

**Γνωστική Περιοχή :** Ευκλείδεια Γεωμετρία Β΄ ΕΠΑ.Λ.

**Ενότητα σχολικού εγχειριδίου :** Τέμνουσες κύκλου (§ 9.7 σελ. 199)

**Θέμα :** Τέμνουσες κύκλου και δύναμη σημείου.

## ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Η σχετική ενότητα έχει προγραμματιστεί να διδαχθεί στην τάξη μετά το πέρας της παρούσας παρέμβασης. Με το σενάριο αυτό επιδιώκεται:

- η διαπίστωση και ο έλεγχος υποθέσεων στις τέμνουσες κύκλου, μέσω δυναμικών οπτικών μετασχηματισμών (αυξομειώσεων και μετατοπίσεων),
- η εισαγωγή των ιδιοτήτων των τεμνουσών ενός κύκλου **με αλγεβρικό τρόπο**, χρησιμοποιώντας τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά στο πλαίσιο της συμμεταβολής.

## ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ

Το λογισμικό που χρησιμοποιείται είναι το Geogebra (Ελληνική έκδοση 3). Το συγκεκριμένο λογισμικό έχει το πλεονέκτημα ότι παρέχεται ελεύθερο στο Διαδίκτυο, οπότε ο οποιοσδήποτε μαθητής μπορεί να το εγκαταστήσει στον προσωπικό του υπολογιστή, προκειμένου να έχει μια περαιτέρω κατ' οίκον ενασχόληση με σχετικές δραστηριότητες και εφαρμογές.

## ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

- Ως προς τα Μαθηματικά, οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν:
  - τα βασικά στοιχεία κύκλου (κέντρο, ακτίνα, χορδή, εφαπτομένη, τέμνουσα)
  - την έννοια του ορθογωνίου συστήματος αξόνων και των καρτεσιανών συντεταγμένων
  - την έννοια της γραφικής απεικόνισης ενός σημείου  $(x,y)$  σε ένα σύστημα συντεταγμένων
  - τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά (αμφίδρομη μετάβαση από την γραφική τους παράσταση στην αλγεβρική τους ερμηνεία)
  - το πυθαγόρειο θεώρημα.
- Ως προς την τεχνολογία, οι μαθητές θα πρέπει να έχουν αποκτήσει βασική εξοικείωση με τους Η/Υ και με τη χρήση του εκπαιδευτικού λογισμικού Geogebra .

## ΓΝΩΣΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

Μετά την ολοκλήρωση όλων των δραστηριοτήτων του σεναρίου αναμένεται οι μαθητές να είναι σε θέση:

- Να παρατηρήσουν και να συμπεράνουν τη σταθερότητα της ποσότητας  $PA \cdot PB$ , καθώς και την ανεξαρτησία της τιμής της από τη θέση της σχετικής τέμνουσας. Ειδικότερα, στην περίπτωση όπου η μία τέμνουσα γίνεται εφαπτομένη του κύκλου, αναμένουμε από τους μαθητές να διαπιστώσουν τη οριακή σχέση  $PG^2 = PA \cdot PB$ .
- Να γνωρίσουν τη μαθηματική απόδειξη της παραπάνω σχέσης.
- Να συσχετίσουν το πρόσημο της παράστασης  $\delta^2 - R^2$  με τη θέση του σημείου  $P$  ως προς τον κύκλο  $(O,R)$ .

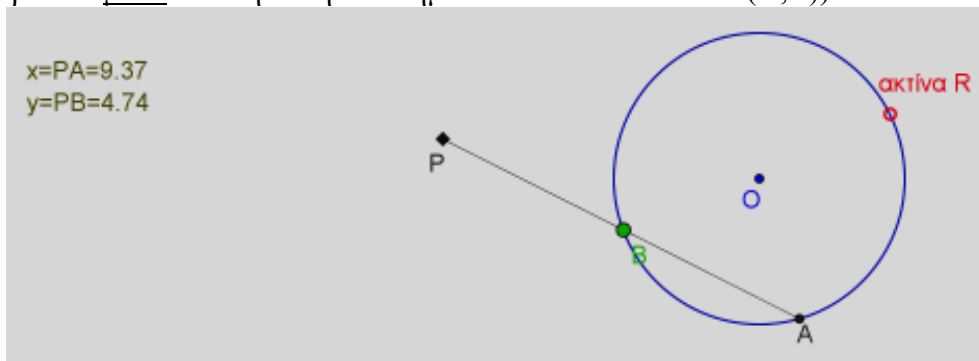
## ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ -ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

