

2011 - 2012

4^ο Γενικό Λύκειο Χαλίων

Γ τάξη

γ

Μαθηματικά

Γενικής Παιδείας

11.09

Ασκήσεις για λύση

*Επιμέλεια: Μ. Ι. Παπαγρηγοράκης
<http://users.sch.gr/miraparagr>*

ΚΕΦ1

1 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

A) $f(x) = \log(9 - x^2)$

B) $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$.

Γ) $f(x) = \frac{4x - 2}{\sqrt{e^x + 1}}$

Δ) $f(x) = \frac{2\epsilon\phi x}{\eta\mu x - \eta\mu 2x}$

E) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

Στ) $g(x) = \frac{2x^2 + 5x}{\sqrt{x-4}}$

Z) $f(x) = \frac{5}{|x-3|-1}$

H) $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

2 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$k(x) = \sqrt{12 - x - x^2}$

$\phi(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

$h(x) = \ln \frac{x+2}{5-x} + 3 \ln x$

$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} + \ln x$

$r(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

$t(x) + \log(2 - \log x)$

3 Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των:

A) $f(x) = -\frac{1}{x}$

B) $p(x) = -x + 1$

Γ) $f(x) = e^x - 2$

Δ) $g(x) = x^2 - 1$

E) $s(x) = -\ln x$

Z) $g(x) = 2\eta\mu x$

4 Αν $f(x) = \ln(x+1)$ και $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$. Να

οριστούν οι συναρτήσεις: $f+g$, $f \cdot g$, f/g

5 Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $\frac{f}{g}$ όταν:

A) $f(x) = \ln(x+1)$ και $g(x) = \sqrt{4 - |x|}$.

B) $f(x) = 1 - x^2$, $x \in [-1, 4]$ και $g(x) = \sqrt{x}$

6 Να βρείτε τα κοινά σημείο των αξόνων με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

A) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$

B) $f(x) = e^{x-2} - 1$

Γ) $f(x) = \ln(2-x)$

Γ) $f(x) = \eta\mu 2x$

7 Να βρεθούν τα σημεία των γρ. παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - x$ και $g(x) = x^2 - 1$

8 Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - 5x^2 + \beta x + 1$ της οποίας η C_f διέρχεται από τα $(2, 25)$ και $(1, 0)$

A) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β

B) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$.

9 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sqrt{x-3}$. Να βρεθεί το α ώστε η C_f να διέρχεται από το $M(4, 2)$

10 Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 - 1$

A) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $g(x) = 0$;

B) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της g βρίσκεται 'κατώ' από τον x 's

Γ) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$, $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $\phi(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x}$. Να βρεθεί η απόσταση των σημείων $A(1, f(1))$ και $B(-1, f(-1))$

12 Αν $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ τότε να αποδείξετε ότι

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ και $f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{f(x)}$

13 Αν για μια συνάρτηση f ισχύει

A) $f(x^2) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε να βρείτε το $f(0)$ και το $f(1)$

B) $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, $x \neq 0$, τότε να βρείτε το $f(2)$

14 Έστω η ευθεία: $y = (\lambda^2 - 3\lambda)x + 1$ (1)

A) Αν η (1) διέρχεται από το $(1, -1)$ τότε να βρείτε
α) το λ

β) τα σημεία τομής της (1) με τους άξονες

B) Για ποια λ η (1) είναι παράλληλη προς το x 's

Γ) Για ποια λ η (1) είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -2x + 7$

15 Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες:

$y = (\lambda^2 - 2\lambda)x + 1$ και $y = -1$ να είναι παράλληλες

16 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$.

A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

B) Να δείξετε ότι $f(\alpha) + f(\beta) = f\left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}\right)$ για κάθε α, β του πεδίου ορισμού της f .

17 Να εξετάσετε την μονοτονία των συναρτήσεων

$f(x) = -2x + 2$ $g(x) = \ln(1-x)$

$h(x) = e^{-2x+1}$ $k(x) = \frac{-2}{x}$, $x > 0$

$\lambda(x) = x^2$ $\mu(x) = \sqrt{x} - 1$

ΚΕΦ1 ΟΡΙΑ -ΣΥΝΕΧΕΙΑ

18 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x+2} e^x$ B) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{7x-21}{|x-4|+1}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$

19 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x+3}$ B) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)^2}{x^2-9}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x+1}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-2x-15}$

20 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^3+4t^2+4t}{(t+2)(t-3)}$ B) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

21 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3-x^2+3x-3}$ B) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5-32}{x^4-16}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^2-1}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x+2}{x+2}$

22 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1-\eta\mu^2 x}$ B) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{x+5}}{x^2-16}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-1-\sqrt{x+5}}{x-4}$

23 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^2+x+2}-2}$ B) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{2\sqrt{x+6}-3\sqrt{x+1}}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{5}}{x^2-6x+5}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt{x}-3}{\sqrt{x-x^2}}$

24 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ B) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x-4\sqrt{x+3}}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-x-1}{\sqrt{x+2}-x}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 20} \frac{\sqrt{x+5}-5}{\sqrt{x-4}-4}$

25 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$ B) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2-x}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{2-\sqrt{2x}}$

26 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{x^2+3}-2}$ B) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x-3}}$

27 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}-2}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-x+1}$

28 υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ B) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{7}} \frac{x^2-\sqrt{7}x}{x^2-7}$
 E) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2-3x+8}}{2x^2-7x-4}$ Στ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

29 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-3x-10}{2(\sqrt{x+4}-3)}$ B) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-\sqrt{2x}}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ Γ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-10}{5-\sqrt{5x}}$

30 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x-3}}$ B) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-x+1}{x^2-9}$

31 Αν $f(x) = \begin{cases} 16-x^2 & x \neq 4 \\ 4-x & x = 4 \end{cases}$ τότε

- A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
 B) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο 4

ΚΕΦ1 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ – ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

32 Να βρείτε τις πρώτες παραγώγους των συναρτήσεων:

A) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 112$

B) $f(x) = x - \ln x$

Δ) $f(x) = 3 - 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

Στ) $f(x) = x^2\eta\mu x + e^x\eta\mu x$

H) $f(x) = \frac{xe^x}{x+1} + \alpha^2, \alpha \in \mathbb{R}$

Γ) $f(x) = x^2 \ln x$

E) $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$

Z) $f(x) = \frac{x^2(x+1)}{x^2+1}$

Θ) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

33 Να βρείτε τις πρώτες παραγώγους των συναρτήσεων:

A) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$

B) $f(x) = \frac{x - \ln x}{x^2 + 1}$

Γ) $f(x) = 3\eta\mu x \sigma\upsilon\nu\theta - 4x^2, \theta \in \mathbb{R}$

Δ) $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

E) $f(x) = x(x^2 + 1)(x^3 - 2x)$

Στ) $f(x) = \frac{x^2 + \alpha}{e^x}, \alpha \in \mathbb{R}$

Z) $f(x) = \frac{x\eta\mu x}{1 + \epsilon\varphi x}$

34 Να βρείτε τις πρώτες παραγώγους των συναρτήσεων:

A) $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x} + 1}$

B) $f(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^{4x}}$

Γ) $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + e)}$

Δ) $f(x) = \sqrt{\epsilon\varphi x}$

E) $f(x) = \frac{1}{3}\eta\mu^3 x - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 x$

Στ) $f(x) = x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$

Z) $f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu 2x)$

H) $f(x) = \ln(\ln x)$

35 Να βρείτε τις πρώτες παραγώγους των συναρτήσεων:

A) $f(x) = \eta\mu(2x) - \sigma\upsilon\nu(2x + 3)$

B) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$

Γ) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Δ) $f(x) = xe^{\left(\frac{1}{x}\right)}$

E) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

36 Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος των συναρτήσεων: $f(x) = x^3 \ln x$ και $g(x) = \ln(\eta\mu x)$

37 Να αποδείξετε ότι :

A) Αν $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ τότε $xf''(x) + 2f'(x) + xf(x) = 0$.

