ΜΕΛΕΤΗ ΑΡΧΑΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΕΙΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΕΝΤΑΞΗ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Κώστας Μαλλιάκας Καθηγητής Δ.Ε., 1ο ΓΕΛ Ρόδου, kmath@otenet.gr
Τάσος Σωτηράκης, Καθηγητής Δ.Ε., 2ο ΓΕΛ Ρόδου, tasotirakis@gmail.com

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 2
Διδακτικές προτάσεις διδασκαλίας Μαθηματικών της Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή προσπαθήσαμε να επιλέξουμε δραστηριότητες μέσα από κείμενα Αρχαίων Ελλήνων Γεωμετρών που αφορούν κυρίως την έννοια του εμβαδού και να αποτυπώσουμε τα σχετικά αξιώματα και θεωρήματα, να διακρίνουμε ομοιότητες και διαφορές στην φιλοσοφία των συγγραφέων τους και να αναδείξουμε την χρησιμότητα της Ιστορίας των Μαθηματικών ειδικότερα στην διδασκαλία του κεφαλαίου των εμβαδών στο μάθημα της Γεωμετρίας της Β΄ Λυκείου.

ABSTRACT

In this project we tried to select activities from texts of Ancient Greek Geometers which especially concern the concept of area and to depict the relative axioms and theorems, to distinguish the similarities and differences in the philosophy of the writers and to show the usefulness of the History of Maths, especially in teaching the chapter of Area in the lesson of Geometry in the 2nd Grade of Lyceum.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια του εμβαδού ήταν πολύ σημαντική από τα αρχαία χρόνια. Πολλοί Έλληνες Μαθηματικοί όπως ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης, ο Ήρωνας και άλλοι που κατάφεραν με διαφορετικές προσεγγίσεις αλλά και κοινά σημεία να αναπτύξουν σημαντικές θεωρίες, τεχνικές και μεθόδους με βάση τα εμβαδά. Στόχος της εργασίας μας είναι να γίνει η Ευκλείδεια Γεωμετρία πιο ελκυστική και ευχάριστη στους μαθητές όλων των τάξεων και ειδικότερα στους μαθητές της Β΄ Λυκείου που πιστεύουμε ότι είναι η τάξη στην οποία έχει υποβαθμιστεί περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη τάξη για προφανείς λόγους το μάθημα της Γεωμετρίας. Οι βασικοί άξονες που προτείνουμε να κινηθεί ο «Δάσκαλος των Μαθηματικών» για να πετύχει αυτό τον στόχο περνούν μέσα από ιστορικά γεωμετρικά προβλήματα που θα δείξουν τον τρόπο σκέψης και την φιλοσοφία των Αρχαίων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι θεμελιώδεις έννοιες της Γεωμετρίας είναι η ισότητα, η ομοιότητα, το εμβαδόν και ο όγκος. Η Γεωμετρία είναι *η μελέτη των σχημάτων μέσω των ιεραρχημένων ιδιοτήτων τους. ... Τα σχήματα μπορεί να είναι ίσα. Όταν δεν είναι ίσα μπορεί να μοιάζουν οπότε είναι όμοια και όταν δεν μοιάζουν, μπορεί να μετρηθούν και να βγουν ίσα, δηλαδή να είναι ισεμβαδικά. ... Για να γίνει αυτή η μελέτη πρέπει να μπουν τα αξιώματα, πρέπει αυτές οι έννοιες να θεωρητικοποιηθούν και μετά να βρούμε και εργαλεία ώστε να υπόκεινται σε λογισμό. Δηλαδή σκοπεύουμε στο εμβαδόν; Πρέπει να βρεθούν εργαλεία τα οποία να υπολογίζουν το εμβαδόν. ... Ο υπολογισμός δεν είναι κατ' ανάγκη αριθμητικός. Μπορεί να είναι αλγοριθμικός. Δηλαδή το εμβαδόν είναι θεωρητική έννοια. Είναι το διαμεριστικό εμβαδόν. Το εμβαδόν του τριγώνου δεν είναι κατ' ανάγκη ο τύπος ένα δεύτερο, βάση επί ύψος. Είναι μια ολόκληρη διαδικασία, που μπορεί να συγκρίνει τα σχήματα τεμαχίζοντας τα και συγκρίνοντας τα συστατικά τους (Λάππας Δ., 2009).*

