ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΣΤΗΝ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΚΑΙ ΣΤΗΝ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τάσος Σωτηράκης, Καθηγητής Δ.Ε., 2ο ΓΕΛ Ρόδου, tasotirakis@gmail.com
Κώστας Μαλλιάκας Καθηγητής Δ.Ε., 1ο ΓΕΛ Ρόδου, kmath@otenet.gr

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 2
Διδακτικές προτάσεις διδασκαλίας Μαθηματικών της Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η έννοια του εμβαδού κατέχει σημαντική θέση στο μάθημα των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Γεωμετρίας. Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε δυο διδασκαλίες που πραγματοποιήσαμε στη Β΄ Γυμνασίου και στη Β΄ Λυκείου. Εστιάσαμε την διδασκαλία μας κυρίως στην προσθετική ιδιότητα του εμβαδού. Στο Γυμνάσιο σε αρχικό επίπεδο Van Hiele (αναγνώριση - ανάλυση) ενώ σο Λύκειο σε ανώτερο επίπεδο Van Hiele με στόχο να φτάσουμε στο 4ο επίπεδο που αφορά την κατανόηση αξιωμάτων, ορισμών, θεωρημάτων και αντίληψη της παραγωγικής μεθόδου.

ABSTRACT

The concept of “area” constitutes an important part of the subject of Maths and in particular Geometry. In this project we present two teaching sessions we carried out in the 2nd Grade of High School and the 2nd Grade of Lyceum. We mainly focused on the adding quality of area; In the High School at an elementary level Van Hiele (recognition – analysis) whereas in Lyceum at a higher level Van Hiele, aiming at reaching the 4th level which concerns the understanding of axioms, definitions, theorems and conception of the productive method.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μία από τις πιο δημοφιλείς έννοιες που υπάρχουν στα μαθηματικά είναι και η έννοια του εμβαδού ενός σχήματος. Σύμφωνα με έρευνα των Μαλλιάκα - Σωτηράκη (2011) έχει «δυναμική» 12, δηλαδή εμφανίζεται σε 12 από τα 15 σχολικά βιβλία μαθηματικών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Δεν εμφανίζεται σαν λέξη, μόνο στις τρεις πρώτες τάξεις του δημοτικού, αλλά πάλι και εκεί η έννοια του εμβαδού εμφανίζεται έμμεσα (τετραγωνισμένο χαρτί στην Α΄ δημοτικού, η λέξη επιφάνεια στην Β΄ και Γ΄ δημοτικού) και σε δραστηριότητες παιγνιώδους μορφής όπως το τάνγκραμ και το παζλ, ή σε δραστηριότητες με πλακοστρώσεις χρησιμοποιώντας συμμετρικά γεωμετρικά σχήματα με κατάλληλες επιφάνειες και άλλα. Προφανώς και όλα τα σχήματα που εμφανίζονται σε όλα τα σχολικά βιβλία εμπεριέχουν την έννοια του εμβαδού και της εμβαδομέτρησης ή σύγκρισης μεγεθών.

Όσο ανεβαίνουμε σχολικό επίπεδο γίνεται και πιο θεωρητική η έννοια του εμβαδού κυρίως πολυγωνικών επιφανειών ή επιφανειών που προέρχονται από κυκλικές επιφάνειες και τέλος στη Γ΄ Λυκείου εμφανίζεται το εμβαδόν χωρίου με την αυστηρή έννοια του ολοκληρώματος και την σύνδεση με την έννοια της συνάρτησης.

Στα λεξικά η λέξη «εμβαδό» ερμηνεύεται σαν το μέτρο της έκτασης μιας επιφάνειας ή το εξαγόμενο από τη σύγκριση της επιφάνειας που θέλουμε να μετρήσουμε με μια άλλη επιφάνεια που παίρνουμε ως μονάδα μέτρησης. Με πιο αυστηρή γλώσσα «εμβαδό επιφάνειας» καλείται το μέτρο της, δηλαδή ο λόγος της προς τη μονάδα μέτρησης επιφανειών που συνήθως λαμβάνεται η επιφάνεια ενός τετραγώνου που έχει πλευρά την μονάδα μήκους. Επίσης βρίσκουμε την λέξη «εμβαδομέτρηση» που είναι το σύνολο των υπολογισμών σε έδαφος ή σε σχέδιο για την ανεύρεση του εμβαδού μιας εδαφικής έκτασης και το όργανο που υπολογίζει το εμβαδόν επίπεδων σχημάτων που λέγεται «εμβαδόμετρο» ή «επιπεδόμετρο».