B) Αν $f(x) = e^x \eta\mu x$ τότε $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

Γ) Αν $f(x) = 2xe^{-x^2}$ τότε $\frac{f''(x)}{2x} + f'(x) + 4e^{-x^2} = 0$

38 Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο

\mathbb{R} και ισχύει: $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{e^x}, x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$f^2(x)(g'(x) - g(x)) = g^2(x)(f'(x) - f(x))$$

39 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x}$ να αποδείξετε

ότι $2f'(x) - f''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

40 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}, x \in \mathbb{R}$

A) Να αποδείξετε ότι $f''(x) = 4f(x)$

B) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + \frac{1}{2}f'(x) = 2e^{x^2}$

41 Αν $f(x) = e^{\lambda x}$, να υπολογιστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$f''(x) - 3f'(x) + f'(0)f(x) - 8f(x) = 0$$

42 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}$. Να

βρείτε: Τις τιμές του α , ώστε να ισχύει η σχέση

$$f''(x) + 2f'(x) = 3f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

43 Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ δευτέρου βαθμού

τέτοιου ώστε να είναι $P(0) = 1, P(1) = 6, P'(0) = -3$

44 Η θέση ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται συναρτήσει του χρόνου t από τον τύπο

$$S(t) = 3t^2 - t. \text{ Να βρείτε:}$$

A) Τη μέση ταχύτητα του κινητού στο $[2, 4]$

B) Τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού, όταν $t = 3$

45 Ένας πληθυσμός μικροβίων P μεταβάλλεται

συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες) σύμφωνα με τον

$$\text{τύπο } P(t) = 10^3 - 5 \cdot 10^2 (1+t)^{-1}$$

A) Να βρείτε τον αρχικό χρόνο αριθμό μικροβίων

B) Να βρείτε τον αριθμό των μικροβίων όταν

$$t = 9 \text{ h}$$

Γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού των μικροβίων ως προς το χρόνο, όταν $t = 9$ ώρες

ΚΕΦ1 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ – ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

46 Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στο άξονα $x'x$ όταν:

A) $f(x) = x^2 - 6x + 1$ B) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ Γ) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

47 Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

A) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x - \chi\sigma\upsilon\nu x}$ στο σημείο της με $x_0 = \pi$

B) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, στο σημείο της με τεταγμένη 1

Γ) $\varphi(x) = x^3 - 1$ στο σημείο της με τεταγμένη 7

Δ) $f(\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \sigma\phi\theta$ στο σημείο της με $\theta = \frac{\pi}{2}$

48 Αν $g(x) = -x^2 + ax - \beta \ln(x+1)$, $x > -1$, τότε να βρείτε τα α, β έτσι ώστε η γραφική παράσταση της g να έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα των x στα σημεία με τεταγμένες $x = 0, x = 1, 5$.

49 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$,

$x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f , που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = x + 3$.

50 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f , που σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία 135° .

51 Δίνεται η $f(x) = x^2 \ln x$. Να βρείτε :

A) Τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$, με τον άξονα $x'x$.

B) Το σημείο όπου η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στο $x'x$

Γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης στο $x_0 = 2$

52 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha(x+1)^2$,

$x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) το α ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $A(1, f(1))$ να είναι 4.

β) την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης

53 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha e^{-x} + \beta \sqrt{x+1}$

$x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

A) τα α, β ώστε η εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, 1)$ να είναι παράλληλη στην $y = 2x - 1$

B) την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης

54 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 10$

A) Να βρείτε τα σημεία όπου η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , έχει κλίση ίση με το ρυθμό μεταβολής της παραγώγου f' στα σημεία αυτά.

B) Στο σημείο (του α ερωτ.) με τη μικρότερη τεταγμένη να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης.

55 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2 - \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα α, β ώστε η $y = 3x - 1$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τεταγμένη 2.

56 Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης C_f της f με $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$ στα σημεία που τέμνει τους άξονες είναι παράλληλες

57 Έστω η συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 9x - 12$.

να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το σημείο $A(2, -10)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση C της f και η εφαπτομένη της C στο σημείο A να έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό -3 .

58 Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και είναι $f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in [0, \pi)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(0, f(0))$ σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες.

59 Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και είναι $f(1) = 2f'(1) = e$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γ.π. της $g(x) = f(\ln(x))$ στο $x_0 = e$

60 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x^2 + 4x) = x^3 + \ln x$. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(5, f(5))$.

61 Έστω η $f(x) = \ln(x^2 + 1)^2 + \alpha x + \beta$. Να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε η $y = 21x + 35$ να είναι εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$

62 Έστω τα σημεία $A(\ln x, 0)$ και $B(0, e^x)$, $x > 0$. Αν η $f(x)$ εκφράζει την απόσταση των σημείων A και B , να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$

MONOTONIA AKPOTATA

63 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα κάθε μια από τις συναρτήσεις:

A) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$

B) $g(x) = \frac{2x - x^2}{e^x}$

Γ) $f(x) = (2x - x^2)e^x, x \in \mathbb{R}$

Δ) $f(x) = x^2(1-x)^2$

E) $f(x) = x\sqrt{6-x}$

Στ) $f(x) = \frac{\ln x - 2}{x}, x \in [10, 100]$

64 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 e^{-x}$.

α) Να βρεθούν οι $f'(x)$, $f''(x)$.

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση f , ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατά της.

65 Δίνεται f η συνάρτηση με $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και την $f'(x)$

B) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

66 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x(x^2 - 5x + \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$

A) Να αποδείξετε ότι $f''(x) + f(x) = 2(f'(x) + e^x)$

B) Να βρείτε το α ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(1, f(1))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$.

Γ) Για την τιμή του α που βρήκατε, να μελετηθεί f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

67 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + 3, x \in \mathbb{R}, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

A) Να βρείτε τα κ, λ ώστε η f να έχει στη θέση $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο ίσο με -2 .

B) Για τις τιμές των κ, λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

68 Αν $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + \frac{1}{2}$ τότε

A) Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για του οποίους ισχύει $f'(-1) = f'(1) = 0$.

B) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 0$, τότε να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

69 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$, όπου α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι $2\sqrt{\alpha\beta}$.

70 Αν $V(r) = 100p(1 + \ln r) - 100qr$, όπου p και q θετικές σταθερές, να αποδείξετε ότι το V έχει τη μέγιστη τιμή του όταν $r = \frac{p}{q}$.

71 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{\alpha x} - \beta x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

A) Να βρείτε το α ώστε να ισχύει

$$4f'(x) - 4\beta(x-1) = 4f(x) + f''(x)$$

B) Να βρεθεί το β ώστε η εφαπτομένη της f στο σημείο $(0, f(0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γ) Για τις τιμές των α, β που βρήκατε να μελετηθεί η $f(x)$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

72 Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + x + 1$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

73 Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x \ln^2 x$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

74 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x - 2e^x$

A) Να βρείτε τα ακρότατά της

B) Να αποδείξετε την ανίσωση $1 + xe^{x-1} \geq 2e^{x-1}$

75 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x^2}{4x^2 + 5}$, όπου

$x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

A) το πεδίο ορισμού της

B) το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$,

Γ) τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατά της.

76 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x(x-\alpha) + \lambda, x \in \mathbb{R}, \kappa, \alpha, \lambda$ σταθερές.