Η επαφή με πρωτότυπες πηγές, η ενασχόληση με εργασίες που έχουν προσανατολισμό προς την ιστορία και η προσπάθεια ανακατασκευής μιας μεθόδου ή λύσης ενός προβλήματος βάσει πρωτότυπων ή και δευτερογενών πηγών, προσομοιώνει την διαδικασία δημιουργίας στον χώρο των Μαθηματικών με ευεργετικά αποτελέσματα τόσο για τον διδάσκοντα, όσο και για τον διδασκόμενο. ... Μέσω της Ιστορίας των Μαθηματικών ο δάσκαλος των Μαθηματικών μπορεί να έχει μια ευρεία δεξαμενή προβλημάτων, ερωτημάτων, καταστάσεων κλπ για τον εμπλουτισμό της διδασκαλίας του και την κινητοποίηση των μαθητών του (Τζανάκης Κ., 2009)

Ο διδάσκων έχει την δυνατότητα ανάλογα με την τάξη και το επίπεδο των μαθητών να επιλέγει τις δραστηριότητες που θα φέρουν το βέλτιστο αποτέλεσμα.

ΤΟ ΕΜΒΑΔΟ ΜΕΣΑ ΣΕ ΑΡΧΑΙΑ ΚΕΙΜΕΝΑ

Στα «Στοιχεία» του ο Ευκλείδης χρησιμοποιούσε την λέξη «περιεχόμενο» αντί για «εμβαδό» σχήματος και μάλιστα την θεωρούσε πολύ γνωστή και προφανή έννοια οπότε δεν χρειάστηκε να την ορίσει, όπως επίσης δεν όρισε την ισότητα εμβαδών και τις ιδιότητες της αν και τις χρησιμοποιεί (ΚΕ.ΕΚ.ΕΚ., 2001). Επίσης δεν ενδιαφερόταν για τον αριθμητικό υπολογισμό των εμβαδών αλλά για την αναγωγή των εμβαδών σε εμβαδά γνωστών σχημάτων όπως για παράδειγμα σε εμβαδά τετραγώνων (τετραγωνισμός). Η αναγωγή αυτή γινόταν με σύγκριση των εμβαδών ενώ για καμπυλόγραμμα σχήματα γινόταν με μια σύνθεση σύγκρισης και υπολογισμού που χρησιμοποιούσε και ο Αρχιμήδης. Τα εμβαδά δύο ευθυγράμμων σχημάτων θεωρούνταν ίσα αν το καθένα από αυτά μπορούσε να διαιρεθεί σε υπο-σχήματα τα οποία ήταν δυνατό να αντιστοιχηθούν έτσι ώστε τα αντίστοιχα μεταξύ τους υπο-σχήματα να είναι ίσα (ισεμβαδικά) (Στράντζαλος Χ., 1987).

Οι σχετικές με τα εμβαδά «κοινές έννοιες - αξιώματα» που χρησιμοποιούσε ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία» και χρησιμοποιούνται αναλόγως σήμερα στην εκπαίδευση είναι:

1. Δύο ίσα σχήματα είναι ισεμβαδικά.
2. Το άθροισμα και η διαφορά ισεμβαδικών σχημάτων ορίζει ισεμβαδικά σχήματα.
3. Τα μισά ισεμβαδικών σχημάτων είναι ισεμβαδικά σχήματα.
4. Το εμβαδόν σχήματος είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν μέρους του σχήματος.
5. Δύο ισεμβαδικά τετράγωνα έχουν ίσες πλευρές.
6. Το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς 1 είναι 1 τετραγωνική μονάδα.

Εδώ μπορούμε και πρέπει να τονίσουμε ότι δύο ισεμβαδικά σχήματα δεν είναι απαραίτητα ίσα και μάλιστα θα ακολουθήσουμε κυρίως την τεχνική μετατροπής ενός σχήματος σε άλλο ισοδύναμο γνωστού τύπου για την απόδειξη των τύπων των εμβαδών βασικών πολυγώνων αξιοποιώντας και τις παραπάνω έννοιες.

Πιστεύουμε ότι η παρουσίαση μερικών προτάσεων των «Στοιχείων» θα κινήσει το ενδιαφέρον των μαθητών και θα διευκολύνει την κατανόηση τεχνικών για αποδείξεις θεωρημάτων ή την επίλυση ανάλογων ασκήσεων. Ειδικά η λογική της αλληλουχίας των προτάσεων 34 έως 41 είναι εντυπωσιακή και χρήσιμη σε μια απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος που υπάρχει και σε ιστορικό σημείωμα στο σχολικό βιβλίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ειδικότερα οι προτάσεις αυτές των «Στοιχείων» αναφέρουν.