Στόχος της εργασίας μας είναι η μελέτη των αντιδράσεων των μαθητών σε καινοτόμες διδασκαλίες με παράλληλη χρήση νέων τεχνολογιών που διευκολύνουν τους μαθητές στην κατανόηση δύσκολων γεωμετρικών διαδικασιών όπως για παράδειγμα οι κατασκευές που απαιτούνται αλλά αποφεύγονται λόγω πρακτικών δυσκολιών.

Έτσι επιλέξαμε την έννοια του εμβαδού που είναι αρκετά οικεία σε αυτούς αφού οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την έννοια αυτή από την Α΄ Δημοτικού έως και την Γ΄ Λυκείου με ποικίλους τρόπους, αλλά εμφανίζεται και στην καθημερινή ζωή όλων μας σε όλα τα στάδια της ζωής μας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Σύμφωνα με τους Van Hiele υπάρχουν πέντε επίπεδα στα οποία μπορεί να βρίσκεται ο μαθητής όσο αφορά την Γεωμετρία.

Στο $1^{ο}$ αναγνωρίζει τα γεωμετρικά σχήματα αλλά σαν ολότητες, δηλαδή αν είναι τρίγωνα, παραλληλόγραμμα , τραπέζια κ.α.

Στο $2^{ο}$ μπορεί να αναλύει τις ιδιότητες τους και να τις περιγράφει αλλά όχι φορμαλιστικά, για παράδειγμα υπολογίζει το εμβαδόν ενός τριγώνου βλέποντας μια πλευρά του και το αντίστοιχο ύψος αλλά δεν βλέπει εκεί τον τύπο Ε = ½ $\alpha \cdot \upsilon_\alpha$.

Στο 3ο μπορεί να διατάσσει, δηλαδή να προσδιορίζει σχέσεις μεταξύ ιδιοτήτων, να ταξινομεί λογικά τις ιδιότητες και να ξεκαθαρίζει το ρόλο του ορισμού. Χρειάζεται όμως την βοήθεια βιβλίου ή δασκάλου για αλλάζει και τη σειρά της θεωρίας και των προτάσεων. Η παραγωγική μέθοδος εμφανίζεται σε συνδυασμό με τον πειραματισμό.

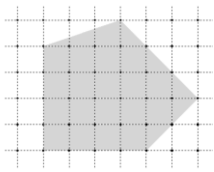
Στο 4ο επίπεδο κατανοεί την ουσία των αξιωμάτων, ορισμών, θεωρημάτων, αντιλαμβάνεται την παραγωγική μέθοδο και τις διαφορετικές δυνατότητες ανάπτυξης της θεωρίας.

Στο 5ο επίπεδο επιτυγχάνεται αφαίρεση και η γεωμετρία αποκτά γενικό χαρακτήρα και διευρυμένες εφαρμογές.

Κάθε επίπεδο είναι η συνέχεια του προηγούμενου και είναι σημαντική η αναγνώριση από το διδάσκοντα του επιπέδου του μαθητή ή του τμήματος. Το 4ο και το 5ο δεν εμφανίζονται συχνά στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Ο δάσκαλος για να επιλέξει την διδασκαλία του πρέπει να υποθέτει ότι ο μαθητής έχει ξεπεράσει τα προηγούμενα επίπεδα, να αντιλαμβάνεται αν υπάρχει έλλειψη συνοχής των γνωστικών δομών επιπέδων σκέψης, να εξασκεί την γλώσσα σαν εργαλείο περιγραφής και χειρισμού των εννοιών ώστε να μεταβαίνει στις διάφορες φάσεις μάθησης (Περδικάρης Σ., 1999).