A) Βρείτε το α ώστε $f'(1) = 1$

B) Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

Γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο.

Δ) Αν το ελάχιστο της f είναι το $2\lambda - 1$ βρείτε το λ

E) Βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(1, f(1))$.

Στ) Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f στο $x_0 = -1$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

77 Σώμα κινείται σε οριζόντιο άξονα ακολουθώντας τη συνάρτηση θέσης
 $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$ (t σε sec, x σε m)
 Α Ποια η αρχική ταχύτητα του σώματος;
 Β Ποια η ταχύτητα και η επιτάχυνση όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση 25m;
 Γ Πότε το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα. Ποια η θέση και η επιτάχυνση αυτής της χρονικής στιγμής;
 Δ. Ποιο διάστημα διένυσε το σώμα τα πρώτα 2sec της κίνησης του;

78 Οι συνολικές πωλήσεις ενός μοντέλου αυτοκινήτου δίνονται από τη συνάρτηση
 $f(t) = \frac{10000}{1 + e^{-t+10}} + 10$, όπου $t \in [0, 20]$ είναι ο χρόνος σε μήνες από την έναρξη των πωλήσεων. Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός αύξησης των συνολικών πωλήσεων γίνεται μέγιστος καθώς και τη μέγιστη τιμή του.

79 Μία βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης $\Pi(x)$ κάθε μονάδας προϊόντος συναρτήσει του πλήθους x των μονάδων παραγωγής σύμφωνα με τον τύπο: $\Pi(x) = 195 - \frac{x^2}{3}$ €. Το κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος είναι 20€ και επιπλέον η βιομηχανία πληρώνει φόρο 6 € για κάθε μονάδα προϊόντος. Να βρεθεί πόσες μονάδες προϊόντος θα πρέπει να παράγει η βιομηχανία ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

80 Ένα φορτηγό διανύει καθημερινά 100 km με σταθερή ταχύτητα x km/h. Τα καύσιμα κοστίζουν 0,8 € το λίτρο και καταναλώνονται με ρυθμό $2 + \frac{x^2}{400}$ lt/h. Αν τα υπόλοιπα έξοδα του φορτηγού ανέρχονται σε 9 € την ώρα, τότε:
 Α) να εκφράσετε το κόστος της διαδρομής αυτής ως συνάρτηση της ταχύτητας x ,
 Β) να βρείτε την ταχύτητα που πρέπει να έχει το φορτηγό, ώστε τα έξοδά του να είναι τα ελάχιστα,
 Γ) πόσα είναι τα ελάχιστα αυτά έξοδα;

81 Μια εταιρεία διαθέτει 20000 € για να περιφράξει ένα οικοπέδο σχήματος ορθογωνίου. Η πλευρά ΑΒ πρόκειται να κατασκευαστεί από υλικό που κοστίζει 6 €/m και οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ από υλικό που κοστίζει 5 €/m. Στην πλευρά ΓΔ θα κατασκευαστεί ένας τοίχος του οποίου το κόστος θα ανέλθει σε 4000 €. Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου ώστε να έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

82 Έχουμε δύο φάρμακα για την υπόταση των ενηλίκων. Η μεταβολή της πίεσης σε συνάρτηση με το χρόνο των δύο φαρμάκων είναι: $\pi_1(t) = te^{-t}$ και $\pi_2(t) = t^2e^{-t}$ $t \in [0, 12]$ (t σε ώρες). Ποιο από τα δύο φάρμακα δίνει τη μεγαλύτερη μέγιστη πίεση και ποιο φάρμακο φέρνει το αποτέλεσμα αυτό πιο γρήγορα;

83 Δίνεται η ευθεία $y = -2x - 3$. Να βρείτε το σημείο της ευθείας αυτής το οποίο απέχει από το σημείο Α(9,4) τη μικρότερη δυνατή απόσταση.

84 Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 82. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του γινομένου τους.

85 Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό $64m^2$ ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο.

86 Από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 24 cm να βρείτε εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

87 Να βρεθεί το πλησιέστερο σημείο της παραβολής $y = x^2$ στην ευθεία $y = 3x - 5$.

88 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο (3,4) και σχηματίζει με τους ημίαξονες Ox και Oy τρίγωνο ελαχίστου εμβαδού.

89 Η θέση ενός υλικού σημείου που βάλλεται, με φορά προς τα πάνω, από το έδαφος δίνεται από τον τύπο $y(t) = 5t(20 - t)$ (t ο χρόνος της κίνησης σε sec)
 Α) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου όταν $t = 11$ sec. Τι συμπεραίνετε για την κίνησή του τη στιγμή αυτή;
 Β) Να βρείτε την αρχική ταχύτητα του σημείου και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει.
 Γ) Σε ποια στιγμή το ύψος του είναι 375 m

90 Δίνεται ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 10 m του οποίου τα άκρα Α και Β ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντίστοιχα. Το σημείο Β κινείται με ταχύτητα $u = 2 \frac{m}{sec}$ και η θέση του στον άξονα Ox δίνεται από την συνάρτηση $S(t) = ut, t \in [0, 5]$ (t ο χρόνος σε sec)
 Α) Να βρεθεί το εμβαδό $E(t)$ του τριγώνου ΟΑΒ ως συνάρτηση του t
 Β) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του $E(t)$ τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του ΟΑ είναι 6 m;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- 91** Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = e^{ax^2+bx}$ με $a, b \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία: $A(1, e^3)$ και $B(-1, e)$, τότε:
- A) Να βρεθεί ο τύπος της
 B) Να βρεθεί το σημείο τομής της C_f με τον άξονα yy'
 Γ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο παραπάνω σημείο καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζει αυτή με τους άξονες.
 Δ) Αποδείξτε ότι $f''(x) = f'(x) \cdot (4x+1)^2 + 4 \cdot f(x)$
 E) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης για $x = 2$

- 92** Μια αυτοκινητοβιομηχανία υπολόγισε ότι η σχέση μεταξύ της τιμής T ενός νέου μοντέλου αυτοκινήτου και της ζητούμενης ποσότητας x αυτοκινήτων του μοντέλου αυτού δίνεται από τη συνάρτηση: $T(x) = -0,2x + 4000$ € για $0 \leq x \leq 1000$
- A) Να βρεθεί η συνάρτηση $E(x)$ των εσόδων της αυτοκινητοβιομηχανίας
 B) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης εσόδων
 Αν το κόστος των x μονάδων αυτοκινήτου που παράγονται, δίνεται από τη σχέση:
 $K(x) = 950x + 250000$ € για $0 \leq x \leq 10000$
- Γ) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση κέρδους P
 Δ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης κέρδους
 E) Για ποια x έχει η αυτοκινητοβιομηχανία το μέγιστο κέρδος.

- 93** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(2x)$. Να βρείτε:
- A) Τα σημεία όπου η C_f τέμνει τους άξονες
 B) Να βρεθεί το διαστήμα στο οποίο η C_f είναι πάνω από την ευθεία $y=e$
 Γ) Να βρεθεί η $f'(x)$
 Δ) Να βρεθεί το $f'\left(\frac{e}{2}\right)$
 E) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{2}{e}x + 3$

- 94** Έστω η συνάρτηση $f(x) = 1 + x^2 \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$
- A) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
 B) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f .

- 95** Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα πάνω σε άξονα ώστε η θέση του την τυχαία χρονική στιγμή t (σε sec) να δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 - 12t^2 + 45t$ σε μέτρα (m). Να βρείτε:
- A) την ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t
 B) τις χρονικές στιγμές που το σώμα είναι ακίνητο
 Γ) την απόσταση των θέσεων του σώματος όταν αυτό είναι ακίνητο.

