότητα αλλαγής των παραμέτρων και μετακίνησης σημείων με ταυτόχρονη παρατήρηση των επιδράσεων που έχουν αυτές οι αλλαγές. Είναι σημαντικό να δράσουν οι ίδιοι οι μαθητές στις προσφερόμενες αναπαραστάσεις (πχ. στο εργαστήριο πληροφορικής), να αναζητήσουν απαντήσεις στα ερωτήματα της δραστηριότητας και να τα συζητήσουν μέσα στις ομάδες τους και με όλη την τάξη. Ανάλογα με την εξέλιξη της συζήτησης, ο εκπαιδευτικός μπορεί να θέσει και το ερώτημα αν μπορούν μετά από αυτή τη διερεύνηση να εξηγήσουν το γιατί η $y=\alpha x$ είναι ευθεία ενώ η $y=\alpha x^2$ όχι.

διεργασία επικοινωνίας με χρήση φυσικής γλώσσας, συμβόλων και αναπαραστάσεων

διεργασίες γενίκευσης και αιτιολόγησης

Ενδεικτικές δραστηριότητες που δεν περιέχονται στο ΠΣ:

1. Η κατανάλωση βενζίνης ενός συγκεκριμένου αυτοκινήτου κατά τη διάρκεια ενός μεγάλου ταξιδιού είναι 8 λίτρα την ώρα. Γεμίζουμε το ρεζερβουάρ του αυτοκινήτου με 50 λίτρα στην αρχή του ταξιδιού. Μπορείτε να εκφράσετε με μια σχέση την ποσότητα y της βενζίνης που υπάρχει στο ρεζερβουάρ μετά από x ώρες ταξιδιού; Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το x; Κατασκευάστε έναν πίνακα τιμών και σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Τι εκφράζουν τα σημεία που η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες; Χρησιμοποιήστε τον τύπο και τη γραφική παράσταση για να απαντήσετε στις ερωτήσεις: Πόση βενζίνη υπάρχει στο ρεζερβουάρ μετά από 5 ώρες και 30 λεπτά ταξιδιού; Μετά από πόσες ώρες υπάρχουν 22 λίτρα βενζίνη; (Β΄ τάξη)

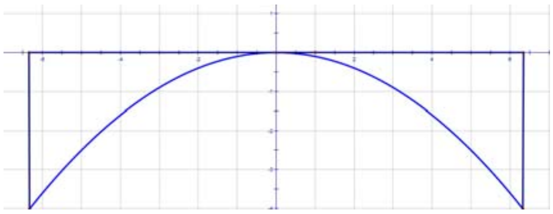
   Σχόλιο: Στόχοι της δραστηριότητας είναι η μοντελοποίηση του προβλήματος με μια συνάρτηση και η χρήση τόσο του τύπου όσο και της γραφικής παράστασης για την απάντηση ερωτήσεων που σχετίζονται με το πρόβλημα.

2. Για τις συναρτήσεις: $y_1=5+2x$, $y_2=x^2$ και $y_3=2^x$, κατασκευάστε πίνακες τιμών για τις τιμές 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 του x. Εξετάστε τον τρόπο που αυξάνεται το y_1 όταν το x αυξάνεται κατά μια μονάδα (από το 0 στο 1, από το 1 στο 2, από το 2 στο 3 κοκ). Κάνετε το ίδιο για το y_2 και το y_3. Τι παρατηρείτε;

   Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων. Με ποιον τρόπο οι προηγούμενες παρατηρήσεις σας (για τον ρυθμό αύξησης των y) φαίνονται στις γραφικές παραστάσεις; (Β΄ τάξη)

   Σχόλιο: Μέσα από τη σύγκριση διαφορετικών συναρτήσεων οι μαθητές μπορούν να αντλήσουν συμπεράσματα για το ρυθμό μεταβολής (σταθερός για την ευθεία και μη σταθερός για την τετραγωνική και την εκθετική συνάρτηση) και να συνδέσουν αυτά τα συμπεράσματα με τη μορφή των γραφικών παραστάσεων (ευθεία ή καμπύλη).

3. Το σχήμα δείχνει την εικόνα μιας παραβολικής γέφυρας. Να κάνετε την προσομοίωσή της σε ένα αλγεβρικό ψηφιακό σύστημα και να προσπαθήσετε να βρείτε την εξίσωση της παραβολής. (Γ΄ τάξη)



Σχόλιο: Στόχος της δραστηριότητας είναι η μετάφραση της γραφικής παράστασης σε τύπο συνάρτησης. Αυτή η μετάφραση δυσκολεύει τους μαθητές ιδιαίτερα στην περίπτωση που το σχήμα της γραφικής παράστασης δεν είναι προφανές (αν είναι παραβολή ή κάποια άλλη καμπύλη). Η συγκεκριμένη περίπτωση (με γνωστό το ότι πρόκειται για παραβολή) προτείνεται να αντιμετωπιστεί με χρήση ψηφιακών εργαλείων (πιθανόν με την κατασκευή μιας παραβολής της μορφής $y=αx^2$ και μεταβολή του α ώστε να συμπίπτει με τη δοθείσα γραφική παράσταση). Εναλλακτικά, μπορεί να αντιμετωπιστεί και αλγεβρικά (υποθέτοντας ότι έχει τύπο της μορφής $y=αx^2$ και διέρχεται από γνωστά σημεία).

9. ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΣΧΕΔΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θέμα: Σχεδιασμός διδασκαλίας της θεματικής ενότητας «Στοχαστικά Μαθηματικά- Στατιστική»» της Α΄ Γυμνασίου

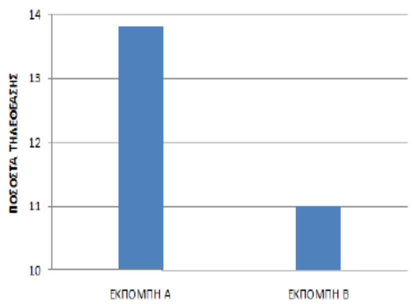
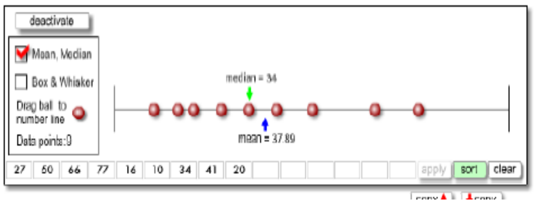
Στην ενότητα "Στατιστική: α) Δεδομένα β) Μέτρα θέσης γ) Μεταβλητότητα" του ΠΣ υπάρχουν 8 στόχοι (Σ1 έως Σ8). Σχεδιάστε μια διδασκαλία για την εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητα σχετική με κάποιους απ' αυτούς τους στόχους. Περιγράψτε μια πιθανή (επιδιωκόμενη) πορεία διαπραγμάτευσης στην τάξη.

Υλικό προς αξιοποίηση

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 14

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Σ1. Διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα και αφορούν διαφορετικά χαρακτηριστικά της περίπτωσης που εξετάζεται. *Σ2.* Συλλέγουν δεδομένα καθορίζοντας κριτήρια επιλογής και αιτιολογούν τις επιλογές τους. *Σ3.* Κατασκευάζουν απλά κυκλικά διαγράμματα και χρονοδιαγράμματα. *Σ4.* Επιλέγουν κατάλληλες μορφές αναπαράστασης και επιχειρηματολογούν για τις επιλογές τους. *Σ5.* Ερμηνεύουν πίνακες και στατιστικά διαγράμματα, καταλήγουν σε συμπεράσματα και κάνουν προβλέψεις.	***Δεδομένα*** • συλλογή, αναπαράσταση, και ερμηνεία δεδομένων *(5 ώρες)*	Οι μαθητές είναι σημαντικό να χρησιμοποιούν πραγματικά δεδομένα που συλλέγουν οι ίδιοι ως πλαίσιο αναφοράς για τις έννοιες της Στατιστικής . Επίσης είναι σημαντικό να αναπτύξουν κριτική στάση απέναντι σε τρόπους παρουσίασης των δεδομένων που ίσως είναι παραπλανητικοί. Για την κατασκευή απλών κυκλικών διαγραμμάτων δίνονται έτοιμοι κύκλοι χωρισμένοι σε ίσα τόξα (π.χ. 4 ή 6 ή 12) και δεδομένα που μπορούν να παρασταθούν σε αυτούς. Ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ1	Μέρος του 4ου κεφαλαίου του βιβλίου: Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας, κ.ά.) με κατάλληλες τροποποιήσεις