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΙΣ ΣΤΗΝ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ο Georg Alexander Pick ήταν ένας Αυστριακός μαθηματικός εβραϊκής καταγωγής που γεννήθηκε το 1859 στη Βιέννη. Σήμερα είναι περισσότερο γνωστός για το θεώρημα του, που αναφέρεται στον προσδιορισμό του εμβαδού των πολυγώνων πλέγματος, δηλαδή πολύγωνα που οι κορυφές τους έχουν ακέραιες συντεταγμένες. Το εμβαδόν ενός τέτοιου πολυγώνου εξαρτάται από το πλήθος των σημείων του πλέγματος που υπάρχουν αφενός στο εσωτερικό του πολυγώνου και αφετέρου πάνω στην περίμετρο του πολυγώνου. Συγκεκριμένα αν Ε είναι το πλήθος των σημείων στο εσωτερικό του πολυγώνου και Π το πλήθος των σημείων στην περίμετρο του, τότε το εμβαδόν του πολυγώνου δίνεται από την σχέση $\text{Εμβαδόν} = \mathrm{E} + \Pi/2 - 1$.

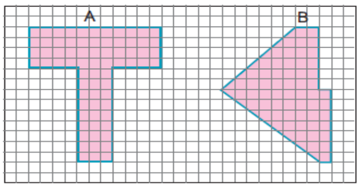


Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε την ισχύ του τύπου στο διπλανό σχήμα όπου έχουμε Ε = 16, Π = 14 και Εμβαδόν= 22. Παρά την απλότητα της διατύπωσης του το θεώρημα του Pick είναι πολύ δύσκολο στη σύλληψή του. Στα σύγχρονα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου δεν γίνεται καμία σαφής αναφορά σ’ αυτό το θεώρημα. Μόνο στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ., Ρεκούμης Κ., 2007) υπάρχουν ασκήσεις που μέσα από το σχήμα τους αφήνουν κάποιες υποψίες για πιθανή σύνδεση του εμβαδού με το πλήθος των σημείων του πλέγματος. Αυτό το διαπιστώσαμε και στις διδασκαλίες που κάναμε για τρία χρόνια (2008 - 2011) στο 1^{ο} Γυμνάσιο της Ρόδου. Θέλαμε να διαπιστώσουμε αν υπήρχε περίπτωση κάποιος ανυποψίαστος μαθητής χωρίς καμιά εξωτερική βοήθεια να εικάσει απλώς τη συσχέτιση του εμβαδού με τα σημεία του πλέγματος, για πολύγωνα που είναι προσαρμοσμένα στο πλέγμα.

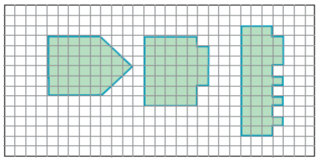
Παρακάτω παραθέτουμε ενδεικτικά ασκήσεις του βιβλίου που σαφέστατα κάνουν χρήση του πλέγματος. Ο στόχος βέβαια της συγγραφικής ομάδας ήταν να κατανοήσουν οι μαθητές την προσθετική ιδιότητα του εμβαδού. Προς αυτή την κατεύθυνση προσαρμόσαμε και την διδασκαλία μας. Χρησιμοποιήσαμε κυρίως δυο τεχνικές που τις ονομάσαμε «κόψε- ράψε» και «περικύκλωση». Η πρώτη τεχνική αναφέρεται στον τεμαχισμό του σχήματος και τη μεταφορά κάποιων κομματιών σε άλλη θέση με στόχο την δημιουργία ισοδυνάμου σχήματος με γνωστό τύπο εμβαδού. Η δεύτερη τεχνική αναφέρεται στην εγγραφή του σχήματος σε ένα άλλο σχήμα με γνωστό τύπο εμβαδού. Κατόπιν με αφαιρέσεις των εμβαδών των επιπλέον κομματιών είναι εφικτός ο υπολογισμός του εμβαδού στο αρχικό σχήμα. Νομίζουμε ότι και οι δύο είναι οι συνήθεις τεχνικές που χρησιμοποιούν όλοι οι Μαθηματικοί στις διδασκαλίες τους σε αυτό το κομμάτι της ύλης. Οι ονομασίες που επιλέξαμε νομίζουμε λίγο πολύ χρησιμοποιούνται από όλους τους Μαθηματικούς. Από τα σχήματα των ασκήσεων φαίνεται ότι η χρήση του πλέγματος είναι στη λογική να διευκολύνει τον τεμαχισμό των σχημάτων σε μοναδιαία τετράγωνα. Δεν έχει τη λογική του θεωρήματος του Pick. Από την άλλη μεριά, η εκφώνηση δίνει σαφή προσανατολισμό στη χρήση των μοναδιαίων τετραγώνων, οπότε τα σημεία του πλέγματος περνούν τελείως απαρατήρητα.