- 96** Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = e^{-3x} + 1$
- A) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:
 $f''(x) + 2f'(x) - 3f(x) + 3$
 B) Να υπολογίσετε το $f'(-1)$
 Γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη C_f , στο σημείο της με τετμημένη -1

- 97** Αν η εφαπτομένη (ϵ) στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $x - y + 2 = 0$ τότε:
- A) Να βρείτε τον $f'(1)$
 B) Να αποδείξετε ότι η (ϵ) εφάπτεται στη C_g με $g(x) = f(x^2 + x + 1) - 1$ στο σημείο της $B(0, g(0))$

- 98** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ και $g(x) = x^2 - ax + \beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
- A) την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$
 B) τα a, β ώστε η (ϵ) να εφάπτεται στη C_g στο σημείο της $B(2, g(2))$.

- 99** Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(\sqrt{x}) + \sqrt{f(x)}$, $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \in (0, +\infty)$, $f(2) = f'(2) = f(4) = f'(4) = 4$.
- A) Αν η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ): $y = 1$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $B(1, g(1))$, είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
 B) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία εφάπτεται στη C_g της g στο σημείο $\Gamma(4, g(4))$.

ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

100 ΝΑ ΣΥΜΠΛΗΡΩΘΟΥΝ ΟΙ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΠΙΝΑΚΕΣ

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
1	12		
2			
3	24		40
5		0,05	
ΑΘΡ			

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
1	12	0,20	20
2	21	0,35	35
3	24	0,40	40
5	3	0,05	5
ΑΘΡ	60	1	100

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
-5		0,05	
-3			
0			40
1	8	0,2	
ΑΘΡ			

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
-5	2	0,05	5
-3	14	0,35	35
0	16	0,40	40
1	8	0,2	20
ΑΘΡ	40	1	100

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
2	20					
3	10					
4	15					
6	5					
ΑΘ						

x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
2	20	20	0,40	0,40	40	40
3	10	30	0,20	0,60	20	60
4	15	45	0,30	0,90	30	90
6	5	50	0,10	1	10	100
ΑΘ	50		1		100	

ΠΙΝΑΚΑΣ 4

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	F_i
-1			4	0,1
0		30		
2				
3	6			
ΑΘΡ	40			

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	F_i
-1	4	10	4	0,1
0	12	30	16	0,4
2	18	45	34	0,85
3	6	15	40	1
ΑΘΡ	40	100		

ΠΙΝΑΚΑΣ 5

x_i	v_i	f_i	N_i	$F_i\%$
2				20
5		0,4		
7	12			
8			60	
ΑΘΡ				

x_i	v_i	f_i	N_i	$F_i\%$
2	12	0,2	12	20
5	24	0,4	36	60
7	12	0,2	48	80
8	12	0,2	60	100
ΑΘΡ	60	1		

ΠΙΝΑΚΑΣ 6

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
0						10
10		0,15				
20					0,60	
30	5					
40				20		
ΑΘ						

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
0	2	0,10	10	2	0,10	10
10	3	0,15	15	5	0,25	25
20	7	0,35	35	12	0,60	60
30	5	0,25	25	17	0,85	85
40	3	0,15	15	20	1	100
ΑΘ	20	1	100			

ΠΙΝΑΚΑΣ 7

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1						10
2	4	0,20	6			
3				0,60		
4					25	
5	2					
6						
Σ						

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	2	0,10	2	0,10	10	10
2	4	0,20	6	0,30	20	30
3	6	0,30	12	0,60	30	60
4	5	0,25	17	0,85	25	85
5	2	0,10	19	0,95	10	95
6	1	0,05	20	1,00	5	100
Σ	20	1,00			100	

101 Σε μια τάξη Λυκείου :

Οι 20 μαθητές έχουν κανένα ή 1 ή 2 ή 3 ή 4 αδέρφια

Οι 18 έχουν τουλάχιστον 1 αδερφό

Οι 19 έχουν το πολύ 3 αδέρφια

Πέντε οικογένειες των μαθητών έχουν 3 ή 4 παιδιά

Το 15% των οικογενειών των μαθητών έχουν 4 τουλάχιστον παιδιά

Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων: $v_i, f_i, f_i\%, N_i, F_i, F_i\%$

102 Σε μια πόλη η μικρότερη θερμοκρασία επί 20 συνεχείς ημέρες ήταν 10, 11, 15, 13 και 16

18 ημέρες είχαν θερμοκρασία το πολύ 15

Το 85% του πλήθους των ημερών η θερμοκρασία ήταν τουλάχιστον 11

Το πλήθος των ημερών που είχαν θερμοκρασία 13 ήταν διπλάσιο του πλήθους των ημερών που είχαν 11

Το 55% του πλήθους των ημερών η θερμοκρασία ήταν 13 ή 15

Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων: $v_i, f_i, N_i, F_i, f_i\%, F_i\%$

103 Έστω x_1, x_2, \dots, x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής X ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n και

$$f_i = \frac{1}{2(i-1)}, \quad i=2,3,4 \quad \text{να βρεθεί η } f_1 \quad (\text{Απ.1/12})$$

104 Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος. Αν $f_1 = 2f_2 = 3f_3 = 4f_4$ να βρείτε τις f_1, f_2, f_3, f_4

$$(\text{Απ. } 12/25, 12/50, 12/75, 12/100)$$

105 Έστω x_1, x_2, x_3 οι τιμές μιας μεταβλητής X ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n

A) Αν $v_i = i^2 + 2i, i=1,2,3$ να βρεθεί ο n

B) Αν $f_i = \frac{1}{i^2 - 1}, i=2,3$ να βρεθεί την f_1 (ΑΠ.26, 13/24)

106 Έστω x_1, x_2, \dots, x_5 με $x_1 < x_2 < \dots < x_5$ οι τιμές μιας μεταβλητής X ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα

μεγέθους n . Αν ισχύει $f_i = \frac{i}{2k}, i=1,2,\dots,5$

A) Να βρεθεί ο k

B) Για $k = \frac{15}{2}$ να βρείτε την $F_3\%$

Γ) Αν $N_3 = 30$ να βρείτε το μέγεθος του δείγματος. (ΑΠ.15/2,2/5, 75)

107 Έστω x_1, x_2, \dots, x_5 με $x_1 < x_2 < \dots < x_5$ οι τιμές μιας μεταβλητής X ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα

μεγέθους n . Αν ισχύει $F_i\% = \frac{i}{k}, i=1,2,\dots,5$

A) Να βρεθεί ο k

B) Για $k = \frac{1}{20}$ να βρείτε την f_2

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

108 Η βαθμολογία μιας ομάδας φοιτητών σε ένα μάθημα φαίνεται στο διπλανό πίνακα. Να κάνετε το διάγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων

Βαθμός	Πλήθος φοιτητών
4	2
5	3
6	7
7	5
8	3

109 Στο διπλανό πίνακα φαίνονται τα βιβλία που έχει μια βιβλιοθήκη. Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα συχνοτήτων και κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων

Είδος βιβλίων	Πλήθος βιβλίων
Ιστορικά	2
Λογοτεχνικά	30
Μαθηματικά	36
Ταξιδιωτικά	24
Εγκυκλοπαιδικά	18

110 Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνονται οι εξαγωγές της χώρας μας αξίας 97.000.000 euro κατά το έτος 1980 ανάλογα με το μέσο μεταφοράς. Η γωνία του κυκλικού τομέα για μέσο μεταφοράς “θαλασσίως” είναι 180° . Το 14% της αξίας των εξαγωγών έγινε “σιδηροδρομικώς”. Οι μεταφορές που έγιναν “οδικώς” ήταν τετραπλάσιες σε αξία από αυτές που έγιναν “αεροπορικώς”. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

111 Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται το μορφωτικό επίπεδο των 400 εργαζομένων μιας επιχείρησης σε τέσσερις κατηγορίες.