### Πορεία διεξαγωγής:

#### 1<sup>η</sup> Φάση Υλοποίησης (Τάξη-Εργαστήριο-Τάξη)

Οι μαθητές στο προηγούμενο μάθημα ασχολήθηκαν στην τάξη με επαναληπτικές έννοιες στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, προκειμένου να τα συνδέσουν με την τρέχουσα ύλη. Η συνέχεια γίνεται στο Εργαστήριο Πληροφορικής.

Συγκεκριμένα, **στα βήματα 1,2,3,4** του φύλλου εργασίας οι μαθητές εμφανίζουν το παρακάτω σχήμα. Στο αλληλεπιδραστικό περιβάλλον του λογισμικού, η ακτίνα R του κύκλου, καθώς και τα σημεία P,B, είναι άμεσα διαχειρίσιμα μέσω του συρσίματος (dragging), τροποποιώντας ανάλογα τη μορφή της τέμνουσας PBA και τις αντίστοιχες τιμές x,y, (διαπιστώνεται έτσι, όπως φαίνεται στα επόμενα στιγμιότυπα, ότι το γινόμενο x,y εξαρτάται μόνο από τη θέση του σημείου P και του κύκλου (O,R)).

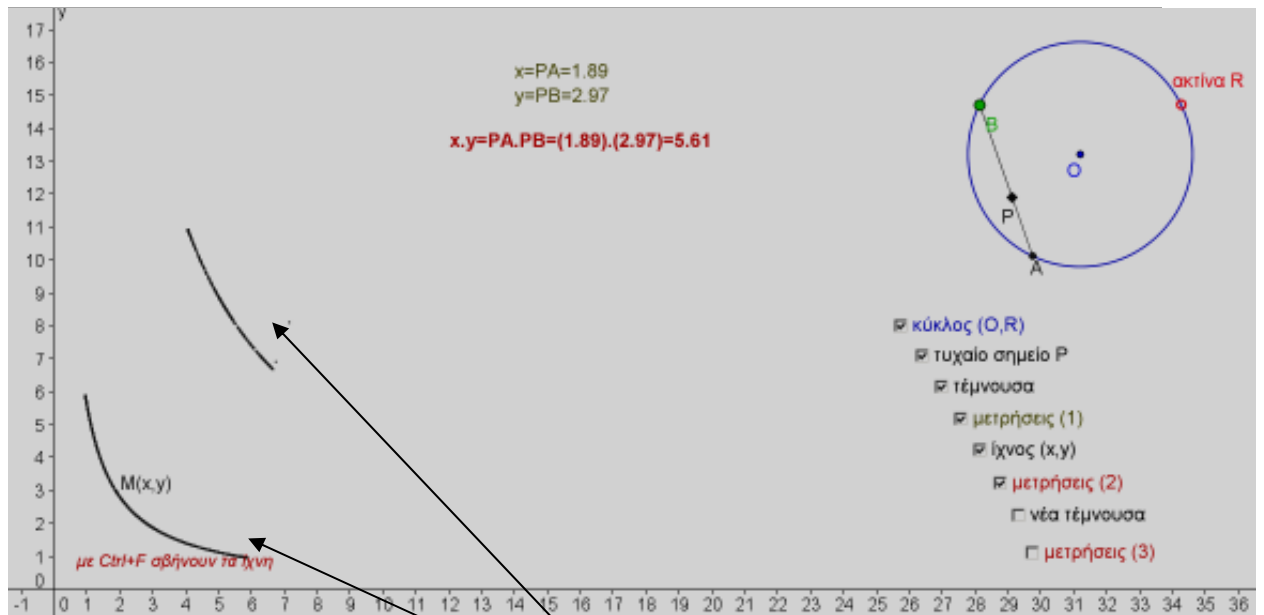


Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο  $PA \cdot PB$  (δηλ. το  $xy$ ) παραμένει σταθερό, καθώς το σημείο B αλλάζει θέση στον κύκλο. Οπότε οι αριθμοί PA και PB είναι αντιστρόφως ανάλογοι. Αυτό το παρατηρούν οι μαθητές στο **5<sup>ο</sup> βήμα** της γραφικής απεικόνισης (συνεχώς και σε πραγματικό χρόνο) των σημείων (x,y). Άμεση συνέπεια αυτής της γραφικής παρατήρησης είναι το συμπέρασμα του **6<sup>ου</sup> βήματος**:  $PA \cdot PB = \text{σταθερό}$

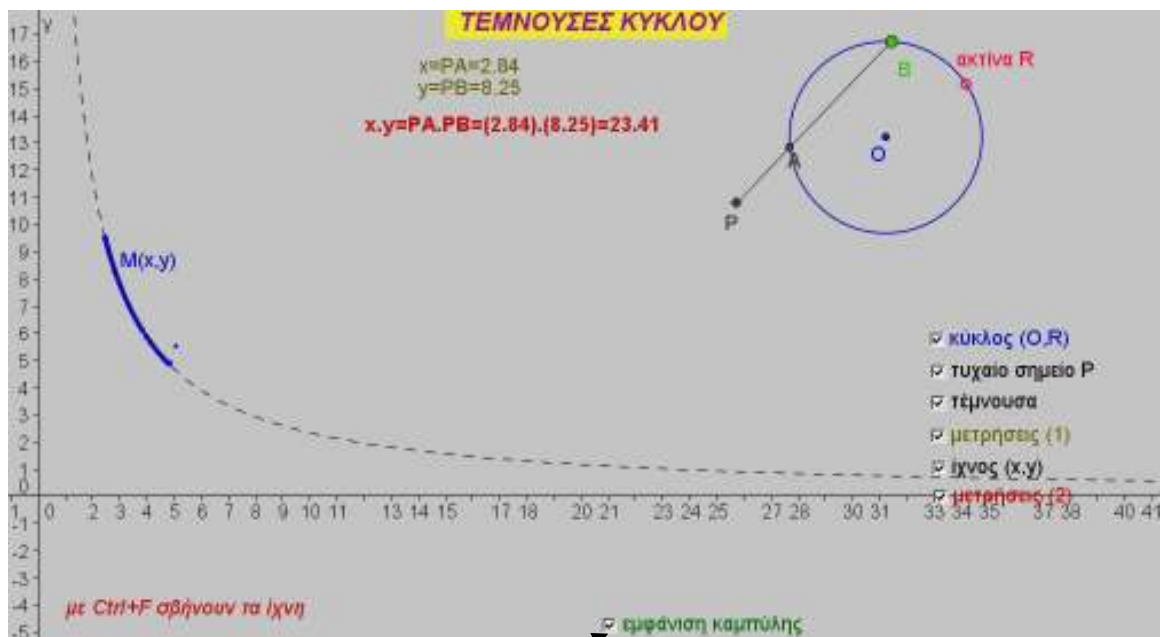
Η υπόθεση αυτή ελέγχεται και υπολογιστικά με το **7ο βήμα**.