Σελίδα 115

1 Ποιο από τα δύο σχήματα Α, Β έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

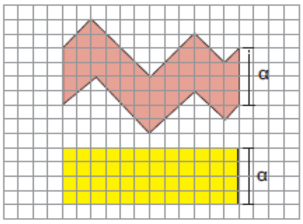


2 Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα παρακάτω σχήματα χρησιμοποιώντας ως μονάδα εμβαδού το . Τι παρατηρείτε;



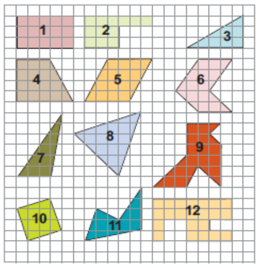
Σελίδα 124

3 Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι τα εμβαδά του ροζ και του κίτρινου σχήματος είναι ίσα.

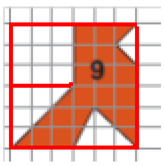


Σελίδα 125

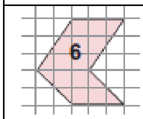
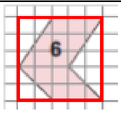
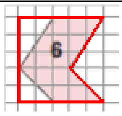
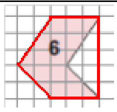
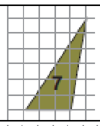
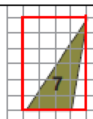
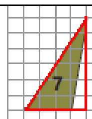
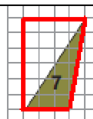
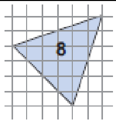
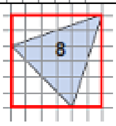
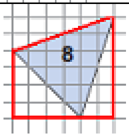
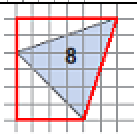
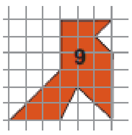
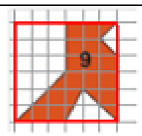
11 Στα παρακάτω σχήματα κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά 1 cm. Να βρείτε τα εμβαδά των 12 σχημάτων που δίνονται:



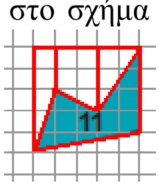
Οι μαθητές εύκολα μπορούσαν να αντιληφθούν την προσθετική ιδιότητα του εμβαδού και αντιμετώπιζαν τις ασκήσεις αυτές συνήθως με τον χωρισμό των σχημάτων σε απλούστερα σχήματα με γνωστό τύπο εμβαδού. Το ζητούμενο εμβαδόν υπολογιζόταν με προσθαφαίρεση επιμέρους εμβαδών. Σε ερωτήσεις μας της μορφής «πιστεύετε ότι το εμβαδόν μπορεί να υπολογισθεί από τα σημεία που περικλείει το σχήμα;» οι απαντήσεις ήταν αρνητικές. Οι μαθητές μπορεί να μπερδεύουν τις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου, αλλά να συνδέσουν το εμβαδόν με την έννοια του σημείου τους ήταν εντελώς αδιανόητο. Για την επίλυση των ασκήσεων που έχουν τη μορφή της άσκησης 11/σελίδα 125 αναπτύξαμε μια τεχνική που την ονομάσαμε «περικύκλωση». Η επιλογή της ονομασίας αποδείχτηκε πολύ καλή για τους μαθητές αυτής της ηλικίας. Η ιδέα αυτής της τεχνικής μας ήρθε από το πρώτο σχήμα της άσκησης που είναι ένα ορθογώνιο. Παροτρύναμε τους μαθητές να «περικυκλώσουν» τα επόμενα σχήματα από ορθογώνια, τρίγωνα, τετράγωνα ή τραπέζια που οι κορυφές τους ήταν σημεία του πλέγματος. Αυτό που μας έκανε εντύπωση ήταν ότι οι μαθητές προτιμούσαν να χρησιμοποιούν σαν σχήματα περικύκλωσης το τετράγωνο και το ορθογώνιο. Για να γίνει περισσότερο κατανοητό σας δίνουμε διάφορες «περικυκλώσεις» που οι μαθητές της θεωρούσαν επαρκείς και ανεπαρκείς στα σχήματα 6, 7 και 8.