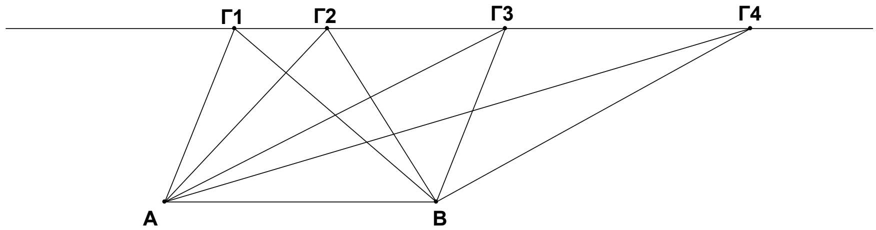
Π.34: Τα εμβαδά τριγώνων στα οποία διαιρείται ένα παραλληλόγραμμο από μια διαγώνιο του είναι ίσα.

Π.35-36: Δύο παραλληλόγραμμα που έχουν ίδια βάση (ίσες βάσεις στην ίδια ευθεία) και τις παράλληλες σε αυτή πλευρές στην ίδια ευθεία , έχουν ίσα εμβαδά.

Π.37-38: Δύο τρίγωνα που έχουν ίδια βάση (ίσες βάσεις στην ίδια ευθεία) και κορυφές σε ευθεία παράλληλη στην ευθεία της βάσης, έχουν ίσα εμβαδά.

Π. 39-40: Αντίστροφες των 37-38.

Π41: Αν ένα παραλληλόγραμμο και ένα τρίγωνο έχουν ίδια βάση και βρίσκονται μεταξύ παραλλήλων τότε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου.



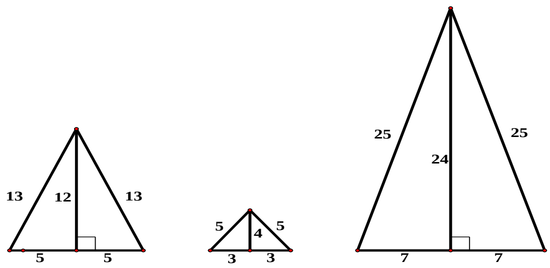
Αυτές οι προτάσεις χαρακτηρίζονται από τον Πρόκλο, σχολιαστή των Στοιχείων του Ευκλείδη, ως θεωρήματα «τόπου» και σαν «παράδοξα» θεωρήματα αφού για παράδειγμα μπορεί ένα τρίγωνο να έχει περίμετρο που να «τείνει στο άπειρο» και το εμβαδόν του να παραμένει «αναλλοίωτο».
Να τονίσουμε εδώ και την προστιθέμενη αξία των εννοιών «όριο», «άπειρο», «αναλλοίωτη». Επίσης η απόδειξη της προτάσεως 35 που χρησιμοποίησαν ο Ευκλείδης και ο Αρχιμήδης περιέχει βασικές έννοιες της θεωρίας των ισοδιαχωρίσιμων σχημάτων (Θεώρημα Bolyai – Gerwin: Αν δύο επίπεδα σχήματα είναι ισοδιαχωρίσιμα τότε είναι ισεμβαδικά και αντιστρόφως (ΚΕ.ΕΚ.ΕΚ.,2001).

Οι προτάσεις από την 43 μέχρι και την 45 είναι εξαιρετικά χρήσιμες στη θεωρία των εμβαδών. Αυτές οι προτάσεις έδωσαν την δυνατότητα στους αρχαίους Έλληνες Μαθηματικούς και κυρίως στους Πυθαγορείους να δημιουργήσουν αυτό που ονομάσθηκε «Γεωμετρική Άλγεβρα».