Σ6. Εικάζουν ή/και προσδιορίζουν την διάμεσο τιμή, την επικρατούσα τιμή και την μέση τιμή με βάση την αναπαράσταση των δεδομένων. *Σ7.* Χρησιμοποιούν τα μέτρα θέσης για να περιγράψουν δεδομένα, να κάνουν συγκρίσεις και να εξάγουν συμπεράσματα.	***Μέτρα θέσης*** *(3 ώρες)*	Οι μαθητές είναι σημαντικό να αναπτύξουν μεθόδους προσδιορισμού των μέτρων θέσης, πέρα από τις καθαρά υπολογιστικές. Ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ2.	Μέρος του 4ου κεφαλαίου του βιβλίου: Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας, κ.ά.) με κατάλληλες τροποποιήσεις http://illuminations.nctm.org/activitydetail.aspx?ID=160 Οδηγίες: Οδηγίες-Α-ΣΔ2-Διάμεσος_ Μέση τιμή
Σ8. Περιγράφουν χαρακτηριστικά των δεδομένων που προκύπτουν από τις αναπαραστάσεις τους χρησιμοποιώντας ενδεχομένως και εκφράσεις όπως: εύρος, συστάδες δεδομένων, κενά, απόμακρη τιμή. *Σ9.* Εξηγούν χαρακτηριστικά των δεδομένων (όπως λόγοι ύπαρξης απόμακρων τιμών) ή πιθανούς λόγους για την μεταβλητότητα των δεδομένων.	***Μεταβλητότητα*** *(1 ώρα)*	Η ηλικιακή περίοδος, για παράδειγμα, είναι ένας από τους πιθανούς λόγους της μεταβλητότητας του ύψους των μαθητών (οι έφηβοι έχουν διαφορετικό ύψος από τα παιδιά των μικρών τάξεων του Δημο-τικού). Ωστόσο υπάρχουν και άλλοι λόγοι, επειδή έφηβοι της ίδιας ηλικίας δεν έχουν το ίδιο ύψος.	

ΣΔ1	Με αφορμή ένα διάγραμμα, όπως το διπλανό, που παρουσιάζει τα ποσοστά τηλεθέασης ανάμεσα σε δύο τηλεοπτικές εκπομπές, οι μαθητές κρίνουν και αξιολογούν τη δήλωση που έκαναν οι συντελεστές της εκπομπής Α, όταν παρουσίαζαν και συνέκριναν τα ποσοστά τηλεθέασης και η οποία ήταν ότι: «Το γράφημα δείχνει ξεκάθαρα ότι η εκπομπή Α είναι πιο δημοφιλής από την εκπομπή Β και στην πραγματικότητα είναι σχεδόν τρεις φορές πιο δημοφιλής». 	**Σ5**
ΣΔ2	Μέσα από το δυναμικό χειρισμό δεδομένων οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν και να κατασκευάσουν καταστάσεις με μικρά σύνολα δεδομένων τα οποία θα 	**Σ6, Σ7**
	προβλημάτων καθώς και στρατηγικές για τη διερεύνηση τέτοιων προβλημάτων. Διεύθυνση ιστοσελίδαςhttp://illuminations.nctm.org/activitydetail.aspx?ID=160 Οδηγίες:Οδηγίες-Α&Β-Σ Διάμεσος_ Μέση τιμή	

Από τον οδηγό του εκπαιδευτικού:

Η θεματική ενότητα της Στατιστικής αναπτύσσεται σε τρεις τροχιές: *δεδομένα, μέτρα θέσης* και *μεταβλητότητα.*

• Η πρώτη τροχιά «Δεδομένα» αναφέρεται στη συλλογή, οργάνωση, αναπαράσταση και ερμηνεία διαφορετικής ποιότητας δεδομένων και εξελίσσεται για να συμπεριλάβει:

— κατηγορικά δεδομένα (δηλαδή, δεδομένα που οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί (π.χ. παιχνίδια, χρώματα κ.λπ., βλ. Α' Δημοτικού, δραστηριότητα ΣΔ1),

— διακριτά ποσοτικά δεδομένα (δηλαδή, δεδομένα που οι τιμές τους είναι ακέραιοι αριθμοί π.χ. αριθμός δωματίων μιας κατοικίας, αριθμός παιδιών μιας οικογένειας, βλ. Β' Δημοτικού, δραστηριότητα ΣΔ1)

— συνεχή ποσοτικά δεδομένα (δηλαδή, δεδομένα που οι τιμές τους δεν είναι μόνο ακέραιοι αριθμοί π.χ. ύψος, βλ. Ε' Δημοτικού, δραστηριότητα ΣΔ1).

Οι τρόποι αναπαράστασης των δεδομένων που χρησιμοποιούν οι μαθητές εξελίσσονται από τους πιο απλούς σε πιο σύνθετους: διαγράμματα με υλικά, εικονογράμματα, ραβδογράμματα, σημειογράμματα (Α' κύκλος), διπλά ραβδογράμματα (Β' κύκλος), κυκλικά διαγράμματα, χρονοδιαγράμματα, διαγράμματα διασποράς, ιστογράμματα (Γ' κύκλος). Ανάλογα, η ερμηνεία των δεδομένων που αποσκοπεί στην ανάπτυξη επιχειρηματολογίας από τους μαθητές για τα δεδομένα που έχουν συγκεντρωθεί ξεκινά από την απλή ανάγνωση και σύγκριση των πληροφοριών (Α' κύκλος) και προχωρά στην εξαγωγή συμπερασμάτων (Β' κύκλος) και στην πραγματοποίηση προβλέψεων με βάση δείγματα πληθυσμών (Γ' κύκλος).

• Η δεύτερη τροχιά «Μέτρα θέσης» αφορά στη χρήση αριθμητικών εκφράσεων, οι οποίες επιτρέπουν τη συνοπτική περιγραφή δεδομένων και τη σύγκριση ομάδων δεδομένων. Τα μέτρα θέσης εισάγονται σταδιακά στο Β' κύκλο και είναι η επικρατούσα τιμή (Γ' Δημοτικού), η διάμεσος (Δ' Δημοτικού) και η μέση τιμή (Ε' Δημοτικού). Τα μέτρα θέσης, στην υποχρεωτική εκπαίδευση, υπολογίζονται μόνο για διακριτά ποσοτικά δεδομένα.

• Η τρίτη τροχιά «Μεταβλητότητα» αναφέρεται σε αριθμητικές εκφράσεις που χαρακτηρίζουν τη διασπορά των δεδομένων. Στο Β' κύκλο εισάγεται το εύρος (Γ' Δημοτικού) και στο Γ' κύκλο η μέση απόλυτη απόκλιση (Γ' Γυμνασίου).

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Στο Δημοτικό, από τις μικρές κιόλας τάξεις, οι μαθητές έχουν εμπλακεί[4] με έννοιες της στατιστικής. Έχουν ασχοληθεί με:

[4] Ο διδάσκων θα πρέπει να λάβει υπ' όψη ότι όσα αναφέρονται στην ενότητα αυτή σχετίζονται με το συγκεκριμένο ΠΣ. Κατά την διδασκαλία της στατιστικής στο Δημοτικό το προηγούμενο ΠΣ άρχιζε από την Δ' τάξη και δεν περιελάμβανε την διατύπωση ερωτημάτων, την οργάνωση με απλές ομαδοποιήσεις, τα σημειογράμματα, την διάμεσο, την έννοια του δείγματος και του πληθυσμού. Με το

• τα είδη των δεδομένων (ποιοτικά, διακριτά ποσοτικά και συνεχή ποσοτικά)

• τρόπους οργάνωσης τους (πίνακες συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων και απλές ομαδοποιήσεις)

• τρόπους αναπαράστασης τους (εικονογράμματα, ραβδογράμματα, σημειογράμματα, διαγράμματα συχνοτήτων) και ερμηνείας αυτών

• τα μέτρα θέσης (επικρατούσα τιμή, μέση τιμή, διάμεσος)

• το εύρος για να περιγράψουν την μεταβλητότητα των δεδομένων

Επίσης έχουν προβεί σε διατύπωση ερωτημάτων που μπορούν να απαντηθούν μέσα από συλλογή δεδομένων, έχουν συλλέξει δεδομένα και έχουν βγάλει συμπεράσματα βασιζόμενοι σε αυτά. Επιπλέον διακρίνουν το δείγμα από τον πληθυσμό.

Στην Α' Γυμνασίου οι μαθητές θα διατυπώσουν πιο σύνθετα ερωτήματα, θα συλλέξουν κατάλληλα δεδομένα από το σχολικό περιβάλλον, θα κατασκευάσουν απλά κυκλικά διαγράμματα και χρονοδιαγράμματα, θα αναπτύξουν μεθόδους προσδιορισμού των μέτρων θέσης πέρα από τις υπολογιστικές. Επίσης θα αρχίσουν να αναπτύσσουν μία κριτική στάση απέναντι σε παραπλανητικές παρουσιάσεις δεδομένων.

Στην Β' τάξη θα διατυπώσουν ερωτήματα και θα συλλέξουν δεδομένα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό τους περιβάλλον, θα κατασκευάσουν κυκλικά διαγράμματα και διαγράμματα διασποράς, θα διερευνήσουν ιδιότητες της μέσης τιμής ενώ παράλληλα θα αρχίσουν να εξετάζουν κριτικά στατιστικές έρευνες και τις ερμηνείες τους.