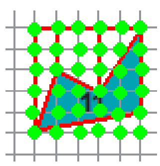
Μας δημιουργήθηκε η απορία για ποιο λόγο ήταν ανεπαρκείς οι «περικυκλώσεις» που δίνονται παρακάτω. Σε σχετική ερώτηση μας οι μαθητές απάντησαν ότι δεν είχαν δυνατότητα να υπολογίσουν τα εμβαδά. Την πλήρη ανάδειξη της αδυναμίας των μαθητών την κατανοήσαμε στο σχήμα 9. Ενώ είχαν κάνει την αναμενόμενη «περικύκλωση», για τον υπολογισμό των εμβαδών συνέχισαν τον τεμαχισμό του σχήματος, όπως σας δείχνουμε στο διπλανό σχήμα. Σε ερώτηση μας γιατί το έκαναν αυτό μας απάντησαν ότι έτσι μπορούσαν να υπολογίσουν τα εμβαδά αφού με αυτόν τον τρόπο δημιουργούσαν ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

ΣΧΗΜΑ	ΕΠΑΡΚΗΣ	ΑΝΕΠΑΡΚΗΣ	ΑΝΕΠΑΡΚΗΣ
			
			
			
			

Τους είπαμε μα γιατί δεν υπολογίζετε το εμβαδόν του τραπεζίου και οι μαθητές μας ρώτησαν πού είναι το τραπέζιο; Γενικά διαπιστώσαμε ότι είχαν αδυναμία αναγνώρισης του τραπεζίου. Ιδίως αν οι βάσεις του ήταν όπως στο σχήμα 9. Αυτή την αδυναμία την επιβεβαιώσαμε στο σχήμα 11 όπου



τους δώσαμε σαν περικύκλωση αυτήν που παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα. Δυσκολεύτηκαν αρκετά μέχρι να βρουν ότι ένας χρήσιμος τεμαχισμός ήταν αυτός που θα δημιουργούσε δυο ορθογώνια τραπέζια και ένα ορθογώνιο τρίγωνο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Μετά όμως από αρκετά σχήματα που κάναμε στον πίνακα οι μαθητές εξοικειώθηκαν και είχαν άνεση στην αναγνώριση του τραπεζίου.



Σε καμία όμως περίπτωση δεν συνέδεσαν το εμβαδόν με τα σημεία του πλέγματος. Ούτε στην περίπτωση που τους δίναμε σχήματα με έντονη υπόδειξη στα σημεία του πλέγματος. Μάλλον το θεωρούσαν σαν επιπλέον διακόσμηση ή διευκόλυνση στην καταμέτρηση των μοναδιαίων τετραγώνων. Πιστεύουμε πάντως ότι είναι εφικτή η αναφορά του θεωρήματος Pick και στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο αφού περιέχει και έννοιες από άλλη περιοχή των Μαθηματικών (σύστημα συντεταγμένων) και μπορούν να παραχθούν κατάλληλες δραστηριότητες από τον διδάσκοντα.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΙΣ ΣΤΗΝ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

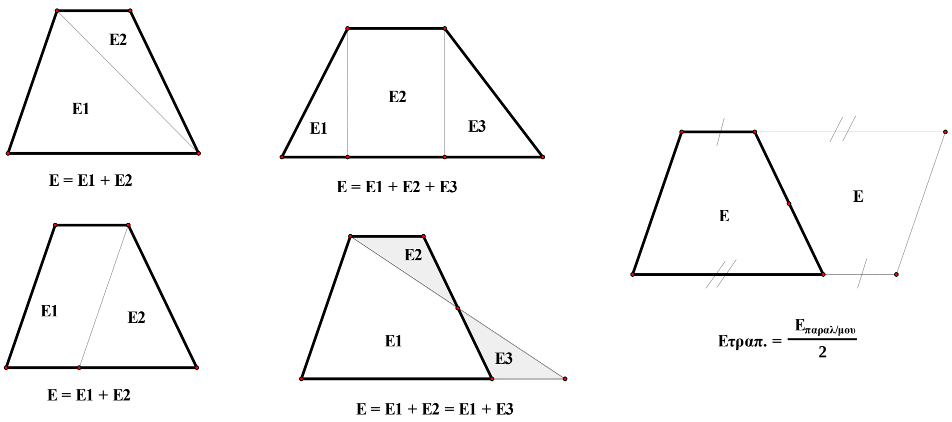
Στην ενότητα των εμβαδών, επιχειρήσαμε διδασκαλίες με την βοήθεια του λογισμικού G. Sketchpad σε ένα τμήμα Β΄ Λυκείου του 1ου ΓΕΛ Ρόδου το σχολικό έτος 2011-2012. Το επίπεδο του τμήματος ήταν αρκετά ψηλό στην Α΄ Λυκείου αφού γνωρίζαμε το τμήμα και μας προβλημάτισε η πτώση της απόδοσης του στην Β΄ Λυκείου και κυρίως στο μάθημα της Γεωμετρίας. Οι λόγοι πάνω κάτω είναι γνωστοί σε όλους μας αλλά θέλαμε να κάνουμε μια προσπάθεια ώστε να βελτιώσουμε την κατάσταση. Οι μαθητές αυτοί ήταν αρκετά εξοικειωμένοι σε διδασκαλίες με την βοήθεια λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας από την προηγούμενη χρονιά και αισιοδοξούσαμε ότι θα αλλάζαμε έτσι το κλίμα.