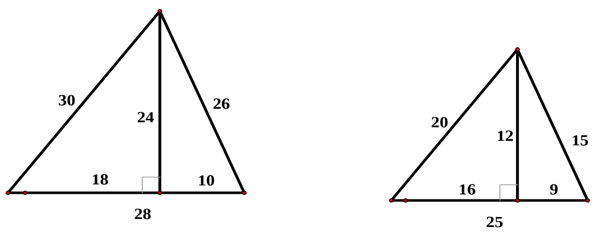
Ειδικότερα η πρόταση 44 που αναφέρεται στην κατασκευή ενός παραλληλογράμμου με δοθείσα πλευρά, μια γωνία δοθείσα και εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν δοθέντος τριγώνου, χαρακτηρίστηκε από πολλούς μελετητές (πχ. Heath) ως η εντυπωσιακότερη της Γεωμετρίας. Ο Πρόκλος αναφέρει ότι ο Εύδημος και οι μαθητές του (οι περί τον Εύδημον) απέδιδαν την πρόταση αυτή στην «Πυθαγόρεια Μούσα» και αναφέρει ότι η ισότητα εμβαδών (παραβολή) και η ανισότητα εμβαδών (υπερβολή ή έλλειψη), στάθηκαν η αφορμή για την ονομασία των αντίστοιχων κωνικών τομών. (ΚΕ.ΕΚ.ΕΚ.,2001).

Στα έργα του Ήρωνα από την Αλεξάνδρεια «Ονόματα γεωμετρικών όρων – Γεωμετρικά – Μετρικά – Διόπτρα» (Κηπουρός Χ., 1995) ο Ήρωνας αναφέρει ότι τα αντικείμενα της μετρήσεως επιφανειών είναι τα τετράγωνα, τρίγωνα, ρόμβοι, τραπέζια και κύκλοι. Ισχύουν για αυτά 18 θεωρήματα από τα οποία 2 αναφέρονται σε τετράπλευρα (το ισόπλευρο ορθογώνιο και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο), 6 σε τρίγωνα (ισόπλευρο, ισοσκελές, σκαληνό, ορθογώνιο, οξυγώνιο, αμβλυγώνιο), 2 σε ρόμβους (ρόμβος και ρομβοειδές), 4 σε τραπέζια (ορθογώνιο τραπέζιο, ισοσκελές, οξυγώνιο, αμβλυγώνιο) και 4 σε κύκλους (κύκλος, αψίς, ημικύκλιο και τμήματα μικρότερα ή μεγαλύτερα του ημικυκλίου). Στα έργα αυτά παρουσιάζει λύσεις διαφόρων υπολογιστικών προβλημάτων μέτρησης εμβαδών των παραπάνω σχημάτων επιλεγμένων όμως με κατάλληλες διαστάσεις για πρακτικούς αλλά και παιδαγωγικούς λόγους που μπορούμε και εμείς να αξιοποιήσουμε στην διδασκαλία μας. Στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε την διαφορά ανάμεσα στον Ευκλείδη που δεν ενδιαφερόταν τόσο για αριθμητικούς υπολογισμούς και στον Ήρωνα που κυρίως υπολόγιζε εμβαδά. Αν μελετήσουμε προσεκτικά την λογική της επιλογής των διαστάσεων των σχημάτων αυτών μπορούμε να προσδώσουμε στην διδασκαλία μας ανακαλυπτικό αλλά και διαθεματικό χαρακτήρα.

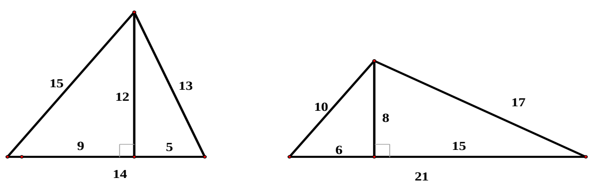
Ο Ήρωνας επιλέγει τα σχήματα συνήθως με τέτοιο τρόπο ώστε οι διαστάσεις αλλά και άλλα στοιχεία τους και το εμβαδό τους να είναι ακέραιοι, εκμεταλλευόμενος πολύ τις πυθαγόρειες τριάδες και συνδυασμούς τριγώνων που ικανοποιούν το Πυθαγόρειο Θεώρημα όπως τα παρακάτω σχήματα.



Ο Ήρωνας αρχικά υπολογίζει το ύψος του τριγώνου χρησιμοποιώντας αυτό που ονομάζουμε εμείς σήμερα γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος για να υπολογίσει την προβολή μιας πλευράς και κατόπιν το πυθαγόρειο θεώρημα για να υπολογίσει το ύψος και μετά το εμβαδόν.