Στην Γ' τάξη θα κατασκευάσουν ιστογράμματα και θα γνωρίσουν την έννοια της μέσης απόλυτης απόκλισης, για να περιγράψουν ποσοτικά την μεταβλητότητα των δεδομένων. Θα εμπλακούν με την έννοια της αντιπροσωπευτικότητας ενός δείγματος και θα διεξάγουν στατιστική έρευνα συνδυάζοντας τις μεθόδους και τα εργαλεία που έμαθαν στο Γυμνάσιο.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι δυσκολίες των μαθητών σε σχέση με την στατιστική μπορεί να σχετίζονται με:

• την ανάγνωση και/ή την ερμηνεία των διάφορων γραφημάτων που χρησιμοποιούνται στην στατιστική. Για να μπορέσουν να διαβάσουν πληροφορίες και να εξάγουν συμπεράσματα απ' αυτά, θα πρέπει οι μαθητές να γνωρίζουν κάποιες από τις συμβάσεις που υπάρχουν σχετικά με την σχεδίαση τους. Για παράδειγμα, ότι στο ιστόγραμμα οι στήλες αντιπροσωπεύουν ένα σύνολο δεδομένων που ανήκουν σε ένα συγκεκριμένο διάστημα. Πολύ συχνά οι μαθητές βλέπουν και αντιμετωπίζουν τα διαγράμματα ως «εικόνες» και όχι ως εργαλεία από τα οποία μπορούν να μάθουν κάτι για ένα σύνολο δεδομένων ή να βρουν συγκεκριμένες πληροφορίες για ένα πρόβλημα.

συγκεκριμένο ΠΣ η εμπλοκή των μαθητών με την στατιστική ξεκινάει από το νηπιαγωγείο. Ομοίως, με βάση το προηγούμενο ΠΣ, η διδασκαλία της στατιστικής στο Γυμνάσιο περιορίζονταν στην Β' τάξη.

• με τα μέτρα θέσης , τα οποία είναι μία όχι απλή στατιστική έννοια. Το να μπορεί ένας μαθητής να θεωρήσει τη διάμεσο ή τη μέση τιμή ως τους αντιπροσώπους όλης της συλλογής των δεδομένων, ιδιαίτερα όταν συγκρίνει δύο άνισα σε πλήθος σύνολα δεδομένων, είναι κάτι που χρειάζεται χρόνο και κατάλληλες δραστηριότητες για να «ωριμάσει» ως ιδέα. Σε σχέση με τη διάμεσο υπάρχει περίπτωση οι μαθητές να συγχέουν τη θέση της και την τιμή της. Σε σχέση με τη μέση τιμή οι δυσκολίες ενδέχεται να συνδέονται με ιδιότητες της, όπως το ότι η μέση τιμή της ένωσης δύο άνισων, όσον αφορά το πλήθος, συνόλων δεδομένων δεν είναι ίση με το ημιάθροισμα των μέσων τιμών αυτών. Οι δυσκολίες των μαθητών σε σχέση με τα μέτρα θέσης δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν αποκλειστικά και μόνο με υπολογιστικές προσεγγίσεις.

• δυσκολίες που συνδέονται με άλλες μαθηματικές έννοιες, όπως για παράδειγμα η έννοια του ποσοστού, του κλάσματος κ.λπ.

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση: Η στατιστική σχετίζεται με την προσπάθεια κατανόησης, μέτρησης και περιγραφής διαδικασιών ή καταστάσεων του πραγματικού κόσμου, μέσα από την επεξεργασία ενός κατάλληλου αριθμού δεδομένων. Είναι σημαντικό οι μαθητές να χρησιμοποιούν και πραγματικά δεδομένα. Τα δεδομένα αυτά μπορεί να τα έχουν συλλέξει οι ίδιοι με δικές τους στατιστικές έρευνες , πειράματα κ.λπ. ή να προέρχονται από άλλες πηγές όπως οι στατιστικές υπηρεσίες, το διαδίκτυο, έρευνες που έχουν κάνει άλλοι κ.λπ. Η συλλογή δεδομένων θα επιτρέψει στους μαθητές να εμπλακούν ενεργά με διαδικασίες της στατιστικής, ενώ παράλληλα θα αναδυθούν θέματα που σχετίζονται με έννοιες της καθώς και σε ορισμένες περιπτώσεις με έννοιες από άλλες μαθηματικές περιοχές. Για παράδειγμα, η συλλογή μετρήσεων που αφορούν π.χ. το ύψος ή την έκταση των χεριών των μαθητών, εκτός του ότι θα αποτελεί ένα πλαίσιο αναφοράς για να μελετήσουν συγκεκριμένες έννοιες της στατιστικής, όπως το διάγραμμα διασποράς, αναδεικνύει ταυτόχρονα θέματα που σχετίζονται με παράγοντες της μεταβλητότητας, δηλαδή της διαφορετικότητας των δεδομένων λόγω σφαλμάτων στη διαδικασία μέτρησης. Παράλληλα όμως οι μαθητές διαπραγματεύονται και θέματα μονάδων μέτρησης. Η συλλογή δεδομένων δεν είναι απαραίτητο να γίνεται μόνο κατά τη διάρκεια διδασκαλίας της ενότητας αλλά μπορεί να γίνει με αφορμή κάποια άλλη δραστηριότητα (π.χ. αποτελέσματα πειράματος τύχης, προσεγγιστικός υπολογισμός ύψους κτιρίου, μετρήσεις από ένα πείραμα κ.λ.π.). Κάτι τέτοιο θα επιτρέψει στον διδάσκοντα να διαχειριστεί καλύτερα τον διδακτικό χρόνο ή να δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να δημιουργήσουν συνδέσεις με άλλες μαθηματικές έννοιες ή δεσμούς με άλλα αντικείμενα όπως η Φυσική. Τα δεδομένα που συλλέγουν οι μαθητές μια χρονιά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και κάποια επόμενη (αρκεί να τα έχει φυλάξει ο διδάσκων) μαζί με νέα, για να αποτελέσουν π.χ. αντικείμενο συγκρίσεων ή ανάπτυξης νέων εννοιών.

Ένα «στατιστικό πρόβλημα» συνήθως περιλαμβάνει τα παρακάτω στάδια:

α) Διατύπωση ενός ερωτήματος για εξερεύνηση. Κατά το στάδιο αυτό αποφασίζεται και ποια δεδομένα θα συλλεχθούν για να απαντηθεί το ερώτημα.

β) Συλλογή των δεδομένων. Στο στάδιο αυτό αποφασίζονται οι τρόποι και διαδικασίες με τις οποίες θα συλλεχθούν τα δεδομένα.

γ) Οργάνωση, αναπαράσταση και ανάλυση των δεδομένων. Κατά το στάδιο αυτό συνοψίζονται τα δεδομένα και περιγράφονται διάφορα χαρακτηριστικά τους όπως τα μέτρα θέσης, το εύρος, μέγιστη - ελάχιστη τιμή κ.λπ.

δ) Ερμηνεία των αποτελεσμάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων σε σχέση με το ερώτημα.

Τα προηγούμενα δεν εξελίσσονται πάντα σειριακά. Για παράδειγμα, μπορεί να έχουν συλλεχθεί δεδομένα και μετά από κάποια ανάλυση να προκύψει ανάγκη για νέα δεδομένα. Τα ερωτήματα μπορεί να είναι πολύ γενικά στην αρχή και στην συνέχεια να γίνονται πιο ακριβή ή πιο σύνθετα. Για παράδειγμα, οι μαθητές μπορεί να συζητούν σχετικά με το ερώτημα «ποιος είναι ο χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές για να φτάσουν από το σπίτι τους στο σχολείο;». Αν ο διδάσκων ζητήσει από τους μαθητές να εξηγήσουν διάφορους λόγους για τους οποίους οι χρόνοι των μαθητών θα είναι διαφορετικοί μπορεί να οδηγηθούν σε νέα ερωτήματα. Μπορεί π.χ. να θέσουν το ερώτημα «πόσο μπορεί να επηρεάζει ο καιρός τον χρόνο μετακίνησης;» και κάποιοι μαθητές να κάνουν αυτή την έρευνα.