# ΤΕΜΝΟΥΣΕΣ ΚΥΚΛΟΥ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΗ ΣΗΜΕΙΟΥ

Τρύφων Παύλος, e-mail: pavtrifon@gmail.com

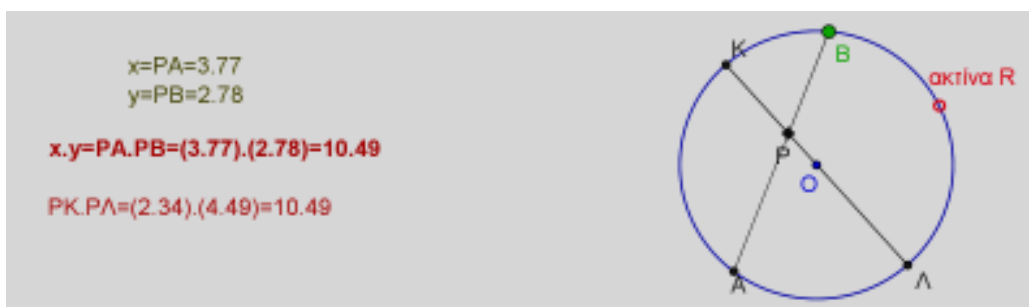
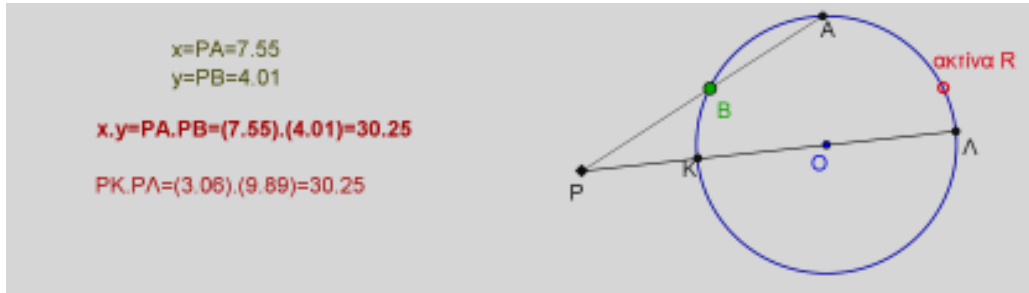


Εδώ φαίνεται το αποτέλεσμα της συμμεταβολής ως άμεση ανατροφοδότηση των ενεργειών κάθε μαθητή από το πρόγραμμα Geogebra. Η κανονικότητα του ζεύγους  $(x,y)$  απεικονίζεται γραφικά, όταν το σημείο P κινείται **εκτός** ή **εντός** του κύκλου (O,R).



Με τον σύνδεσμο «εμφάνιση καμπύλης» παρέχεται μια επιπλέον βοήθεια στον μαθητή προκειμένου να μπορέσει να αναγνωρίσει τον γεωμετρικό τόπο των σημείων  $(x,y)$ . Αλλάζοντας τη θέση του σημείου P, δημιουργείται μια απειρία γραφικών παραστάσεων που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, ως προς τη σταθερότητα του γινομένου  $PA \cdot PB$ .

Στο βήμα 8 συμπεραίνεται με τη βοήθεια των προηγούμενων βημάτων του φύλλου εργασίας η σχέση  $PA \cdot PB = PK \cdot PL$ , η οποία διαπιστώνεται και υπολογιστικά, είτε το σημείο P είναι εκτός του κύκλου, είτε εντός αυτού.



Ολοκληρώνοντας το βήμα 8, οι μαθητές έχουν περιγράψει με άτυπο, δηλαδή με **εμπειρικό** τρόπο, τη σχέση  $PA \cdot PB = PK \cdot PL$ . Στο σημείο αυτό θα ήταν χρήσιμο ο διδάσκων να υπογραμμίσει στους μαθητές ότι αυτή η άτυπη απόδειξη στηρίζεται μόνο σε μετρήσεις και αποτελεί μια μόνο πρώτη προσέγγιση της διαπιστούμενης σχέσης. Η σχετική μαθηματική απόδειξη της διαπίστωσης αυτής θα λάβει χώρα στο επόμενο μάθημα στην τάξη.

## 2<sup>η</sup> Φάση Υλοποίησης (Εργαστήριο-Τάξη)

Στο βήμα 9 εισάγεται ο ορισμός της δύναμης σημείου ως προς κύκλο, ως φυσικό αποτέλεσμα του ελέγχου της σταθερότητας της ποσότητας  $PA \cdot PB$ .