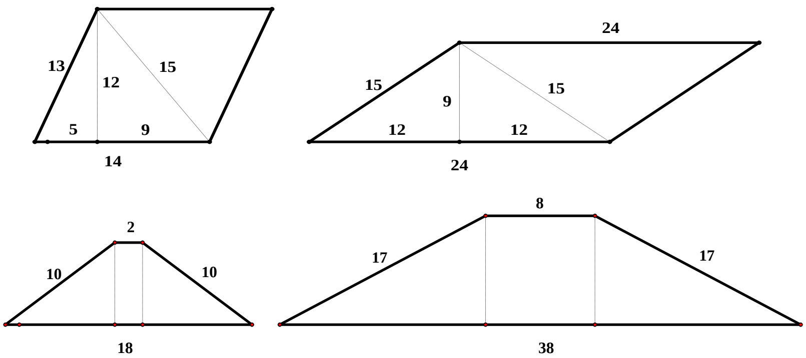


Σε επόμενα όμως προβλήματα του, δείχνει τον υπολογισμό του εμβαδού χωρίς να υπολογίζει το ύψος, δηλαδή το γνωστό τύπο του

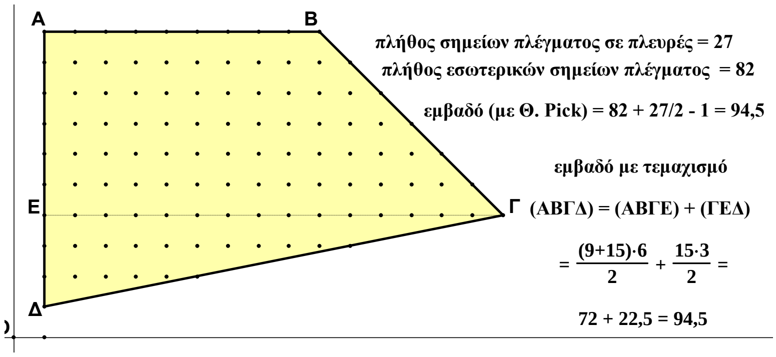


Ήρωνα που υπολογίζει το εμβαδό μόνο από τις πλευρές. Εδώ υπάρχει η δυνατότητα να εκμεταλλευτούμε και την ομοιότητα και να παρακινήσουμε τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τα αποτελέσματα εμβαδών ενός σχήματος ώστε να υπολογίσουν κάποιου όμοιου με αυτό με λόγο εμβαδών ομοίων τριγώνων.

Παρατηρούμε ότι τρίγωνα με ίδιες διαστάσεις χρησιμοποιεί και στα παραλληλόγραμμα και στα τραπέζια που επιλέγει. Επίσης χρησιμοποιείται και η μέθοδος τεμαχισμού για τον υπολογισμό του εμβαδού από τα υπο-σχήματα στα οποία διαιρείται αυτό.

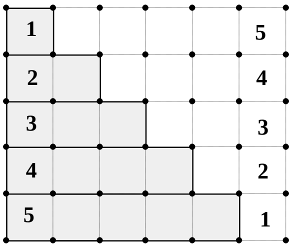


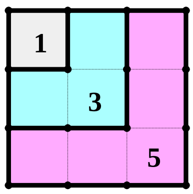
Η επιλογή αυτών των σχημάτων αν τοποθετηθούν σε πλέγμα ευνοεί επίσης την πληροφόρηση των μαθητών για το θεώρημα του Pick που λέει ότι το εμβαδόν ενός πολυγώνου που οι κορυφές του είναι σημεία ενός πλέγματος εξαρτάται από το πλήθος των σημείων του πλέγματος που υπάρχουν αφενός στο εσωτερικό του πολυγώνου και αφετέρου πάνω στην περίμετρο του πολυγώνου. Συγκεκριμένα αν Μ το πλήθος των σημείων στο εσωτερικό του πολυγώνου και Ν το πλήθος των σημείων στην περίμετρο του, τότε το εμβαδόν του πολυγώνου δίνεται από την σχέση Ε = Μ + Ν/2 -1.



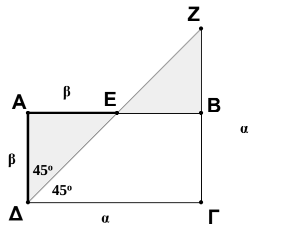
Επισημαίνουμε εδώ και την πιθανή διασύνδεση τις διδασκαλίας με έννοιες της θεωρίας αριθμών, με βάση την γεωμετρική απόδειξη των σχέσεων $1+2+3+\ldots+\nu = \nu(\nu+1)/2$ και $1+3+5+\ldots+(2\nu-1)^2 = \nu^2$ που φαίνονται στα παρακάτω σχήματα (Κολέζα Ε., Σούρλας Κ., 1990) ή την γεωμετρική απόδειξη της ανισότητας Cauchy για ν = 2 (Αναγνώστου Κ., 1990).