A' Κατηγορία: Απόφοιτοι Γυμνασίου

B' Κατηγορία: Απόφοιτοι Λυκείου

Γ' Κατηγορία: Πτυχιούχοι Ανωτάτης Εκπαίδευσης

Δ' Κατηγορία: Κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου . Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνον από τις κατηγορίες αυτές.

Στην A' κατηγορία ανήκει το 25% των εργαζομένων της επιχείρησης. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Δ' κατηγορίας είναι 18° . Οι εργαζόμενοι της επιχείρησης της B' κατηγορίας είναι εξαπλάσιοι των εργαζομένων της Γ' κατηγορίας.

A. Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων κάθε κατηγορίας.

B. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

112 Σε ένα κυκλικό διάγραμμα, παριστάνεται το χρώμα μαλλιών 900 ατόμων. Το 30% των ατόμων έχουν μαύρα μαλλιά. Η γωνία του κυκλικού τομέα για τα καστανά μαλλιά είναι $\alpha_3 = 144^\circ$. Τα άτομα με ξανθά μαλλιά είναι διπλάσια από αυτά με κόκκινα μαλλιά. Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα και να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

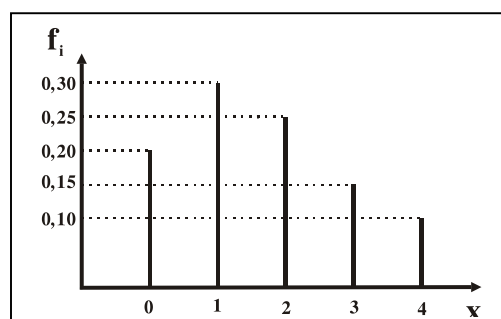
Χρώμα μαλλιών	V_i	$f_i\%$	α_i
Κόκκινα			
Μαύρα			
Καστανά			
Ξανθά			
Σύνολο:			

113 Ο αριθμός των ετήσιων επισκέψεων ενός δείγματος 80 μαθητών μιας περιοχής στα διάφορα μουσεία της χώρας δίνεται από το διπλανό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων. Για το ανωτέρω δείγμα βρείτε:

A πόσοι μαθητές κάνουν ακριβώς μία επίσκεψη ετησίως,

B το ποσοστό επί τοις εκατό των μαθητών που κάνει ακριβώς δύο επισκέψεις ετησίως,

Γ το ποσοστό επί τοις εκατό των μαθητών που κάνει δύο τουλάχιστον επισκέψεις ετησίως.



ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

114 Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες στους οποίους έχουμε ομαδοποιήσει τρία δείγματα σε κλάσεις ίσου πλάτους

Κλάσεις [..-..)	x_i
...-...	6
...-...	...
...-...	...
...-...	18

Κλάσεις [..-..)	x_i
5-..	
..-..	
...-23	
..-..	

Κλάσεις [..-..)	x_i
...-....	...
...-...	11
...-...	...
17-...	...

115 Η βαθμολογία 40 μαθητών σε ένα διαγώνισμα φαίνεται στο διπλανό πίνακα:

Βαθμός [,)	μαθητές
[0,4)	4
[4,8)	8
[8,12)	16
[12,16)	10
[16,20)	2

A) Να κατασκευάσετε:

- α) Τον πίνακα με τις συχνότητες: $f_i\%$, $F_i\%$
- β) Το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων

B) Να βρείτε το βαθμό κάτω από το οποίο έχει:

- α) Το 30% των μαθητών
- β) Το 20% των μαθητών
- γ) Το 40% των μαθητών.

Γ) Το ποσοστό των μαθητών που έχει γράψει:

- α) Κάτω από 16
- β) κάτω από 11
- γ) Τουλάχιστον 14

Απ.: ια) 8 ιβ) 6 ιγ) 9 ιια) 95 ιιβ) 60 ιιγ) 17,5

116 Στο σχήμα έχουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων της βαθμολογίας των μαθητών της Α Λυκείου σε ένα διαγώνισμα ιστορίας.

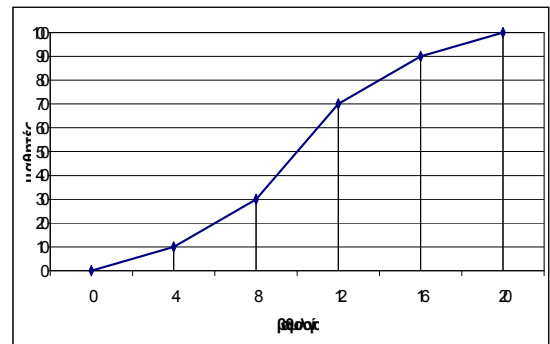
Να βρείτε:

i) Το βαθμό κάτω από τον οποίο πήρε:

- α) το 70% των μαθητών
- β) το 50% των μαθητών
- γ) το 30% των μαθητών

ii) Το ποσοστό των μαθητών που πήρε βαθμό:

- α) μέχρι 18
- β) μέχρι 13



117 Στο σχήμα είναι το πολύγωνο συχνοτήτων των ομαδοποιημένων πωλήσεων σε δεκάδες χιλιάδες euro που έγιναν από τους πωλητές μια εταιρείας στη διάρκεια ενός έτους.

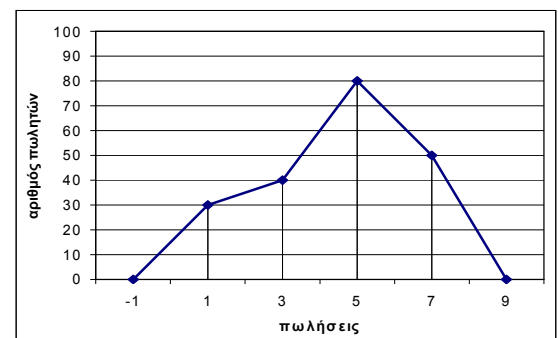
i) Πόσοι είναι οι πωλητές

ii) Να κατασκευάσετε:

- α) το ιστόγραμμα συχνοτήτων
- β) το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$

iii) Πόσοι πωλητές έκαναν πωλήσεις κάτω από:

- α) 60000 euro;
- β) 50000 euro;
- γ) 45000 euro;



Απ.: i) 200 iiα) 150 iiβ) 110 iiγ) 90

118 Το πολύγωνο συχνοτήτων μιας ομαδοποιημένης κατανομής με 5 ισοπλάτεις κλάσεις αποτελείται από τις ευθείες $y = x - 1$ και $y = -x + 13$

- A) Να βρεθεί το πλήθος του δείγματος.
- B) Να βρεθεί το πλάτος και τα άκρα κάθε κλάσης.
- Γ) Να βρεθεί η συχνότητα κάθε κλάσης.

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

119 Η βαθμολογία μιας ομάδας φοιτητών σε ένα μάθημα φαίνεται στο διπλανό πίνακα. Να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών.