Τα διαγράμματα είναι ένα βασικό εργαλείο με το οποίο θα πρέπει να μάθουν να εργάζονται οι μαθητές. Στόχος δεν είναι μόνο να μάθουν να κατασκευάζουν τα διάφορα διαγράμματα, αλλά και να τα αναλύουν. Τα διαγράμματα είναι μια «εικόνα» των δεδομένων και βοηθούν να αντλήσουμε πολλές πληροφορίες. Διαγράμματα που έχουν χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν από τους μαθητές, όπως για παράδειγμα, τα σημειογράμματα ή τα διπλά ραβδογράμματα στο Δημοτικό σχολείο, είναι καλό να χρησιμοποιούνται ξανά,. Μερικές φορές χρειάζονται αρκετά διαγράμματα για να φανεί η «ιστορία» που διηγούνται τα δεδομένα, δηλαδή για να αποκαλυφτούν τάσεις ή χαρακτηριστικά που μπορεί να υπάρχουν. Η χρήση λογιστικών προγραμμάτων, όπως το Excel, με τα οποία μπορούν να δημιουργηθούν πολλά και διαφορετικά διαγράμματα και τα οποία ενημερώνονται αυτόματα όταν αλλάζουν τα δεδομένα, ή κατάλληλων μικρών εφαρμογών από το διαδίκτυο, είναι κάτι που βοηθάει στην κατανόηση της σημασίας των διαγραμμάτων. Με βάση διαγράμματα όπως τα σημειογράμματα και τα διαγράμματα συχνοτήτων, οι μαθητές θα πρέπει να συνηθίσουν να κάνουν παρατηρήσεις σχετικά με τον τρόπο που εμφανίζονται να είναι κατανεμημένα τα δεδομένα και να περιγράφουν διάφορα χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, να περιγράφουν την περιοχή έκτασης των δεδομένων, να περιγράφουν περιοχές που είναι συγκεντρωμένα πολλά δεδομένα ή περιοχές που δεν εμφανίζονται δεδομένα, να κοιτούν για δεδομένα που να είναι απομακρυσμένα σε σχέση με τα υπόλοιπα κ.λπ. Οι περιγραφές θα πρέπει να σχετίζονται με το πλαίσιο του προβλήματος που εξετάζουν ενώ αν έχουν

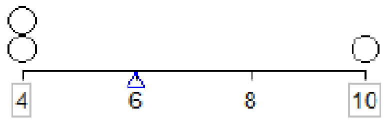
υπολογιστεί κάποια άλλα χαρακτηριστικά των δεδομένων να συνδέονται με αυτά. (Υπάρχει αναλυτικό παράδειγμα περιγραφής στον οδηγό εκπαιδευτικού του Γυμνασίου σελ. 123-124)

Σχετικά με την διδασκαλία των μέτρων θέσης, η μέση τιμή μπορεί να παρουσιαστεί με τη χρήση της μεταφοράς της «δίκαιης μοιρασιάς». Αυτό μπορεί να γίνει με την χρήση ενός φυσικού μοντέλου, όπως είναι ένας χάρακας πάνω σε μία κυρτή επιφάνεια, λίγα ίδια κέρματα και η προσπάθεια διατήρησης της ισορροπίας του συστήματος (εικόνα 1).

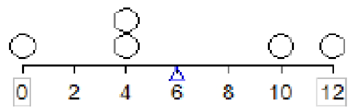
Εικόνα 1

Το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι το αντίστοιχο της μέσης τιμής των δεδομένων. Τα δεδομένα μπορεί να παρουσιαστούν ότι έχουν τιμή ίση με την ένδειξη του χάρακα στη θέση που τοποθετείται το κάθε νόμισμα, οπότε η μέση τιμή τους θα είναι η ένδειξη του χάρακα εκεί που ισορροπεί το σύστημα.

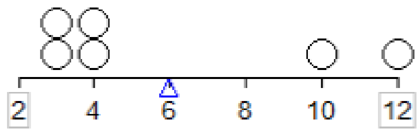
Για να διατηρηθεί η ισορροπία του συστήματος όταν τοποθετούμε ένα νέο νόμισμα σε κάποια απόσταση από το κέντρο ισορροπίας, πρέπει να τοποθετήσουμε στην αντίθετη κατεύθυνση: ένα ίδιο νόμισμα στην ίδια απόσταση ή δύο ίδια νομίσματα στο μισό της απόστασης ή τρία ίδια νομίσματα στο 1/3 της απόστασης κ.λπ. Οι εικόνες *2,* 3, 4 και 5 δείχνουν κατά σειρά αυτές τις καταστάσεις με σημειογράμματα για κάποια δεδομένα και την μέση τιμή να αναπαρίσταται με το μπλε τρίγωνο.



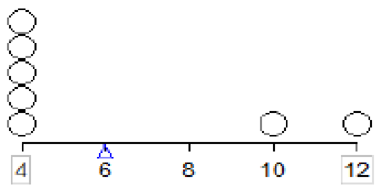
Εικόνα 2



Εικόνα 3



Εικόνα 4



Εικόνα 5

Η μέση τιμή και η διάμεσος πρέπει να παρουσιάζονται ως αντιπρόσωποι του συνόλου των δεδομένων. Ένα πλαίσιο που θα βοηθήσει τους μαθητές να δημιουργήσουν αυτή την εικόνα, είναι αυτό των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων του ίδιου αντικειμένου, όπου η μέση τιμή ή η διάμεσος προβάλει ως ο αντιπρόσωπος όλων των μετρήσεων. Ευκαιρίες για κάτι τέτοιο προσφέρονται όταν οι μαθητές κάνουν π.χ. κάποια μέτρηση στην Γεωμετρία. Επίσης οι συγκρίσεις δύο ομάδων (π.χ. αγόρια - κορίτσια) ως προς κάποιο χαρακτηριστικό.

Στην Α' Γυμνασίου οι μαθητές θα πρέπει να ασχοληθούν με δραστηριότητες που θα τους επιτρέψουν να αναπτύξουν τεχνικές εικασίας ή/ και προσδιορισμού της μέσης τιμής και της διαμέσου μέσα από τις αναπαραστάσεις των δεδομένων ώστε να μην εργάζονται μόνον αλγοριθμικά. Θα πρέπει να δουλέψουν και με την παρουσίαση της μέσης τιμής ως «δίκαιης μοιρασιάς» και να αρχίσουν να δουλεύουν με την μέση τιμή ως το σημείο ισορροπίας των δεδομένων.

Στην Β' Γυμνασίου οι μαθητές θα διερευνήσουν ιδιότητες της μέσης τιμής όπως την μεταβολή της όταν προστίθενται - πολλαπλασιάζονται όλα τα δεδομένα με τον ίδιο αριθμό. Επίσης θα πρέπει να εμπλακούν με δραστηριότητες κατά τις οποίες θα αναγνωρίσουν ότι αν δύο ομάδες είναι άνισες σε πλήθος τότε η μέση τιμή του συνόλου των δύο ομάδων δεν είναι ίση με το ημιάθροισμα των μέσων τιμών των δύο ομάδων.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Α΄ Γυμνασίου: (ΠΜΑ: Σ2, Σ4, Σ5, Σ7)

Οι μαθητές διεξάγουν μία έρευνα προκειμένου να προσδιορίσουν τα «τυπικά» χαρακτηριστικά του μαθητή της Α΄ Γυμνασίου.

Καθορίζουν ποια χαρακτηριστικά θα μελετήσουν ως «τυπικά». Για παράδειγμα: φυσιολογικά χαρακτηριστικά (ύψος, μήκος της έκτασης των χεριών, έκταση δακτύλων χεριού κ.λπ.), ώρες διαβάσματος, ώρες ξεκούρασης, εξωσχολικές δραστηριότητες, χρόνος που χρειάζονται για να πάνε στο σχολείο, τρόπος μετακίνησης προς το σχολείο κ.λπ.
Καθορίζουν αν η μελέτη θα αφορά τους μαθητές του τμήματος που ανήκουν ή όλους τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου του σχολείου τους για να αποφασίσουν τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαν να συγκεντρώσουν τα δεδομένα και από ποιους.

Καθορίζουν τις διαδικασίες όπως για παράδειγμα: Αν ένα από τα χαρακτηριστικά που πρόκειται να εξεταστεί είναι «ο χρόνος που χρειάζονται για να πάνε από το σπίτι τους στο σχολείο» θα πρέπει να αποφασίσουν για το πώς θα αποκτήσουν τα σχετικά δεδομένα. Μπορεί να ρωτάνε κάποιον και να λέει την προσωπική του εκτίμηση ή κάθε μαθητής να καταγράψει για πέντε ημέρες τους χρόνους που χρειάστηκε και να χρησιμοποιηθεί ο μέσος όρος αυτών. Συζητούν για τα υπέρ και τα κατά των δύο μεθόδων και επιχειρηματολογούν σχετικά.

Διεργασία επιχειρηματολογίας

Συγκεντρώνουν τα δεδομένα, τα επεξεργάζονται, εξάγουν συμπεράσματα και παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της έρευνάς τους.