Αρχικά έγινε συζήτηση που αφορούσε την αναγκαιότητα των αξιωμάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και των κοινών εννοιών που χρησιμοποιούσε ο Ευκλείδης προσαρμοσμένα στην έννοια του εμβαδού και αργότερα σε κάθε βήμα της διαδικασίας τετραγωνισμού πολυγώνου εντοπίζαμε τις έννοιες αυτές. Για παράδειγμα τονίσαμε ότι δύο ίσα σχήματα είναι ισεμβαδικά (χωρίς να ισχύει το αντίστροφο όμως), ή ότι το άθροισμα και η διαφορά ισεμβαδικών σχημάτων ορίζει ισεμβαδικά σχήματα.

Στις πρώτες διδακτικές ώρες οι μαθητές έπρεπε να κατανοήσουν την διαδικασία των αποδείξεων των τύπων για τους υπολογισμούς εμβαδών βασικών σχημάτων και να τονιστεί η επιλογή της συγκεκριμένης σειράς αποδείξεων και η τεχνική της μετατροπής του σχήματος σε σχήμα με γνωστό εμβαδό. *«Η απόδειξη δεν θεωρείται μόνο ένα μέσο για να πείθει αλλά και ένα εργαλείο για καλύτερη κατανόηση. Η πιο σπουδαία λειτουργία της απόδειξης είναι η επεξηγηματική ή διασαφηνιστική αφού προσφέρει άφθονη οπτική πληροφορία»* (Hanna, 1998).

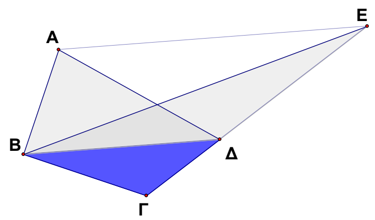
Στην απόδειξη για το ορθογώνιο τονίσαμε τη γεωμετρική σημασία της αλγεβρικής ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$. Ακολούθησε η πορεία μετατροπής πλάγιου παραλληλογράμμου σε ορθογώνιο και χρήση των κατάλληλων εννοιών – αξιωμάτων με παράλληλη βοήθεια από το λογισμικό. *«Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν τις γεωμετρικές αποδείξεις προσφέροντας τους επίσης την δυνατότητα να κάνουν γεωμετρικές κατασκευές με υψηλό βαθμό ακρίβειας. Έτσι διαπιστώνουν και την σημασία των προτάσεων που αποδεικνύουν ή χρησιμοποιούν για την απόδειξη ενός άλλου θεωρήματος. Επίσης με την βοήθεια των λογισμικών μπορούν να είναι σε θέση να ελέγχουν εικασίες ή να ανακαλύψουν νέες ιδιότητες σχημάτων. Χρειάζεται βέβαια και προσοχή να μην απομακρυνθούμε ή να εκφυλίσουμε την αναλυτική απόδειξη που περιέχει αυστηρότητα που απαιτούν τα Μαθηματικά»* (Τουμάσης Μ., 1999).

Ειδικά για το τραπέζιο οι μαθητές διερεύνησαν και άλλους τρόπους απόδειξης για να κατανοήσουν και να εξασκηθούν στην τεχνική «τεμαχισμού» ή του «κόψε – ράψε». Προτείναμε ακόμη την διερεύνηση για εύρεση τύπου εμβαδού σε συνάρτηση με την διάμεσο τραπεζίου ή σε συνάρτηση με τις πλευρές του μόνο, σύμφωνα με τις ιδέες που προκύπτουν από τα παρακάτω σχήματα.