ΑΠ: $\bar{x} = 5,85$

Βαθμολογία	Φοιτητές %
4	10
5	30
6	35
7	15
8	10

120 Οι χρόνοι που χρειάστηκαν κάποιοι μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα φαίνονται στον διπλανό πίνακα. Να βρείτε το μέσο χρόνο λύσης του προβλήματος
ΑΠ: $\bar{x} = 6,1$

Χρόνος	Μαθητές
[0,4)	12
[4,8)	15
[8,12)	13

121 Οι χρόνοι που κάνουν οι μαθητές ενός σχολείου να πάνε από το σπίτι στο σχολείο είναι από 4 έως 20 λεπτά. Το 20% κάνει χρόνους κάτω από 8 λεπτά το 50% κάνει χρόνους κάτω από 12 λεπτά και το 15% τουλάχιστον 16 λεπτά. Να βρείτε το μέσο χρόνο των μαθητών.
ΑΠ: $\bar{x} = 11,8$

122 Στο διπλανό πίνακα φαίνεται η βαθμολογία 20 φοιτητών σε ένα μάθημα. Να βρείτε τα α , β αν η μέση βαθμολογία είναι 5,9

ΑΠ: $\alpha = 6$ και $\beta = 4$

Βαθμός	Φοιτητές
4	2
5	α
6	8
8	β

123 Μια βιοτεχνία έχει 10 εργαζόμενους με μέσο μηνιαίο μισθό 1200 € .

A) Να βρείτε το μέσο μισθό όταν:

- α) ένας εργαζόμενος με 1200 € μισθό πάρει σύνταξη.
- β) προσληφθούν δύο εργαζόμενοι ακόμη με μισθό 850 € ο καθένας.
- γ) πάρει σύνταξη ένας με μισθό 1190 € και προσληφθούν τρεις με μισθό 850 € ο καθένας

B) Αν προσληφθεί ένας εργαζόμενος, ποιος πρέπει να είναι ο μηνιαίος μισθός του ώστε ο μέσος μηνιαίος μισθός όλων να είναι 1210 €
ΑΠ: 1200, 1141,66, 1113,33, 1310

124 Σε 20 παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X βρήκαμε μέση τιμή $\bar{x} = 60$. Διαπιστώθηκε όμως στο τέλος ότι οι 10 παρατηρήσεις από αυτές είχαν εσφαλμένα υπερεκτιμηθεί κατά 5 μονάδες κάθε μια ενώ οι 9 από τις υπόλοιπες είχαν υποεκτιμηθεί κατά 10 μονάδες η κάθε μια. Να βρείτε τη σωστή μέση τιμή των παρατηρήσεων αυτών.

125 Μια τάξη έχει 12 αγόρια και άγνωστο αριθμό κοριτσιών. Σε ένα διαγώνισμα η μέση τιμή των βαθμών των αγοριών ήταν 14, ενώ των κοριτσιών ήταν 14,875. Αν η μέση τιμή των βαθμών όλων των παιδιών ήταν 14,5, να βρεθεί το πλήθος των κοριτσιών.

126 Σε μια επιχείρηση είναι 50 εργαζόμενοι στα τμήματα A και B. Οι εργαζόμενοι στο τμήμα A πήραν αύξηση στο μηνιαίο μισθό 100 € ο καθένας, ενώ στο τμήμα B πήραν αύξηση στο μισθό, 50 € ο καθένας. Αν η μέση τιμή όλων των μηνιαίων μισθών αυξήθηκε κατά 70 €, να βρείτε πόσοι είναι οι εργαζόμενοι του κάθε τμήματος.

127 Σε μια εταιρία οι 200 υπάλληλοι έχουν μέσο μισθό 2500 €.

- A) Το 20% των υπαλλήλων έχει μέσο μισθό 1800 € .Αν ο μισθός αυτών των υπαλλήλων αυξηθεί ώστε να γίνει ίσος με τη μέση τιμή, ποια θα είναι η νέα μέση τιμή του μισθού;
- B) Για λόγους μείωσης του κόστους απολύεται το 15% των υπαλλήλων της εταιρίας. Οι υπάλληλοι αυτοί έχουν μέσο μηνιαίο μισθό 2800 € . Να βρεθεί η νέα μέση τιμή του μισθού .
- Γ) Αν σε όλους τους υπάλληλους δοθεί αύξηση 3,5% ποια η νέα μέση τιμή του μισθού;

128 Ένα εργοστάσιο απασχολεί 5 υπαλλήλους στο Τμήμα A με μέσο μηνιαίο μισθό 2490 €, 6 υπαλλήλους στο Τμήμα B με μέσο μηνιαίο μισθό 2800 € και 4 υπαλλήλους στο Τμήμα Γ με μέσο μηνιαίο μισθό 3600 €. Να βρεθεί ο μέσος μηνιαίος μισθός όλων των υπαλλήλων .
Αν προσληφθούν 2 υπάλληλοι στο Τμήμα A, 4 στο Τμήμα Γ και οι μέσες τιμές των μισθών στα δύο αυτά τμήματα δεν μεταβληθούν, να βρεθεί η νέα μέση τιμή .

129 Η μέση τιμή 100 αριθμών είναι 24 και η μέση τιμή των 60 πρώτων από αυτούς είναι 16. Να βρεθεί η μέση τιμή των υπολοίπων.;

130 Σε ένα Λύκειο τα τρία τμήματα της Πρώτης Τάξης έχουν: Το πρώτο 25 μαθητές και μέση βαθμολογία 17,5 το δεύτερο 27 μαθητές και μέση βαθμολογία 18,2 το τρίτο 23 μαθητές και μέση βαθμολογία 17,1 Να βρεθεί η μέση βαθμολογία των μαθητών της Πρώτης τάξης (απ: 17,63)

131 Ο μέσος όρος βαθμολογίας 1^{ου} τετραμήνου 20 μαθητών ενός τμήματος στη στατιστική είναι 14,4. Επειδή συγκριτικά με τους μέσους όρους άλλων μαθημάτων η βαθμολογία θεωρήθηκε χαμηλή, ο καθηγητής αποφάσισε να δώσει μια μονάδα σε όλους τους μαθητές, εκτός από δυο μαθητές που είχαν εικοσάρια. Ποια είναι τώρα η νέα μέση τιμή της βαθμολογίας

132 Οι αριθμοί $\alpha, \beta, 17, \gamma$ έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά και είναι οι βαθμοί ενός μαθητή σε τέσσερα διαγωνίσματα. Δίνεται ότι το εύρος των βαθμών είναι 2, η διάμεσος και η μέση τιμή 16.

A) Να βρείτε τους βαθμούς του μαθητή.

B) Αν οι συντελεστές βαρύτητας των βαθμών είναι 0,5 0,7 1 και 0,8 αντίστοιχα να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών του μαθητή.

133 Η μέση τιμή των παρατηρήσεων t_1, t_2, \dots, t_v μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους v είναι \bar{x} . Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των παρατηρήσεων:

A) $t_1 + \lambda, t_2 + \lambda, \dots, t_v + \lambda$

B) $t_1 - \lambda, t_2 - \lambda, \dots, t_v - \lambda$

Γ) $\lambda t_1, \lambda t_2, \dots, \lambda t_v$

Δ) $\frac{t_1}{\lambda}, \frac{t_2}{\lambda}, \dots, \frac{t_v}{\lambda}, (\lambda \neq 0)$

E) $\lambda t_1 + \kappa, \lambda t_2 + \kappa, \dots, \lambda t_v + \kappa$

134 Σ' ένα Λύκειο φοιτούν 300 μαθητές και η μέση βαθμολογία τους στα Μαθηματικά στο Α' τετράμηνο ήταν 15. Στο Β' τετράμηνο, ένας ορισμένος αριθμός μαθητών αύξησε τη βαθμολογία του κατά 4 μονάδες ο καθένας, ενώ οι υπόλοιποι μείωσαν τη βαθμολογία τους κατά 2 μονάδες ο κάθε μαθητής. Να βρείτε πόσοι μαθητές βελτίωσαν τη βαθμολογία τους και πόσοι την χειροτέρευσαν, αν γνωρίζουμε ότι η μέση βαθμολογία όλων στο Β' τετράμηνο έγινε 17.