$$\mathbf{Ε_{γραμ.}} = \frac{\mathbf{Ε_{ορθογ}}}{2} = \frac{5\cdot(5+1)}{2}$$





1 + 3 + 5 = 3²



$(ΖΓΔ) + (ΑΕΔ) > (ΑΒΓΔ)$ οπότε $\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} > \alpha\cdot\beta$

και αν θέσουμε $\alpha^2 = x$ και $\beta^2 = y$ τότε $\frac{x+y}{2} > \sqrt{x\cdot y}$

Μετά την διδασκαλία των τύπων υπολογισμού εμβαδών βασικών σχημάτων στην Β΄ Λυκείου ακολουθούν οι διάφοροι τύποι υπολογισμού εμβαδού τριγώνου που προφανώς είναι από τα σημαντικότερα γεωμετρικά σχήματα με τα οποία ασχολούμαστε. Το μάθημα εδώ γίνεται αρκετά αλγεβρικό αφού χωρίς να υπάρχει σχήμα μπορούμε να βρούμε διάφορους συμμετρικού και κομψούς τύπους που συνδέουν στοιχεία ενός τριγώνου και προκύπτουν με κατάλληλο συνδυασμό των τύπων αυτών. Υπάρχουν και στα σχολικά βιβλία ανάλογες ασκήσεις αλλά πιστεύουμε ότι χάνεται λίγο η γοητεία της γεωμετρίας σε αυτές και πρέπει να χρησιμοποιούνται με μέτρο. Ενδεικτικά αναφέρουμε τους παρακάτω τύπους – ασκήσεις.

$$1)\ \ \mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{4}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \qquad 2)\ \ \alpha\beta\gamma = 4\tau\rho R$$

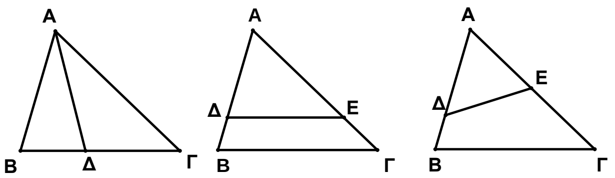
$$3)\ \ \delta_\alpha = \frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}} \qquad 4)\ \ \frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}=\frac{1}{\rho}$$

Το επόμενο μέρος είναι τα θεωρήματα σχετικά με λόγους εμβαδών για τρίγωνα κυρίως, που έχουν είτε μια πλευρά ίση ή ένα ίσο ύψος ή είναι όμοια ή έχουν μια γωνία τους ίση ή παραπληρωματική. Είναι μια πολύ ενδιαφέρουσα ενότητα αν σκεφτούμε κιόλας ότι ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία» κυρίως ενδιαφέρεται για σύγκριση εμβαδών που γίνεται με λόγους και όχι για υπολογισμό εμβαδών. Επίσης μια σειρά γεωμετρικών προβλημάτων και στον Ευκλείδη και στον Ήρωνα και σε άλλους αναφέρεται στον χωρισμό σχήματος σε μέρη που ικανοποιούν μια αναλογία προφανώς γιατί και για πρακτικούς λόγους πολλοί λαοί χρειάζονταν να διαμερίσουν εκτάσεις με δίκαιο και όχι τυχαίο τρόπο.

Εδώ επιβάλλεται να τονίσουμε την χρησιμότητα της πρότασης ότι η διάμεσος τριγώνου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα που είναι αναγκαία για την επίλυση αρκετών ασκήσεων. Μια ενδιαφέρουσα σχετική δραστηριότητα είναι και η διερεύνηση διαμέρισης ενός τριγώνου σε 2 ή 3 ή 4 ή 6 ισοδύναμα χωρία με διάφορους τρόπους. Προβλήματα χωρισμού ενός τριγώνου σε μέρη με συγκεκριμένο λόγο και με διάφορους τρόπους συναντάμε πάλι στον Ήρωνα (Κηπουρός Χ., 2000).

Πρόβλημα: Να διαιρεθεί τριγωνικό χωρίο σε δύο τριγωνικά χωρία τα οποία έχουν κοινή κορυφή και τα εμβαδά τους έχουν δοθέντα λόγο.

Ο Ήρωνας λύνει επίσης το πρόβλημα διαίρεσης του ίδιου τριγώνου σε δύο χωρία με δοθέντα λόγο με ευθεία παράλληλη της βάσης ή με ευθεία που τέμνει δύο πλευρές.