Να σημειωθεί πως η συμπλήρωση των σχετικών κενών « $PK \cdot PL = (\dots - \dots)(\dots + \dots) = \dots^2 - \dots^2$ » που αναφέρονται στο φύλλο εργασίας θα πρέπει να συνοδεύεται για κάποιες ομάδες μαθητών από το παραπάνω στιγμιότυπο όπου το σημείο P βρίσκεται εκτός του κύκλου (O,R), ενώ για τις υπόλοιπες ομάδες μαθητών από εκείνο το στιγμιότυπο, όπου το σημείο P βρίσκεται εντός του κύκλου (O,R). Η εμπειρία αυτή αναμένεται να τροφοδοτήσει σχετική συζήτηση στην τάξη για τα αντίθετα αποτελέσματα  $\delta^2 - R^2$ ,  $R^2 - \delta^2$  των υπολογισμών των μαθητών, τα οποία μπορούν να ελεγχθούν ως προς την ορθότητα και την ερμηνεία τους (γνωστική σύγκρουση κατά Piaget).

Στο 10<sup>ο</sup> βήμα ζητάμε από τους μαθητές να πειραματιστούν με το πρόσημο της παράστασης  $\Delta_{(O,R)}^P$  για τις διάφορες θέσεις του P ως προς τον κύκλο, ενώ στο επόμενο βήμα 11 συνοψίζουν τα συμπεράσματά τους στο φύλλο εργασίας.

**ΤΕΜΝΟΥΣΕΣ ΚΥΚΛΟΥ**

$x=PA=4.27$   
 $y=PB=8.19$

$x \cdot y = PA \cdot PB = (4.27) \cdot (8.19) = 34.95$

$PK \cdot PL = (3.47) \cdot (10.07) = 34.95$

$\Delta_{(O,R)}^P = d^2 - R^2 = (6.77)^2 - (3.3)^2 = 34.95$

$PG^2 = (5.91)^2 = 34.95$

- κύκλος (O,R)
- νέα τέμνουσα
- τυχαίο σημείο P
- μετρήσεις (3)
- τέμνουσα
- μετρήσεις (4)
- μετρήσεις (1)
- εφαιπτομένη
- ίχνος (x,y)
- μετρήσεις (2)

Στο τελευταίο βήμα 12 καλούνται οι μαθητές να αποδείξουν αναλυτικά στο φύλλο εργασίας τη σχέση  $PG^2=PA \cdot PB$  (αφού πρώτα τη διαπιστώσουν υπολογιστικά για τις διάφορες θέσεις του P). Ετσι, αναμένεται η απόδειξη να είναι περισσότερο κατανοητή από τους μαθητές, ως συνέπεια της πρόσφατης αποκτηθείσας εμπειρίας από την ενασχόληση τους με το σύνολο των ιδιοτήτων της δύναμης σημείου ως προς κύκλο. Η σχετική μαθηματική απόδειξη της διαπίστωσης αυτής θα γίνει και στο επόμενο μάθημα στην τάξη για λόγους επανάληψης. Επίσης στην τάξη θα παρουσιαστούν από τους μαθητές και οι λύσεις των δύο ασκήσεων του φύλλου εργασίας τους.

### Γ) Ενδεχόμενα προβλήματα κατά την υλοποίηση:

Αφού έχει εξασφαλιστεί εγκαίρως η πρόσβαση στο Εργαστήριο Πληροφορικής, ο εκπαιδευτικός πρέπει να είναι προετοιμασμένος με εναλλακτικές λύσεις για την περίπτωση απρόβλεπτων καταστάσεων. Σε περίπτωση που κάποιος υπολογιστής τεθεί εκτός λειτουργίας, θα κάνουμε ανασύνταξη ομάδων. Σε περίπτωση που δε λειτουργεί μεγάλο μέρος του δικτύου υπολογιστών ή προκύψει διακοπή ηλεκτρικού ρεύματος, τα παιδιά θα δουλέψουν ομαδικά στα τετράδια τους και ο δάσκαλος στον πίνακα του Εργαστηρίου.