Διεργασία επικοινωνίας

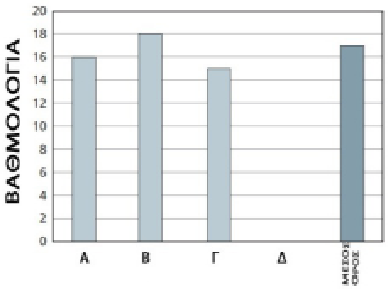
Α΄ Γυμνασίου: ΣΔ1 (ΠΜΑ: Σ5)

Στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να αρχίσουν να αναγνωρίζουν ότι ο τρόπος με τον οποίο ξεκινάει η κλίμακα του διαγράμματος επηρεάζει το οπτικό αποτέλεσμα που εμφανίζεται. Αυτό κάποιες φορές έχει σημασία, ειδικά αν συνοδεύεται από κάποια συμπεράσματα. Η δήλωση που γίνεται είναι κατά ένα μέρος αληθής. Η εκπομπή Α είναι πιο δημοφιλής αλλά δεν είναι σχεδόν 4 φορές πιο δημοφιλής από την Β. Το πόσες φορές πιο δημοφιλής είναι μπορούν οι μαθητές να το βρουν προσεγγιστικά αλλά και να το δουν οπτικά αν κάνουν τα δύο διαγράμματα με κλίμακα που να ξεκινάει από το μηδέν.

Α΄ Γυμνασίου: (ΠΜΑ: Σ6)

Ο διδάσκων παρουσιάζει μια δραστηριότητα σαν την παρακάτω με στόχο να αναπτύξουν οι μαθητές ικανότητες να προσδιορίζουν την μέση τιμή μέσα από την γραφική αναπαράσταση. Η χρήση χαρτιού με τετραγωνάκια θα βοηθήσει τους μαθητές. Η πτυχή της μέσης τιμής που παρουσιάζεται εδώ είναι αυτή της «δίκαιης μοιρασιάς». Επεκτάσεις που θα μπορούσαν να γίνουν είναι να δημιουργήσουν οι μαθητές μία κατάσταση και για τρίτο μαθητή που να έχει τον ίδιο μέσο όρο και να είναι διαφορετική από τις δύο άλλες.

«Η Μαρία έχει γράψει στα Μαθηματικά τέσσερα τεστ. Το ραβδόγραμμα (εικόνα 11) παρουσιάζει την βαθμολογία της στα τεστ Α, Β και Γ καθώς επίσης και τον μέσο όρο όλων των τεστ (η τελευταία σκούρα ράβδος).



Εικόνα 11

α) Να σχεδιάσετε πάνω στο ίδιο διάγραμμα και δίπλα στη βαθμολογία της Μαρίας, τη βαθμολογία που έχει σε κάθε τεστ ένας άλλος μαθητής ο Γιάννης, αν γνωρίζετε ότι: οι βαθμοί του και στα τέσσερα τεστ ήταν ίσοι μεταξύ τους και ο Γιάννης και η Μαρία έχουν τον ίδιο μέσο όρο.

β) Με βάση το νέο διάγραμμα που φτιάξατε, μπορείτε να σχεδιάσετε την βαθμολογία που έχει η Μαρία στο τεστ Δ; Εξηγήστε τον τρόπο που σκεφτήκατε.»

Α΄ Γυμνασίου: ΣΔ2 (ΠΜΑ: Σ6, Σ7)

Στόχος της δραστηριότητας είναι να δουν κάποιες ιδιότητες της μέσης τιμή και της διαμέσου. Χρειάζεται αρκετό χρόνο για να γίνει η δραστηριότητα μέχρι να εξοικειωθούν οι μαθητές με το περιβάλλον, να αρχίσουν να αναπτύσσουν διάφορες στρατηγικές και μετά να σκεφτούν πάνω σε αυτές και να τις εξηγήσουν. Γι΄ αυτό ο διδάσκων πρέπει στην αρχή να βάλει μικρούς στόχους για την δημιουργία συνόλων δεδομένων με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά.

Χρήση ψηφιακών εργαλείων για διερεύνηση και γενίκευση

Διεργασία μεταγνωστικής ενημερότητας

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΠΟΡΕΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΝΕΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

Παρακάτω προτείνονται δυο ενδεικτικές πορείες διδασκαλίας για την πιλοτική εφαρμογή των νέων Προγραμμάτων Σπουδών (Π.Σ.) των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο, δηλαδή μια κατανομή και σειρά διδασκαλίας των ενοτήτων στη διάρκεια του σχολικού έτους. Και οι δυο είναι βασισμένες στην παρουσίαση του Π.Σ. (ανάπτυξη των τροχιών σε βασικά θέματα ανά τάξη). Μέσα από αυτές επιδιώκεται να διδαχθούν όλες οι προβλεπόμενες ενότητες για την κάθε τάξη και να δοθεί χρόνος για τις συνθετικές εργασίες. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να επιλέξουν μια από τις προτάσεις αυτές.

Η πρώτη πρόταση δομείται με ενιαίο τρόπο (δηλαδή, ενότητες της άλγεβρας, της γεωμετρίας και των στοχαστικών μαθηματικών διαδέχονται η μία την άλλη σε μια ενιαία σειρά).

Στη δεύτερη πρόταση η διδασκαλία εξελίσσεται παράλληλα σε δυο άξονες με 2 ώρες εβδομαδιαία για τον κάθε άξονα. Ο ένας άξονας αφορά στη θεματική ενότητα Αριθμοί – Άλγεβρα (Α.Α.) και ο άλλος στις θεματικές ενότητες Γεωμετρία – Μέτρηση (Γ.Μ.) και Στοχαστικά Μαθηματικά (Σ.Μ.). Όταν ολοκληρωθεί ο ένας από τους δύο άξονες, μπορούν να αφιερωθούν και οι 4 ώρες για να ολοκληρωθεί και ο άλλος.

ΠΡΩΤΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ		
ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ	**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**	**ΩΡΕΣ**
Α.Α.	Φυσικοί Αριθμοί. Διαιρετότητα	6
Α.Α.	Φυσικοί αριθμοί. Θεσιακά συστήματα αρίθμησης	2
Γ.Μ.	Γεωμετρικά σχήματα – Μέτρηση μήκους, μέτρηση γωνίας • Αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση των γεωμετρικών σχημάτων. • Μέτρηση μήκους και γωνίας, μέτρο τόξου. • Κατασκευές και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων (κατασκευές – σχεδιασμός που συνδέονται ευθείες,	15

	ευθύγραμμα τμήματα και γωνίες).	
Α.Α.	Ακέραιοι αριθμοί	14
Α.Α.	Ρητοί αριθμοί	16
Γ.Μ.	Γεωμετρικά σχήματα – Μέτρηση μήκους, μέτρηση γωνίας • Ανάλυση των βασικών γεωμετρικών σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες. • Μέτρηση – υπολογισμοί με χρήση ιδιοτήτων και σχέσεων. • Κατασκευές και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων (κατασκευές – σχεδιασμός που συνδέονται με τρίγωνα και τετράπλευρα).	17
Α.Α.	Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Αλγεβρική και γραφική αναπαράσταση κανονικοτήτων	4
Α.Α.	Αλγεβρική παράσταση. Μεταβλητές και αλγεβρικές παραστάσεις	6
Σ.Μ.	Στατιστική: Δεδομένα – Μέτρα θέσης – Μεταβλητότητα	9
Σ.Μ.	Πιθανότητες: Πείραμα τύχης – Δειγματικοί χώροι, Πιθανότητα ενδεχομένου	5
Α.Α.	Ισότητα – Ανισότητα. Η εξίσωση αx + β = γ	7

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ		
ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ	**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**	**ΩΡΕΣ**
Α.Α.	Αλγεβρική παράσταση. Σύντομη γραφή αριθμού – δυνάμεις	8
Α.Α.	Αλγεβρική παράσταση. Μεταβλητές, αλγεβρικές παραστάσεις και απλοί μετασχηματισμοί	5
Α.Α.	Ισότητες – Ανισότητες. Η εξίσωση αx + β = γx + δ	8
Γ.Μ.	Μέτρηση επιφάνειας. Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις επιφανειών. Μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης επιφανειών. Εμβαδά πολυγώνων	11
Α.Α.	Άρρητοι αριθμοί	8
Γ.Μ.	Προσανατολισμός στο χώρο. Θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές – διανύσματα	3
Γ.Μ.	Μετασχηματισμοί. Μεταφορά και στροφή, συμμετρίες	12
Γ.Μ.	Γεωμετρικά σχήματα. Ανάλυση των γεωμετρικών σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες. Κατασκευές και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων. Εγγεγραμμένες γωνίες – κανονικά πολύγωνα – σημεία τριγώνου	6
Α.Α.	Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Συμμεταβολή μεγεθών, αναπαραστάσεις συνάρτησης	7

Α.Α.	Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Η συνάρτηση y = αx	4
Α.Α.	Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Η συνάρτηση y = αx + β	4
Α.Α.	Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Η συνάρτηση y = α/x	2
Γ.Μ.	Μέτρηση μήκους – Μέτρηση επιφάνειας. Μήκος κύκλου και τόξου, εμβαδόν κύκλου και κυκλικού τομέα	7
Σ.Μ.	Στατιστική: Δεδομένα – Μέτρα θέσης – Μεταβλητότητα	7
Γ.Μ.	Τριγωνομετρία	8