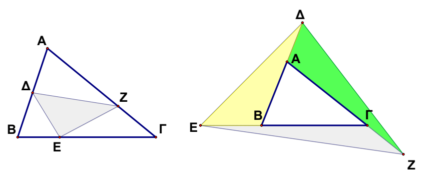


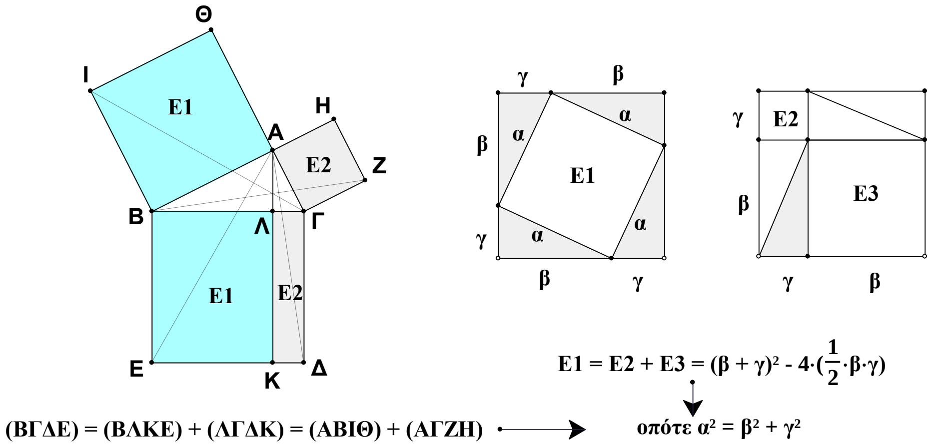
Στο πρώτο πρόβλημα ο Ήρωνας επιλέγει πάλι τρίγωνο με πλευρές 13, 14, 15 (το οποίο έχει και ακέραιο εμβαδό 84) και λόγο 5/3. Η τεχνική του, βασίζεται και σε μια ιδιότητα αναλογιών (που καλεί σύνθεση) η οποία μετατρέπει το λόγο σε σχέση με το αρχικό τρίγωνο δηλαδή κάνει την μετατροπή:

$$\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{A\Delta\Gamma})}=\frac{5}{3}\Leftrightarrow\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{A\Delta\Gamma})+(\mathrm{AB\Delta})}=\frac{5}{3+5}\Leftrightarrow\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{5}{8}\Leftrightarrow(\mathrm{AB\Delta})=\frac{5}{8}\cdot(\mathrm{AB\Gamma})$$

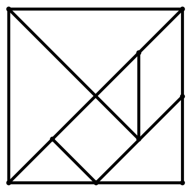
Επίσης χρησιμοποιεί για την εύρεση των σημείων Δ, Ε την τεχνική διαίρεσης τμήματος σε δοθέντα λόγο. Εδώ πρέπει να τονίσουμε την αξία και την λογική της παραπάνω ιδιότητας αναλογιών σε αυτά τα προβλήματα που χρησιμοποιεί συχνά ο Ήρωνας και ο Ευκλείδης η οποία δικαιολογεί και την ύπαρξη τους σαν κεφάλαιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αν και φαίνεται σαν Άλγεβρα.

Δραστηριότητες που βοηθούν στην κατανόηση της θεωρίας των λόγων εμβαδών είναι και άλλη απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος ή του θεωρήματος

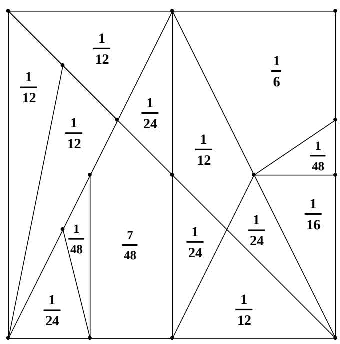




εσωτερικής διχοτόμου, το 2ο Θεώρημα Πτολεμαίου, τα Θεωρήματα Μενελάου και Ceva, ο Γνώμονας του Αναξίμανδρου, η εγγραφή τριγώνου ή τετραγώνου σε τρίγωνο με σημεία που διαιρούν τις πλευρές εσωτερικά εξωτερικά σε δοσμένο λόγο και ο υπολογισμός του εμβαδού του και άλλες ανάλογες με αυτές.