**ΕΠΕΚΤΑΣΗ**

**A)** Όταν το σημείο P κινείται στο εσωτερικό του κύκλου, τα παιδιά μπορούν να διαπιστώσουν τη σχέση  $PA \cdot PB = R^2 - \delta^2$ , κάτι που στο σχολικό εγχειρίδιο δεν αποδεικνύεται! Αυτή ακριβώς η δυνατότητα αποδίδει μία ακόμα **προστιθέμενη αξία** στις δραστηριότητες του εν λόγω σεναρίου.

**ΤΕΜΝΟΥΣΕΣ ΚΥΚΛΟΥ**

$x=PA=3.76$   
 $y=PB=2.12$

**$x \cdot y = PA \cdot PB = (3.76) \cdot (2.12) = 7.99$**

$PK \cdot PL = (1.6) \cdot (5) = 7.99$

$\Delta_{(O,P)}^P = \delta^2 - R^2 = (1.7)^2 - (3.3)^2 = -7.99$

- κύκλος (O,R)
- τυχαίο σημείο P
- τέμνουσα
- μετρήσεις (1)
- ίχνος (x,y)
- μετρήσεις (2)

- νέα τέμνουσα
- μετρήσεις (3)
- μετρήσεις (4)
- εφαπτομένη

Έτσι, λοιπόν, το παρόν σενάριο αποτελεί μία επέκταση ως προς την παραπάνω περίπτωση, με αποτέλεσμα οι μαθητές να είναι από τώρα ενημερωμένοι σε μια πιθανή μελλοντική ενσωμάτωση στο Αναλυτικό Πρόγραμμα της απόδειξης αυτής.

**B)** Οι μαθητές μετά από αυτή την εμπειρία, θα έχουν τη δυνατότητα να εφαρμόσουν τη συγκεκριμένη μέθοδο και σε άλλα παρόμοια προβλήματα. Για παράδειγμα, η άσκηση 2 του φύλλου εργασίας συνοδεύεται από το σχετικό αρχείο Geogebra με τίτλο «*αρχείο άσκησης 2 για το σπίτι*», με τη χρήση του οποίου αναμένεται να διαπιστώσουν σε περιβάλλον δυναμικής διεπιφάνειας την ισότητα των εφαπτόμενων τμημάτων MN και MH.

**ΑΣΚΗΣΗ 2 ΦΥΛΛΟΥ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

- εμφάνιση κύκλων
- ακτίνα 1ου κύκλου:    ακτίνα 2ου κύκλου:
- εμφάνιση κοινής χορδής AB
- εμφάνιση σημείου M
- εμφάνιση εφαπτομένων
- εμφάνιση μετρήσεων

Μετακινήστε το σημείο M.  
Τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις MN και MH;

Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

Γ) Με κατάλληλες τροποποιήσεις-απλοποιήσεις στα φύλλα εργασίας (μεγαλύτερη γραμματοσειρά, προσθήκη εικόνων χρωμάτων και σχημάτων) το σενάριο μπορεί να δοθεί και σε μαθητές με **μαθησιακές δυσκολίες**. Η διδασκαλία προσαρμόζεται στις ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες των μαθητών αυτών. Ο ρυθμός εργασίας τους είναι συμβατός με τις ικανότητες τους και εκφράζεται μέσα από ευκολομνημόνευτες χρηστικές οδηγίες που τους παρέχονται.

Στον αντίποδα αυτής της αντιμετώπισης, τα φύλλα εργασίας μπορούν να προσαρμοστούν και σε μαθητές με **χαρισματικότητα**, παρέχοντας τους τη δυνατότητα για μεγαλύτερη αυτενέργεια και διάδραση με το λογισμικό. Για παράδειγμα, ο σύνδεσμος «εμφάνιση καμπύλης» μπορεί να παραληφθεί, οπότε ενισχύεται ο βαθμός αναστοχασμού των χαρισματικών μαθητών, προκειμένου να εικάσουν το αναλλοίωτο της παράστασης  $PA \cdot PB$ .