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ		
ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ	**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**	**ΩΡΕΣ**
Α.Α.	Ισότητες – Ανισότητες. Ανίσωση α΄ βαθμού και μετασχηματισμοί	5
Α.Α.	Αλγεβρική παράσταση. Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών, μετασχηματισμοί	3
Γ.Μ.	Μετασχηματισμοί. Η διατήρηση της ισότητας των σχημάτων ως βασικό γνώρισμα της μεταφοράς, στροφής και συμμετρίας. Ομοιότητα και ομοιοθεσία. Διαδοχικοί μετασχηματισμοί	15
Α.Α.	Αλγεβρική παράσταση. Δομή της αλγεβρικής παράστασης και μετασχηματισμοί.	24
Γ.Μ.	Μέτρηση επιφάνειας, Μέτρηση χωρητικότητας – όγκου (στερεομετρία)	8
Α.Α.	Ισότητες – Ανισότητες. Πολυωνυμικές εξισώσεις	6
Σ.Μ.	Στατιστική	8
Σ.Μ.	Πιθανότητες	6
Γ.Μ.	Τριγωνομετρία	10
Α.Α.	Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Η $y=\alpha x^2$	4
Α.Α.	Ισότητες – Ανισότητες. Γραμμικά συστήματα	7

ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ			
Αριθμοί – Άλγεβρα (2 ώρες / εβδομάδα)	**ΩΡΕΣ**	**Γεωμετρία – Μέτρηση** **Στοχαστικά Μαθηματικά** (2 ώρες / εβδομάδα)	**ΩΡΕΣ**
Φυσικοί Αριθμοί. Διαιρετότητα	6	Γεωμετρικά σχήματα –Μέτρηση μήκους , μέτρηση γωνίας • Αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση των γεωμετρικών σχημάτων. • Μέτρηση μήκους και γωνίας, μέτρο τόξου. • Κατασκευές και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων (κατασκευές – σχεδιασμός που συνδέονται ευθείες, ευθύγραμμα τμήματα και γωνίες).	15
Φυσικοί αριθμοί. Θεσιακά συστήματα αρίθμησης	2	Γεωμετρικά σχήματα – Μέτρηση μήκους , μέτρηση γωνίας • Ανάλυση των βασικών γεωμετρικών σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες. • Μέτρηση – υπολογισμοί με χρήση ιδιοτήτων και σχέσεων. • Κατασκευές και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων (κατασκευές – σχεδιασμός που συνδέονται με τρίγωνα και τετράπλευρα).	17
Ακέραιοι αριθμοί	14	Στατιστική: Δεδομένα – Μέτρα θέσης – Μεταβλητότητα	**9**
Ρητοί αριθμοί	16	Πιθανότητες: Πείραμα τύχης – Δειγματικοί χώροι, Πιθανότητα ενδεχομένου	**5**
Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Αλγεβρική και γραφική αναπαράσταση κανονικοτήτων	4		
Αλγεβρική παράσταση. Μεταβλητές και αλγεβρικές παραστάσεις	6		
Ισότητα – Ανισότητα. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = \gamma$	7		

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ			
Αριθμοί – Άλγεβρα (2 ώρες / εβδομάδα)	**ΩΡΕΣ**	**Γεωμετρία – Μέτρηση** **Στοχαστικά Μαθηματικά** (2 ώρες / εβδομάδα)	**ΩΡΕΣ**
Αλγεβρική παράσταση. Σύντομη γραφή αριθμού – δυνάμεις	8	Στατιστική: Δεδομένα – Μέτρα θέσης – Μεταβλητότητα	**7**
Αλγεβρική παράσταση. Μεταβλητές, αλγεβρικές παραστάσεις και απλοί μετασχηματισμοί	5	Μέτρηση επιφάνειας. Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις επιφανειών. Μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης επιφανειών. Εμβαδά πολυγώνων	11
Ισότητες – Ανισότητες. Η εξίσωση αx + β = γx + δ	8	Προσανατολισμός στο χώρο. Θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές – διανύσματα	3
Άρρητοι αριθμοί	8	Μετασχηματισμοί. Μεταφορά και στροφή, συμμετρίες	12
Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Συμμεταβολή μεγεθών, αναπαραστάσεις συνάρτησης	7	Γεωμετρικά σχήματα. Ανάλυση των γεωμετρικών σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες. Κατασκευές και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων. Εγγεγραμμένες γωνίες – κανονικά πολύγωνα – σημεία τριγώνου	6
Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Η συνάρτηση y = αx	4	Μέτρηση μήκους – Μέτρηση επιφάνειας. Μήκος κύκλου και τόξου, εμβαδόν κύκλου και κυκλικού τομέα	7
Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Η συνάρτηση y = αx+β	4	Τριγωνομετρία	8
Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Η συνάρτηση y = α/x	2		

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ			
Αριθμοί – Άλγεβρα (2 ώρες / εβδομάδα)	**ΩΡΕΣ**	**Γεωμετρία – Μέτρηση** **Στοχαστικά Μαθηματικά (**2 ώρες / εβδομάδα)	**ΩΡΕΣ**
Ισότητες – Ανισότητες. Ανίσωση α΄ βαθμού και μετασχηματισμοί	5	Μετασχηματισμοί. Η διατήρηση της ισότητας των σχημάτων ως βασικό γνώρισμα της μεταφοράς, στροφής και συμμετρίας. Ομοιότητα και ομοιοθεσία. Διαδοχικοί μετασχηματισμοί	15
Αλγεβρική παράσταση.	3	Μέτρηση επιφάνειας, Μέτρηση	8

Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών, μετασχηματισμοί		χωρητικότητας – όγκου (στερεομετρία)	
Αλγεβρική παράσταση. Δομή της αλγεβρικής παράστασης και μετασχηματισμοί.	24	Τριγωνομετρία	10
Ισότητες – Ανισότητες. Πολυωνυμικές εξισώσεις	6	Στατιστική	**8**
Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Η $y = αx^2$	4	Πιθανότητες	**6**
Ισότητες – Ανισότητες. Γραμμικά συστήματα	7		

2. ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΒΑΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΝΕΟΥ ΠΣ ΜΕ ΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ		
	ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ – ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ του νέου ΠΣ	**Αντιστοίχιση με ενότητες του σχολικού εγχειριδίου**
Α.Α.	Φυσικοί Αριθμοί. Διαιρετότητα	**Συμβατό**: παρ. 1.4, 1.5
Α.Α.	Φυσικοί αριθμοί. Θεσιακά συστήματα αρίθμησης	**Δεν υπάρχει**
Α.Α.	Ακέραιοι αριθμοί	**Χρειάζεται μικρή παρέμβαση:** Δεν υπάρχει υλικό για ακεραίους. Το υπάρχον κεφ. 7 (για τους ρητούς) μπορεί να αξιοποιηθεί και για τους ακεραίους με παρεμβάσεις και εμπλουτισμό[5].
Α.Α.	Ρητοί αριθμοί	
Α.Α.	Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Αλγεβρική και γραφική αναπαράσταση κανονικοτήτων	**Δεν υπάρχει.** Μπορούν να αξιοποιηθούν κάποια στοιχεία σε επιμέρους θέματα (παρ. 6.1)
Α.Α.	Αλγεβρική παράσταση. Μεταβλητές και αλγεβρικές παραστάσεις	**Χρειάζεται μεγάλη παρέμβαση:** Υπάρχει ελάχιστο υλικό (μέρος της παρ. 4.1).
Α.Α.	Ισότητα – Ανισότητα. Η εξίσωση $αx + β = γ$	**Χρειάζεται μεγάλη παρέμβαση:** Από το κεφ.4 λίγα στοιχεία είναι

[5] "Εμπλουτισμός" σημαίνει κυρίως χρήση δραστηριοτήτων, ασκήσεων, προβλημάτων που δεν υπάρχουν στο βιβλίο.

		συμβατά με το περιεχόμενο. Μπορεί να αξιοποιηθούν κάποια στοιχεία από το βιβλίο της Β
Γ.Μ.	Γεωμετρικά σχήματα – Μέτρηση μήκους, μέτρηση γωνίας • Αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση των γεωμετρικών σχημάτων. • Μέτρηση μήκους και γωνίας. • Κατασκευές και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων (κατασκευές – σχεδιασμός που συνδέονται ευθείες, ευθύγραμμα τμήματα και γωνίες).	**Χρειάζεται μεγάλη παρέμβαση:** Το κεφ. 1 πρέπει να συμπτυχθεί , κάποια μέρη του να παραλειφθούν.
Γ.Μ.	Γεωμετρικά σχήματα – Μέτρηση μήκους, μέτρηση γωνίας • Ανάλυση των βασικών γεωμετρικών σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες. • Μέτρηση – υπολογισμοί με χρήση ιδιοτήτων και σχέσεων. • Κατασκευές και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων (κατασκευές – σχεδιασμός που συνδέονται με τρίγωνα και τετράπλευρα).	**Χρειάζεται μικρή παρέμβαση:** Τα κεφ. 2 και 3.
Σ.Μ.	Στατιστική: Δεδομένα – Μέτρα θέσης – Μεταβλητότητα	**Δεν υπάρχει.** Μπορεί να αξιοποιηθεί μέρος του βιβλίου της Β Γυμνασίου, αλλά δεν αρκεί
Σ.Μ.	Πιθανότητες: Πείραμα τύχης – Δειγματικοί χώροι, Πιθανότητα ενδεχομένου	**Δεν υπάρχει.** Μπορεί να αξιοποιηθεί μέρος του βιβλίου της Γ Γυμνασίου, αλλά δεν αρκεί.