135 Ένα δείγμα έχει μέγεθος $v = 8$, $\sum_{i=1}^8 (2x_i + 6) = 752$ και $S = 2$. Να βρείτε η \bar{x} και το $\sum_{i=1}^8 x_i^2$.

136 Αν είναι $\sum_{i=1}^5 x_i = 3$ και $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 23$, να υπολογίσετε τα αθροίσματα: α) $\sum_{i=1}^5 (x_i + 10)$ β) $\sum_{i=1}^5 (2x_i + 3)^2$

137 Στη διπλανή κατανομή να υπολογίσετε τη μέση τιμή	x_i	v_i
	3	3
	4	2
	5	
	9	2

138 Να υπολογίσετε το πλήθος v των παρατηρήσεων $x_1 = \ln 2, x_2 = \ln \frac{3}{2}, x_3 = \ln \frac{4}{3}, \dots, x_v = \ln \frac{v+1}{v}$, αν η μέση τιμή τους είναι $\bar{x} = \frac{\ln 2004}{v}$

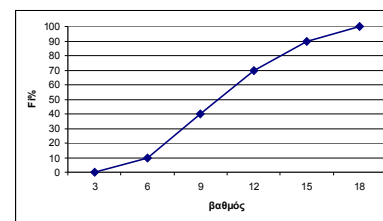
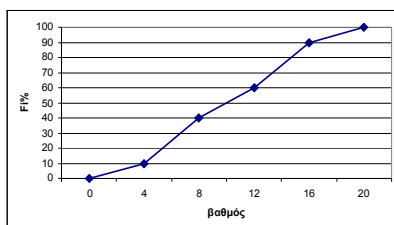
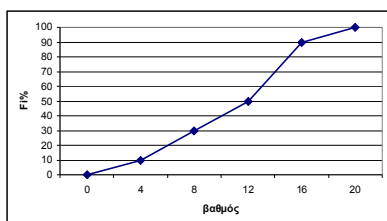
ΔΙΑΜΕΣΟΣ

139 Να βρείτε τη διάμεσο στα δείγματα A: -2, 0, 2, 4, 3, 10, 12 , B: 3, 5, 8, 9, 11, 12, 14, 18

140 Να βρείτε τη διάμεσο των χρόνων σε λεπτά που χρειάστηκαν για να λύσουν ένα πρόβλημα οι μαθητές των τεσσάρων τμημάτων της Α τάξης, που φαίνονται στους παρακάτω πίνακες.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1		ΠΙΝΑΚΑΣ 2		ΠΙΝΑΚΑΣ 3		ΠΙΝΑΚΑΣ 4	
Χρόνος	Μαθητές	Χρόνος	Μαθητές	Χρόνος	Μαθητές	Χρόνος	Μαθητές
8	5	8	7	8	30	8	30
9	7	9	6	9	25	9	20
10	8	10	10	10	35	10	40
11	7	11	3	11	10	11	10

141 Να βρείτε τη διάμεσο των βαθμών των μαθητών της Α' Λυκείου του κάθε τμήματος που πήραν σε ένα διαγώνισμα αν τα πολύγωνα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων είναι τα παρακάτω:



142 Αν η μέση τιμή πέντε αριθμών είναι διπλάσια της διαμέσου δ με $0 < \delta < 5$ και οι τέσσερις από αυτούς είναι οι 0, 1, 5, 21, να βρείτε τον πέμπτο αριθμό.

143 Στο διπλανό πίνακα φαίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες αθροιστικές σχετικές συχνοτήτες τους. Να βρείτε τους α , β , γ αν η διάμεσος είναι 6 και η μέση τιμή 5,5

x_i	$F_i\%$
2	10
3	30
5	α
7	β
9	γ

ΑΠ: 50,90,100

144 Η διάμεσος 5 αριθμών είναι 6. Αν ο ένας από τους αριθμούς αλλάξει ο διάμεσος γίνεται 7. Ποιος είναι ο αριθμός που άλλαξε;

145 Ο διάμεσος βαθμός σε τρία τεστ είναι 90, ο μέσος βαθμός 92 και το εύρος 6. Να βρεθούν οι τρεις βαθμοί.

146 Σ' ένα τεστ πήραν μέρος 100 μαθητές προκειμένου ο καθένας να απαντήσει σε 200 ερωτήσεις. Η βαθμολογία είναι 1 ή 0, ανάλογα αν ο μαθητής απαντάει ή όχι στην ερώτηση. Ο επόμενος πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα της βαθμολογίας

Βαθμοί	Συχνότητα
[60,80)	5
[80,100)	20
[100,120)	26
[120,140)	30
[140,160)	15
[160,180)	4

- A) Να εκτιμήσετε γραφικά τη διάμεσο.
- B) Να εκτιμήσετε το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν από: 80 έως 110.

147 Η διάμεσος 5 αριθμών είναι 6. Αν ο ένας από τους αριθμούς αλλάξει ο διάμεσος γίνεται 7. Ποιος είναι ο αριθμός που άλλαξε;

148 Αν οι παρατηρήσεις του δείγματος 4, 8, 3, α , $\bar{x}, 24 - 2\bar{x}, 5$ έχουν $\delta = 8$ να βρείτε την μέση τιμή \bar{x} και το α

149 Το μέσο ύψος των 30 μαθητών και μαθητριών μιας τάξης είναι 170 cm. Υποθέτουμε ότι κανένας μαθητής δεν έχει ανάστημα μικρότερο των 160 cm. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος του δείγματος δεν υπερβαίνει τα 180 cm.

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

150 Οι ελάχιστες θερμοκρασίες σε μια πόλη για πέντε συνεχείς ημέρες ήταν: $-5, -3, 0, -3, 1$. Να βρείτε το εύρος, την διακύμανση και την τυπική απόκλιση.

151 Η βαθμολογία μιας ομάδας φοιτητών σε ένα μάθημα φαίνεται από τον διπλανό πίνακα. Να βρείτε το εύρος, την διασπορά και την τυπική απόκλιση.

Βαθμολογία	Φοιτητές
5	4
6	5
7	10
8	1
Χρόνος	Μαθητές
[1,3)	6
[3,5)	8
[5,7)	4
[7,9)	2

152 Οι χρόνοι αναμονής σε στάση λεωφορείων 20 ατόμων φαίνεται στο διπλανό πίνακα. Να βρείτε την τυπική απόκλιση.

153 Ένα δείγμα μεγέθους $n = 35$ έχει μέση τιμή \bar{x} και τυπική απόκλιση s . Παίρνουμε την μέση τιμή ως μία νέα τιμή της μεταβλητής και δημιουργούμε ένα δείγμα μεγέθους $n = 36$. Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του νέου δείγματος.

154 Έστω t_1, t_2, \dots, t_{100} οι τιμές μιας μεταβλητής. Οι πρώτες 20 παρατηρήσεις έχουν μέση τιμή $\bar{x}_1 = 10$ με τυπική απόκλιση $s_1 = 2$, ενώ οι υπόλοιπες έχουν μέση τιμή $\bar{x}_2 = 20$ και τυπική απόκλιση $s_2 = 5$. Να βρείτε:

- A) τη μέση τιμή του συνόλου,
B) την τυπική απόκλιση s του συνόλου.

155 Ρωτήθηκαν 40 μαθητές ενός Λυκείου πόσα λογοτεχνικά βιβλία έχουν διαβάσει. Οι απαντήσεις κομμάινονταν από 0 έως και 20. Οκτώ μαθητές απάντησαν κάτω από 4, είκοσι μαθητές κάτω από 8, τέσσερις μαθητές πάνω από 16 και δέκα πάνω από 12.