Δ) Η εκπόνηση του σεναρίου μπορεί να πραγματοποιηθεί εναλλακτικά με τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας «*Cabri-Geometry II*» και «*The Geometer's Sketchpad*». Τα προγράμματα αυτά υποστηρίζουν τις αντίστοιχες εντολές δημιουργίας των αρχείων του εν λόγω σεναρίου. Τα τελικά γραφικά περιβάλλοντα είναι διαφορετικά, αλλά ισοδύναμα ως προς τις δυνατότητές τους. Έτσι, το σενάριο εμπεριέχει μια ευελιξία ψηφιακής παρουσίασης, ανάλογα με το ποιο συνοδευτικό πρόγραμμα είναι κάθε φορά περισσότερο προσιτό στους μαθητές, στον εκπαιδευτικό και στη διδασκόμενη ύλη.

Ε) Σε περίπτωση που διατίθεται διαδραστικός πίνακας, ο εκπαιδευτικός μπορεί να καλέσει ομάδες μαθητών να παρουσιάσουν την εργασία τους ενώπιον όλης της τάξης και, έτσι, να εμπλακούν τα παιδιά σε επιπλέον συζητήσεις και διαδικασίες συλλογικής διερεύνησης σχετικά με τους διαφορετικούς τρόπους αντιμετώπισης των ζητημάτων του φύλλου εργασίας (π.χ. οι διαφορετικές κατά περίπτωση μορφές  $\delta^2 \cdot R^2$ ,  $R^2 \cdot \delta^2$  του γινομένου  $PA \cdot PB$ ).

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:..... ΤΑΞΗ:.....

ΕΝΟΤΗΤΑ: Τέμνουσες κύκλου ΤΜΗΜΑ:.....

**ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Ι**

1. Ενεργοποιήστε την εντολή «κύκλος (O,R)». Εμφανίζεται ένας κύκλος του οποίου μπορείτε να μετακινήσετε το κέντρο του, **O**, ή να μεταβάλετε την ακτίνα του, **R**.

2. Επιλέγοντας την εντολή «τυχαίο σημείο», εμφανίζεται σημείο **P** εξωτερικό του κύκλου, του οποίου επίσης μπορείτε να αλλάξετε τη θέση.

3. Ενεργοποιώντας την εντολή «τέμνουσα» εμφανίζεται η τέμνουσα **PBA** του κύκλου. Η θέση της τέμνουσας αλλάζει μετακινώντας το σημείο **B**.

4. Ας μετρήσουμε τις αποστάσεις  $x=PA$ ,  $y=PB$  του σχήματος ενεργοποιώντας την επιλογή «μετρήσεις (1)». Μετακινώντας το σημείο **B** βλέπουμε τις αντίστοιχες μετρήσεις.

5. Επιλέγοντας τον σύνδεσμο «ίχνος (x,y)» εμφανίζεται το σημείο **M(x,y)** στο καρτεσιανό επίπεδο. Αλλάζοντας θέση στο σημείο **B** βλέπουμε τις διάφορες θέσεις του σημείου **M**. (πατώντας *Ctrl+F* σβήνουν τα ίχνη).

Ποιας συνάρτησης τη γραφική παράσταση σας θυμίζει η παραπάνω εικόνα;

.....

Αν δεν μπορέσατε να απαντήσετε, δοκιμάστε να τοποθετήσετε το σημείο **P** στο εσωτερικό του κύκλου και να μετακινήσετε ξανά το σημείο **M**.

Ποιας συνάρτησης τη γραφική παράσταση σας θυμίζει τώρα;

.....

!!(αν και πάλι δεν τα καταφέρατε, ενεργοποιήστε τον σύνδεσμο «εμφάνιση καμπύλης») !!



6. Επειδή τα σημεία  $M(x,y)$  βρίσκονται σε μια....., προκύπτει ότι οι τιμές  $x, y$  είναι.....ποσά, δηλαδή:

το γινόμενο  $PA \cdot PB$  παραμένει πάντα.....