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ		
	ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ – ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ του νέου ΠΣ	**Αντιστοίχιση με ενότητες του σχολικού βιβλίου**
Α.Α.	Αλγεβρική παράσταση. Σύντομη γραφή αριθμού – δυνάμεις	**Συμβατό.** Από το βιβλίο της Α (παρ. 7.8 έως 7.10)
Α.Α.	Αλγεβρική παράσταση. Μεταβλητές, αλγεβρικές παραστάσεις και απλοί μετασχηματισμοί	**Χρειάζεται μικρή παρέμβαση:** εμπλουτισμός της παρ. 1.1
Α.Α.	Ισότητες – Ανισότητες. Η εξίσωση αx + β = γx + δ	**Χρειάζεται μικρή παρέμβαση:** Το κεφ. 1.
Α.Α.	Άρρητοι αριθμοί	**Συμβατό** (κεφ. 2)
Α.Α.	Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Συμμεταβολή μεγεθών, αναπαραστάσεις συνάρτησης	**Χρειάζεται μικρή παρέμβαση:** Οι παρ. 3.1, 3.2 χρειάζονται

		εμπλουτισμό
Α.Α.	Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Η συνάρτηση y = αx	**Συμβατό:** Η παρ. 3,3 χρειάζεται εμπλουτισμό
Α.Α.	Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Η συνάρτηση y = αx + β	**Συμβατό:** Η παρ. 3.4 χρειάζεται εμπλουτισμό
Α.Α.	Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Η συνάρτηση y = α/x	**Συμβατό:** Η παρ. 3.5 χρειάζεται εμπλουτισμό
Γ.Μ.	Μέτρηση επιφάνειας. Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις επιφανειών. Μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης επιφανειών. Εμβαδά πολυγώνων	**Συμβατό:** Το κεφ. 1 χρειάζεται εμπλουτισμό
Γ.Μ.	Προσανατολισμός στο χώρο. Θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές – διανύσματα	**Συμβατό:** παρ. 2.5
Γ.Μ.	Μετασχηματισμοί. Μεταφορά και στροφή, συμμετρίες	**Δεν υπάρχει.** Μπορούν να αξιοποιηθούν κάποια στοιχεία από το βιβλίο της Α΄ (συμμετρίες)
Γ.Μ.	Γεωμετρικά σχήματα. Ανάλυση των γεωμετρικών σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες. Κατασκευές και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων. Εγγεγραμμένες γωνίες – κανονικά πολύγωνα – σημεία τριγώνου	**Συμβατό** για εγγεγραμμένες και κανονικά πολύγωνα (παρ.3.1, 3.2). **Δεν υπάρχει** για σημεία τριγώνου
Γ.Μ.	Μέτρηση μήκους – Μέτρηση επιφάνειας. Μήκος κύκλου και τόξου, εμβαδόν κύκλου και κυκλικού τομέα	**Συμβατό:** παρ. 3.3 έως 3.6
Γ.Μ.	Τριγωνομετρία	**Χρειάζεται μικρή παρέμβαση:** Οι παρ. 2.1, 2.2, (2.4 ;;;) χρειάζονται εμπλουτισμό.
Σ.Μ.	Στατιστική: Δεδομένα – Μέτρα θέσης – Μεταβλητότητα	**Χρειάζεται μεγάλη παρέμβαση:** Υπάρχουν στοιχεία του κεφ. 4 που μπορούν να αξιοποιηθούν, αλλά δεν καλύπτουν το μεγαλύτερο μέρος του περιεχομένου

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ		
	ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ – ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ του νέου ΠΣ	**Αντιστοίχιση με ενότητες του σχολικού βιβλίου**
Α.Α.	Ισότητες – Ανισότητες. Ανίσωση α΄ βαθμού και μετασχηματισμοί	**Χρειάζεται μικρή παρέμβαση:** Η παρ. 1.5 της Β και η 2.5 της Γ χρειάζονται εμπλουτισμό.
Α.Α.	Αλγεβρική παράσταση. Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών, μετασχηματισμοί	**Συμβατό**. παρ 1.1Γ
Α.Α.	Αλγεβρική παράσταση. Δομή της αλγεβρικής	**Χρειάζεται μικρή παρέμβαση:**

	παράστασης και μετασχηματισμοί.	Χρειάζεται να παραλειφθούν μέρη του κεφ. 1, και άλλα χρειάζονται εμπλουτισμό.
Α.Α.	Ισότητες – Ανισότητες. Πολυωνυμικές εξισώσεις	**Χρειάζεται μικρή παρέμβαση:** Οι παρ. 2.1, 2.2Α και 2.3 χρειάζονται εμπλουτισμό
Α.Α.	Κανονικότητες – Συναρτήσεις. Η $y=\alpha x^2$	**Συμβατό.** Η παρ. 4.1 χρειάζεται εμπλουτισμό
Α.Α.	Ισότητες – Ανισότητες. Γραμμικά συστήματα	**Συμβατό.** κεφ. 3
Γ.Μ.	Μετασχηματισμοί. Η διατήρηση της ισότητας των σχημάτων ως βασικό γνώρισμα της μεταφοράς, στροφής και συμμετρίας. Ομοιότητα και ομοιοθεσία. Διαδοχικοί μετασχηματισμοί	**Χρειάζεται μεγάλη παρέμβαση:** Η παρ. 1.4 (ομοιοθεσία) υπάρχει, αλλά με διαφορετικούς στόχους. Διαδοχικοί μετασχηματισμοί δεν υπάρχουν. Ισότητα και ομοιότητα υπάρχουν αλλά χρειάζονται εμπλουτισμό.
Γ.Μ.	Μέτρηση επιφάνειας, Μέτρηση χωρητικότητας – όγκου (στερεομετρία)	**Συμβατό**: μέρη του κεφ. 4 της Β
Γ.Μ.	Τριγωνομετρία	**Ασύμβατο**: η επέκταση ορισμού των τριγωνομ. αριθμών σε αμβλεία γωνία (παρ. 2.1, 2.2). **Συμβατό**: παρ. 2.3, 2.4
Σ.Μ.	Στατιστική	**Συμβατό**: παρ. 4.4 της Β (ομαδοποίηση, ιστόγραμμα) **Δεν υπάρχει**: μεταβλητότητα
Σ.Μ.	Πιθανότητες	**Δεν υπάρχει:** το μόνο που υπάρχει στο βιβλίο είναι η έννοια των ασυμβίβαστων ενδεχομένων και κάποιες ασκήσεις υπολογισμού πιθανοτήτων.

Η Στατιστική και οι Πιθανότητες χρειάζονται μια μεταβατική περίοδο και μια ιδιαίτερη επεξεργασία για την πιλοτική εφαρμογή

3. ΑΞΟΝΕΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Θεματική ενότητα:

Τάξη:

Διάρκεια:

Σημασία της ενότητας – βασικές μαθηματικές ιδέες

Τροχιά Μάθησης και διδασκαλίας (προηγούμενη – επόμενη γνώση)

Ανάλυση των ΠΜΑ

- Μαθηματικές έννοιες
- Διαδικασίες
- Διεργασίες

Δυσκολίες των μαθητών

Επιλογή δραστηριότητας – Τροποποίηση – Σχεδιασμός

- Αιτιολόγηση επιλογής
- Ανάλυση της σε σχέση με τα ΠΜΑ και διεργασίες
- Ανάλυσή της σε σχέση με το τι μπορεί να προσφέρει στο μαθητή σε γνωστικό - μεταγνωστικό, συναισθηματικό και πολιτισμικό επίπεδο
- Προσαρμογή της στη διαφορετικότητα των μαθητών

Τρόπος αξιολόγησης επίτευξης των ΠΜΑ

Διαχείριση της δραστηριότητας στην τάξη

- Δουλειά μαθητών
- Ρόλος εκπαιδευτικού
- Εργαλεία
- Αλληλεπίδραση
- Αξιοποίηση των στρατηγικών – ιδεών των μαθητών
- Η διαδικασία της μαθηματικοποίησης
- Ενεργοποίηση των μαθητών

Τρόπος καταγραφής – αξιολόγησης της διδασκαλίας

- Ερωτήσεις των μαθητών και εκπαιδευτικού
- Χρόνος ομιλίας του καθενός
- Μαθησιακή πορεία
- Εξέλιξη της μαθηματικής δραστηριότητας;