Επανήλθαμε στην ενότητα του τετραγωνισμού πολυγώνων όπου ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών αυτών εντυπωσιάστηκε με την Γεωμετρία και τον τρόπο σκέψης των αρχαίων Ελλήνων και τα πλεονεκτήματα των λογισμικών αυτών. Μάλιστα είπαν κάποιοι: «αυτή είναι γεωμετρία…».

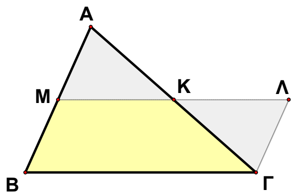
Το πρώτο στάδιο ήταν η μετατροπή τυχαίου τετραπλεύρου σε ισοδύναμο τρίγωνο με χρήση και της πρότασης 37 των «Στοιχείων» που αναφέρει ότι δύο τρίγωνα που έχουν ίδια βάση και κορυφές σε ευθεία παράλληλη στην ευθεία της βάσης, έχουν ίσα εμβαδά.



Φέραμε από το Α παράλληλη στην ΒΔ και προεκτείναμε την ΓΔ οπότε: (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΔ) + (ΒΓΔ) = (ΒΔΕ) + (ΒΓΔ) = (ΒΓΕ)

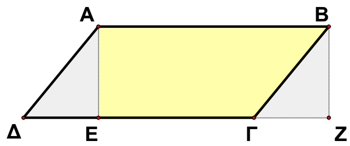
Οι μαθητές πρότειναν να γίνει ανάλογη ενέργεια από άλλη κορυφή. Η κατασκευή γινόταν με λογισμικό και σε επόμενα παραδείγματα οι μαθητές καθόριζαν τα βήματα που θα ακολουθούσαμε και περιέγραφαν ακριβώς τις κινήσεις του λογισμικού που έπρεπε να γίνουν και εξηγούσαν και τον λόγο. Αυτά γινόντουσαν και στα επόμενα βήματα της διαδικασίας τετραγωνισμού πολυγώνου. Συζητήθηκε επίσης η γενίκευση μετατροπής ν-γώνου σε ισοδύναμο (ν-1)-γωνο.

Στο επόμενο στάδιο ακολούθησε η μετατροπή τριγώνου σε ισοδύναμο παραλληλόγραμμο. Αν Μ και Κ μέσα δύο πλευρών και ΜΒΓΛ παραλληλόγραμμο έχουμε:



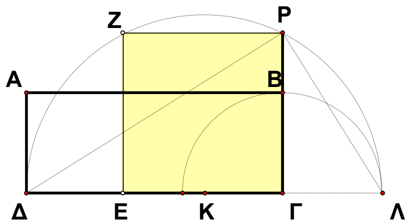
(ΑΒΓ) = (ΑΜΚ) + (ΜΒΓΚ) =(ΚΛΓ) + (ΜΒΓΚ) = (ΜΒΓΛ)
Εδώ συζητήθηκε η ισότητα τριγώνων και κάποιοι θυμήθηκαν σε αυτό το σχήμα την απόδειξη του θεωρήματος για το τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου από την Α΄ Λυκείου.

Μετά κάναμε την μετατροπή πλάγιου παραλληλογράμμου σε ισοδύναμο ορθογώνιο. Και εδώ συζητήθηκε η ισότητα τριγώνων και οι σχετικές έννοιες του Ευκλείδη και έγινε χρήση των εργαλείων κίνησης, απόκρυψης – εμφάνισης του λογισμικού. Ουσιαστικά επανέλαβαν την απόδειξη για τον τύπο εμβαδού παραλληλογράμμου.



Είναι: (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓΕ) + (ΑΕΔ) = (ΑΒΓΕ) + (ΒΓΖ) = (ΑΒΖΕ)

Τελευταίο βήμα ο τετραγωνισμός του ορθογωνίου. Μετατοπίσαμε το ΒΓ στο ΓΛ με διαβήτη (κύκλο). Κατασκευάσαμε ημικύκλιο με διάμετρο ΔΛ. Βρήκαμε το σημείο τομής της ΓΒ και του ημικυκλίου αυτού και κατασκευάσαμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΛΡ (η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή). Εφαρμόσαμε μετρική σχέση σε ορθογώνιο τρίγωνο (επανάληψη θεωρημάτων του προηγούμενου κεφαλαίου). Κατασκευάσαμε το τετράγωνο με πλευρά ΓΡ που ικανοποιεί το πρόβλημα.