Ενδιαφέρουσες δραστηριότητες που μπορούν να πραγματοποιηθούν και με παιγνιώδη μορφή είναι επίσης το «τάνγκραμ» και το «στομάχιον». Το «Τάνγκραμ» είναι ένα Κινέζικο παιγνίδι που παίζεται ως εξής: Παίρνουμε ένα τετράγωνο και το χωρίζουμε όπως στο σχήμα Στη συνέχεια συνδυάζοντας τις 7 επιφάνειες προσπαθούμε να σχηματίσουμε διάφορες μορφές ανθρώπων, ζώων ή πραγμάτων.



Το παιχνίδι «στομάχιον» ήταν επινόηση του Αρχιμήδη και θεωρείται ο πρόγονος του «Τάνγκραμ». Αποτελείται από 14 διαφορετικού σχήματος κομμάτια και ο στόχος ήταν η άσκηση της παρατηρητικότητας, της μνήμης και της αντίληψης των μαθητών του Αρχιμήδη, ως εξής: αφού πρώτα ο ίδιος έφτιαχνε κάποια σχέδια με όλα τα κομμάτια του «στομαχίου», έβαζε τους μαθητές του να τα ανασυνθέσουν βλέποντας όμως μόνο το περίγραμμά τους. Ένας δεύτερος τρόπος παιξίματος είναι και το γνωστό πρόβλημα (γεωμετρίας και μαθηματικών) του Αρχιμήδη, δηλαδή πόσες φορές μπορεί κάποιος να σχηματίσει το συγκεκριμένο τετράγωνο τοποθετώντας τα κομμάτια του με διαφορετική διάταξη. Ενδιαφέρουσα δραστηριότητα είναι και η περιγραφή και η κατασκευή του «στομαχίου» καθώς και ο υπολογισμός του μέρους του τετραγώνου που αποτελεί το καθένα από τα κομμάτια του (Κατσιγιάννης Κ., 2010).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Πιστεύουμε ότι η Ιστορία των Μαθηματικών και η κατάλληλη επιλογή δραστηριοτήτων μέσα από αρχαία κείμενα μπορεί να βοηθήσει τον διδάσκοντα στην δημιουργία ευχάριστου κλίματος στην τάξη και να ωθήσει τους μαθητές σε μια πιο φιλοσοφημένη αντιμετώπιση του μαθήματος της Γεωμετρίας, όπως της αξίζει, βοηθώντας τους παράλληλα και στον ερευνητικό τομέα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αναγνώστου Κ., (1990). Ανισότητες και Γεωμετρία. Ευκλείδης Γ, Τόμος 7, Τεύχος 27, Ε.Μ.Ε., Αθήνα.

Κατσιγιάννης Κ., (2010). *Από το «στομάχιο» του Αρχιμήδη μέχρι το Θεώρημα του Pick.Μια ιστορική διαδρομή και διδακτικές προεκτάσεις*. Διπλωματική εργασία, Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών, «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών», Επιβλέπων: Λάππας Δ., Αθήνα.

Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης (ΚΕ.ΕΚ.ΕΚ.), (2001). Ευκλείδη «Στοιχεία». Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή, επεξηγήσεις και σχολιασμό. Τόμος 1, Βιβλία Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, IV, V, VI, Αθήνα.

Κηπουρός Χ., (1995). Ήρωνος Αλεξανδρέως, Ονόματα Γεωμετρικών όρων – Γεωμετρικά, Ε.Μ.Ε., Αθήνα.

Κηπουρός Χ., (2000). Ήρωνος Αλεξανδρέως, Μετρικά - Διόπτρα, Ε.Μ.Ε., Αθήνα.

Κολέζα Ε., Σούρλας Κ., (1990). Ασκήσεις και προβλήματα. Μια λειτουργική ταξινόμηση. Ευκλείδης Γ, Τόμος 7, Τεύχος 27, Ε.Μ.Ε., Αθήνα.

Λάππας Δ., (2009). Θεμελιώδεις Γεωμετρικές Έννοιες (Μια γενετική προσέγγιση). Επιστημονική Ένωση για την Διδακτική των Μαθηματικών, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Τζανάκης Κ., (2009). Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ Ιστορίας των Μαθηματικών μια Μαθηματικής Εκπαίδευσης: Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει της διεθνούς εμπειρίας. Επιστημονική Ένωση για την Διδακτική των Μαθηματικών, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Στράντζαλος Χ., (1987). Η εξέλιξη των Ευκλείδειων και των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών (Μέρος πρώτο). Εκδόσεις Καρδαμίτσα, Αθήνα.