4. ΟΔΗΓΙΕΣ ΕΓΓΡΑΦΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗΣ ΤΟΥ FORUM

Στο Πανεπιστήμιο Πατρών έχει δημιουργηθεί η ψηφιακή πλατφόρμα επικοινωνίας (Forum) «Νέα Προγράμματα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση» http://nmcur.upatras.gr

Η ψηφιακή αυτή πλατφόρμα επικοινωνίας δημιουργήθηκε με στόχο τη συζήτηση και την ανταλλαγή εμπειριών ανάμεσα σε όλους τους εμπλεκόμενους στην πιλοτική εφαρμογή του Νέου Προγράμματος σπουδών για τα Μαθηματικά στο Δημοτικό και το Γυμνάσιο. Οι εκπαιδευτικοί και οι διευθυντές των σχολείων που συμμετέχουν στην πιλοτική εφαρμογή των Νέων Προγραμμάτων Σπουδών, οι σύμβουλοι, οι επιμορφωτές αλλά και οι συγγραφείς των Προγραμμάτων Σπουδών θα μπορούν να ανταλλάσσουν εμπειρίες, σκέψεις και προτάσεις για την καλύτερη εφαρμογή των ΠΣ αλλά και τη αξιολόγηση και βελτίωση τους. Πρόσβαση στο χώρο αυτό έχουν μόνο όσοι πιστοποιημένα εμπλέκονται στη διαδικασία της πιλοτικής εφαρμογής των νέων ΠΣ στα Μαθηματικά.

Για την εγγραφή τους τα νέα μέλη θα πρέπει να επιλέξουν Register που βρίσκεται στο πάνω δεξί μέρος της αρχικής σελίδας. Στη συνέχεια πατάτε “I agree” δηλώνοντας ότι αποδέχονται τους όρους λειτουργίας του forum. Στην επόμενη σελίδα ο νέος χρήστης δηλώνει το αναγνωριστικό (username), το email επικοινωνίας (δύο φορές) και το password (δύο φορές). Τέλος θα πρέπει να επιβεβαιώσει την εγγραφή εισάγοντας τον κωδικό που εμφανίζεται στο πλαίσιο. Προσοχή θα πρέπει να πληκτρολογήσετε μόνο τα γράμματα/ψηφία. Εάν δεν μπορείτε να διακρίνετε τα ψηφία / γράμματα μπορείτε να επιλέξετε Refresh confirmation code.

Τα νέα μέλη μετά την ολοκλήρωση της εγγραφή τους (registration) θα πρέπει να συμπληρώσουν τα στοιχεία τους σε μια φόρμα πιστοποίησης/ταυτοποίησης που θα τους σταλεί από το διαχειριστή. Ο διαχειριστής σε νέο μήνυμα θα τους ενημερώνει για την ενεργοποίηση ή όχι του λογαριασμού τους. Η διαδικασία αυτή μολονότι είναι σχετικά χρονοβόρα (ιδιαίτερα σε περιπτώσεις όπου θα υπάρχουν πολλές νέες εγγραφές) παρέχει ένα υψηλό επίπεδο ασφάλειας και προφυλάσσει το Forum από την ύπαρξη ανώνυμων μελών/επισκεπτών που πιθανόν στοχεύουν στη δημιουργία αρνητικών καταστάσεων. Κατά συνέπεια η πλατφόρμα επικοινωνίας είναι κλειστή για τους επισκέπτες και δεν παρέχεται σε μη μέλη η δυνατότητα να ενημερώνονται για το περιεχόμενο των συζητήσεων.

Μετά την ενεργοποίηση του λογαριασμού του κάθε νέο μέλος μπορεί να κάνει login στο forum χρησιμοποιώντας το username και password που είχε δηλώσει στη φάση της εγγραφής. Το forum είναι χωρισμένο στις παρακάτω κατηγορίες (χώρους συζήτησης).

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών - Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση

Γυμνάσιο

Δημοτικό

Νηπιαγωγείο

Οργάνωση και λειτουργία του forum

Όροι Χρήσης / Κανόνες λειτουργίας

Η πρώτη κατηγορία είναι χώρος συζήτησης για γενικότερα θέματα που αφορούν τα νέα ΠΣ και την πιλοτική εφαρμογή τους.

Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει 4 υπο κατηγορίες θεμάτων μία για κάθε τάξη του Γυμνασίου και μία γενικότερα θέματα που αφορούν τη πιλοτική εφαρμογή στο Γυμνάσιο

Αντίστοιχα η θεματική κατηγορία του Δημοτικού περιλαμβάνει μια υποκατηγορία θεμάτων για κάθε τάξη του Δημοτικού και μια για γενικότερα θέματα που αφορούν όμως το Δημοτικό.

Η επόμενη κατηγορία περιορίζεται σε θέματα που αφορούν τη πιλοτική εφαρμογή στο νηπιαγωγείο.

Η επόμενη κατηγορία περιλαμβάνει συζητήσεις σχετικά με τη λειτουργία και την οργάνωση του φόρουμ.

Η τελευταία κατηγορία περιλαμβάνει αναρτήσεις του διαχειριστή σχετικά με τους όρους χρήσης και τους κανόνες λειτουργίας του forum. Η εγγραφή και η συμμετοχή στο Forum του nmcur.upatras.gr σημαίνει την πλήρη αποδοχή των Όρων Χρήσης και Κανόνων Λειτουργίας του. Οι χρήστες καλούνται να ενημερωθούν σχετικά.

Σε κάθε κατηγορία (υπο κατηγορία) θεμάτων δίνεται η δυνατότητα στο χρήση να αναρτήσει ένα νέο θέμα συζήτησης ή να απαντήσει σε κάποιο ήδη αναρτημένο. Γ ια να αναρτήσει ο χρήστης ένα καινούργιο θέμα συζήτησης αρκεί να επιλέξει την σχετική κατηγορία θεμάτων και να πατήσει την επιλογή «NEWTOPIC*». Στη συνέχεια εμφανίζεται ένας επεξεργαστής κειμένου όπου μπορεί να γράψει το θέμα και το περιεχόμενο της ανακοίνωσης και να επισυνάψει κάποιο αρχείο. (Γενικά δεν υπάρχουν περιορισμοί στο τύπο του αρχείου που επισυνάπτεται αλλά στο μέγεθος του (δεν θα πρέπει να υπερβαίνει τα 250 kbytes).

Στην κατηγορία «οργάνωση και λειτουργία του forum» θα βρείτε επιπλέον οδηγίες για την ανάρτηση αρχείων με μεγαλύτερο μέγεθος.

5. ΠΡΩΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ Π.Σ.

Επώνυμο:
Όνομα:
Σχολείο:
Τάξη:
Χρονολογία λήψης πτυχίου Μαθηματικών:
Άλλο πτυχίο:
Μεταπτυχιακές σπουδές (αναφέρατε συγκεκριμένα):

Χρονολογία διορισμού στη μέση εκπαίδευση:
Χρόνια συνολικής διδακτικής εμπειρίας (προ και μετά τον διορισμό):

1. Έχετε μελετήσει το νέο πρόγραμμα σπουδών (Π.Σ.) για τα Μαθηματικά;

ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐ (βάλτε Χ στο αντίστοιχο τετράγωνο)

τον οδηγό του εκπαιδευτικού; ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

2. Αν ΔΕΝ έχετε μελετήσει κάποιο από τα παραπάνω κείμενα περιγράψτε τους λόγους (για το κάθε κείμενο)

3. Σχολιάστε θετικά και αρνητικά σημεία που εντοπίζετε στα δύο κείμενα και με ποιο τρόπο βλέπετε να τα χρησιμοποιείτε στην οργάνωση της διδασκαλίας σας.

4. Τι ουσιαστικές αλλαγές αναγνωρίζετε ότι θέτει το νέο Π.Σ στο μαθηματικό περιεχόμενο και τη διδασκαλία του; Πώς βλέπετε αυτές οι αλλαγές να λειτουργήσουν στην πράξη;

5. Τι είδους δυσκολίες βλέπετε ότι σας δημιουργούν οι παραπάνω αλλαγές και πως σκέφτεστε να τις αντιμετωπίσετε; (π.χ την ένταξη της τεχνολογίας, την έλλειψη βιβλίου πλήρως συμβατού με το νέο Π. Σ.)

6.Αν έχετε ξεκινήσει να εφαρμόζετε το νέο ΠΣ τότε:
α) Περιγράψτε σύντομα πως το έχετε αξιοποιήσει.

β) Αναφέρατε τις δυσκολίες που αντιμετωπίσατε.

γ) Αναφέρατε παραλείψεις και λάθη που εντοπίσατε στο ΠΣ και στον οδηγό του εκπαιδευτικού.

δ) Ποιες αλλαγές και βελτιώσεις θα προτείνατε.

6. Τι βοήθεια θα θέλατε κατά τη διάρκεια της πιλοτικής εφαρμογής του νέου Π.Σ. ;