Άρα: (ΑΒΓΔ) = ΒΓ·ΓΔ = ΓΛ·ΓΔ = ΓΡ^2 = (ΓΡΖΕ).
Στην πορεία κάναμε απόκρυψη και γραμμών που δεν χρειάζονταν για να μην μπερδεύονται οι μαθητές (πλεονέκτημα των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας). Συζητήθηκαν εναλλακτικές κατασκευές της μέσης αναλόγου των διαστάσεων του ορθογωνίου, δηλαδή την κατασκευή του τμήματος χ, τέτοιου ώστε χ^2 = α·β που είναι και η πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου

χρησιμοποιώντας και άλλη μετρική σχέση ή και διαφορετικές μεταφορές τμημάτων σε άλλα σημεία του σχήματος αλλά και διάφοροι τρόποι κατασκευής τετραγώνου με γνωστή πλευρά. Για επαλήθευση μετρούσαμε και τα εμβαδά των σχημάτων που χρειαζόμασταν. Επίσης προέκυψε και συζήτηση για τον τετραγωνισμό του κύκλου και ενημερώσαμε αναλυτικότερα τους μαθητές για το δημοφιλές αυτό «άλυτο πρόβλημα» και τους πληροφορήσαμε ότι θα το ξανασυναντήσουμε και στο επόμενο κεφάλαιο. Προτείναμε ακόμη να γίνει προαιρετικά και εργασία στο σπίτι πάνω στην κατασκευή αυτή ή κάποιων επιμέρους κατασκευών αλλά με κανόνα και διαβήτη σε κόλλα σχεδίου. Αρκετοί ανταποκρίθηκαν και κάποιοι που είχαν το λογισμικό εξασκήθηκαν με αυτή την δραστηριότητα και εκτύπωσαν τα ανάλογα σχήματα με δική τους πρωτοβουλία. Γενικά κάναμε χρήση τεχνικής «κόψε – ράψε», αξιωμάτων και κοινών εννοιών, χρήση μετρικών σχέσεων, τύπων εμβαδών, μετατόπιση τμημάτων και από όλα αυτά φαίνεται ξεκάθαρα η τεράστια παιδαγωγική αξία της δραστηριότητας αυτής.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Η έννοια του εμβαδού είναι απλωμένη στην ύλη όλων των τάξεων σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης με διαφορετικές προσεγγίσεις, τόσο πρακτικές όσο και θεωρητικές. Προσφέρεται λοιπόν σαν έννοια πάνω στην οποία μπορούν να πραγματοποιηθούν καινοτόμες δραστηριότητες και να αναδείξουν την ομορφιά της Γεωμετρίας και επιβάλλονται τέτοιες πρωτοβουλίες στην κατάσταση που έχει αδίκως περιέλθει το μάθημα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Hanna, G., (1998). Proof as an explanation in Geometry. Focus on Learning Problems in Mathematics, 20 (2, 3), 4-13.

Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ., Ρεκούμης Κ., (2007). Μαθηματικά Β΄Γυμνασίου, Αθήνα, Ο.Ε.Δ.Β.

Μαλλιάκας Κ., Σωτηράκης Α. (2011).Μοντέλο ανίχνευσης και συσχέτισης Μαθηματικών όρων στα σχολικά βιβλία Μαθηματικών της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Πρακτικά 28ου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Αθήνα, Ε.Μ.Ε.

Περδικάρης, Σ., (1999). Επίπεδα Van Hiele: Αναπτυξιακή Ψυχολογία της Μαθηματικής Γεωμετρικής Σκέψης. Ευκλείδης Γ, Τόμος 16, Τεύχος 52, Αθήνα, ΕΜΕ.

Τουμάσης Μ., (1999). Αλλάζει η φύση της Μαθηματικής απόδειξης; Παιδαγωγικές συνέπειες. Ευκλείδης Γ, Τόμος 16, Τεύχος 52, Αθήνα, ΕΜΕ.