7. Ας επαληθεύουμε το προηγούμενο συμπέρασμα σας επιλέγοντας το σύνδεσμο «μετρήσεις (2)» και μετακινώντας το σημείο  $B$ .

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ II

8. Κάνοντας κλικ στην εντολή «**νέα τέμνουσα**» εμφανίζεται η τέμνουσα  $PK\Lambda$  η οποία διέρχεται από .....του κύκλου. Τι παρατηρείτε για τα γινόμενα  $PA \cdot PB$  και  $PK \cdot P\Lambda$  ; .....

Επαληθεύστε τη διαπίστωσή σας κάνοντας κλικ στο κουτί «**μετρήσεις (3)**» και μετακινώντας το σημείο  $P$ .

9. Ας ονομάσουμε  $\delta=PO$  και  $R=KO=OA$ .

Συμπληρώστε τα παρακάτω κενά με τα γράμματα  $\delta, R$  :

$$PK \cdot P\Lambda = (\dots - \dots)(\dots + \dots) = \dots^2 - \dots^2$$

### ΟΡΙΣΜΟΣ

*Η διαφορά  $\delta^2 - R^2$  λέγεται δύναμη του σημείου  $P$  ως προς τον κύκλο  $(O,R)$  και συμβολίζεται ως εξής*

$$\Delta_{(O,R)}^P = \delta^2 - R^2$$

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ III

10. Κάντε κλικ στο σύνδεσμο «**μετρήσεις (4)**». Μετακινήστε το σημείο  $P$ , έτσι ώστε να βρεθεί εκτός του κύκλου ή εντός ή πάνω στον κύκλο. Τι παρατηρείτε για την τιμή  $\delta^2 - R^2$ , δηλαδή για τη δύναμη του σημείου;

.....  
 .....

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ**

11. Ας συνοψίσουμε και ας διατυπώσουμε τα συμπεράσματά μας για κάθε θέση του σημείου **P** ως προς τον κύκλο.

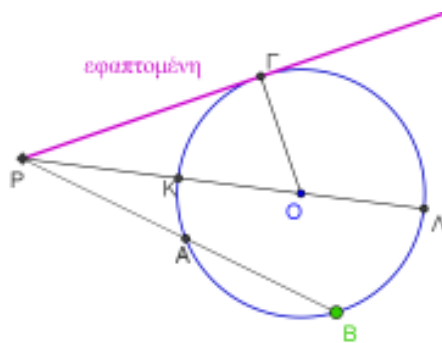
- ✓ **P** εξωτερικό σημείο του κύκλου **(O,R)**  $\Leftrightarrow \Delta^P_{(O,R)} \dots\dots\dots$
- ✓ **P** εσωτερικό σημείο του κύκλου **(O,R)**  $\Leftrightarrow \Delta^P_{(O,R)} \dots\dots\dots$
- ✓ **P** είναι σημείο του κύκλου **(O,R)**  $\Leftrightarrow \Delta^P_{(O,R)} \dots\dots\dots$

**ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ IV**

12. Κάντε κλικ στο σύνδεσμο «εφαπτομένη». Τι παρατηρείτε για τα αποτελέσματα  $PG^2$  και  $PA \cdot PB$  ;

.....

Ποια η μαθηματική απόδειξη αυτού;



.....

.....

.....

.....

.....

**Ασκήσεις για το σπίτι:**

- 1) Ερώτηση Κατανόησης 1 σελ. 203 σχ. βιβλίου
- 2) Θεωρούμε δύο τεμνόμενους κύκλους, την κοινή τους χορδή AB και ένα τυχαίο σημείο M στην προέκταση της AB. Από το M φέρνουμε τις εφαπτομένες MN και MH. Αποδείξτε ότι  $MN=MH$ .

Για την άσκηση 2 ανοίξτε το αρχείο Geogebra με τίτλο «αρχείο άσκησης 2 για το σπίτι»