- A) Να παραστήσετε τα δεδομένα σε ένα πίνακα συχνοτήτων
B) Να υπολογίσετε μέση τιμή, διάμεσο και τυπική αποκλιση
Γ) Αν για τους 2 που διαβάζουν ποιο πολύ τους δοθεί μια λογοτεχνική σειρά δωρεάν, πόσα τουλάχιστον βιβλία πρέπει να έχει διαβάσει κάποιος για να κερδίσει;

156 Η μέση τιμή και η διακύμανση των 20 τιμών ενός δείγματος είναι $\bar{x} = 6$ και $s^2 = 4$, αντίστοιχα. Αν για τις δεκαεννέα τιμές ισχύει $\sum_{i=1}^{19} (x_i - \bar{x})^2 = 79$, να βρεθεί η εικοστή τιμή.

157 Αν για ένα σύνολο παρατηρήσεων ισχύει ότι $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 88$, $s = \sqrt{7}$, $\bar{x} = 2$, να βρεθεί το n

158 Η μέση τιμή και η διασπορά των 7 τιμών ενός δείγματος είναι $\bar{x} = 15$ και $S^2 = 16$. Αν ισχύει $(t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + (t_3 - \bar{x})^2 + (t_4 - \bar{x})^2 + (t_5 - \bar{x})^2 + (t_6 - \bar{x})^2 = 12$, να βρεθεί η τιμή t_7 .

159 Η τυπική απόκλιση μιας μεταβλητής X είναι ίση με το μηδέν. Αν t_1, t_2, \dots, t_n είναι οι τιμές της x και \bar{x} η μέση τιμή, δείξτε ότι $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \bar{x}$.

160 Θεωρούμε α_1 το πλήθος αριθμών που έχουν διακύμανση s_1^2 και μέση τιμή \bar{x} . Όμοια θεωρούμε α_2 το πλήθος αριθμών που έχουν διακύμανση s_2^2 και την ίδια μέση τιμή \bar{x} . Να αποδείξετε ότι:

A. Η μέση τιμή των $\alpha_1 + \alpha_2$ αριθμών είναι \bar{x}

B. Η διακύμανση s^2 των $\alpha_1 + \alpha_2$ είναι: $s^2 = \frac{\alpha_1 s_1^2 + \alpha_2 s_2^2}{\alpha_1 + \alpha_2}$

CV

161 Σε ένα δείγμα ισχύει ότι $\bar{x} + 4s = 0$. Να βρείτε το συντελεστή μεταβλητότητας.

162 Ένα σύρμα μήκους $\ell = 20$ cm κόβεται σε δέκα κομμάτια με μήκη $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{10}$. Αν $\sum_{i=1}^{10} (\ell_i - 2)^2 = 90$, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{10}$.

163 Οι βαθμοί των μαθητών ενός τμήματος έχουν μέση τιμή 12 και $CV = 0,25$. Αν $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 3060$ πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος;

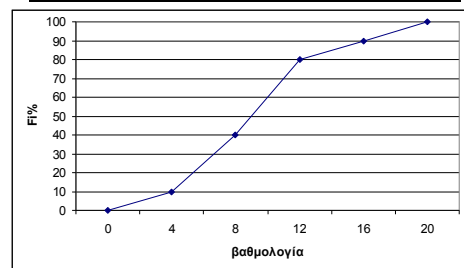
164 Στο διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή της ηλικίας ενός δείγματος ατόμων μια πόλης. Να βρείτε

- A) τη διάμεσο και τη μέση τιμή
- B) το πλήθος των ατόμων που έχει ηλικία κάτω από 36 έτη.
- Γ) την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής

Ηλικία [...]	Συχνότητα
0 – 20	18
20 – 40	24
40 – 60	30
60 – 80	36
80 – 100	12

165 Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων της βαθμολογίας μιας ομάδας μαθητών σε ένα μάθημα. Η βαθμολογία κυμαίνεται από 0 έως 20. Δίνεται ότι 20 μαθητές έχουν βαθμό μικρότερο του 6.

- A) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι 80
- B) Να βρείτε τη διάμεσο.
- Γ) Να εξετάσετε αν το δείγμα των 80 μαθητών είναι ομοιογενές ως προς την βαθμολογία.



166 Δίνεται ο πίνακας συχνοτήτων

x_i	v_i
0	6
1	κ
2	6
3	6
4	8

- A) Εάν η μέση τιμή του δείγματος είναι $\bar{x} = 2$ δείξτε ότι $\kappa = 10$.
- B) Να βρείτε την τυπική απόκλιση της κατανομής.
- Γ) Να βρείτε τον συντελεστή μεταβλητότητας
- Δ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή c κατά την οποία πρέπει να αυξηθούν οι παρατηρήσεις ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

167 Σε μια εταιρεία ο μηνιαίος μισθός των εργατών είναι 750 ευρώ ενώ των στελεχών είναι 1100 ευρώ.

A. Αν οι εργάτες είναι τετραπλάσιοι σε αριθμό από τα στελέχη της εταιρείας, να βρείτε το μέσο μισθό των υπαλλήλων (εργατών και στελεχών) της εταιρείας.

B. Θεωρούμε ότι η εταιρεία έχει n υπαλλήλους με μισθούς x_i , όπου $i = 1, 2, \dots, n$.

α) Αν η τυπική απόκλιση των μισθών είναι 140 ευρώ και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 34600000 ευρώ, τότε να βρείτε τον αριθμό των υπαλλήλων που απασχολεί η εταιρεία.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ομοιογένεια στους μισθούς των υπαλλήλων.

γ) Η εταιρεία αποφασίζει να αυξήσει κατά a ευρώ τους μισθούς των εργατών, έτσι ώστε ο νέος μέσος μισθός των υπαλλήλων, να μην υπερβαίνει τα 900 ευρώ. Να βρείτε την μέγιστη αύξηση, που μπορεί να κάνει η εταιρεία.

168 Η Γ' τάξη ενός λυκείου έχει δύο τμήματα A και B. Το τμήμα A έχει 18 μαθητές και το τμήμα B έχει 22 μαθητές. Σε ένα κοινό διαγώνισμα, η τυπική απόκλιση της βαθμολογίας των μαθητών του τμήματος A είναι $S_a = 2,5$ και του τμήματος B είναι $S_b = 1,5$, ενώ η μέση βαθμολογία των δύο τμημάτων είναι η ίδια.

A) Από τις βαθμολογίες των δύο τμημάτων, ποια έχει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια;

B) Να βρείτε την τυπική απόκλιση της βαθμολογίας όλων των μαθητών της τάξης αυτής.

169 Θεωρούμε το δείγμα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta$. Ονομάζουμε μ τον αριθμητικό μέσο του δείγματος, M τον σταθμικό μέσο του δείγματος με αντίστοιχους συντελεστές στάθμισης $0,1\alpha, 0,1\beta, 0,1\gamma, 0,1\delta$, και s τη τυπική απόκλιση του δείγματος. Αν $\mu \cdot M = 21$ και $21 - s^2 = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ να βρείτε τα μ, s, CV

$$Y = cX + c'$$

170 Έστω ότι ένα σύνολο παρατηρήσεων x_i έχει μέση τιμή $\bar{x} = 3$, διάμεσο $\delta = 4$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

	$y_i = x_i + 1$	$y_i = -2x_i$	$y_i = -2x_i + 1$
\bar{y}			
δ_y			
s_y			
CV_y			

171 Η μέση τιμή \bar{x} και η τυπική απόκλιση s των παρατηρήσεων x_1, x_2, \dots, x_n είναι αντίστοιχα 8 και 10. Να βρείτε τη μέση τιμή μ και την τυπική απόκλιση σ των παρατηρήσεων $-6x_1 + 4, -6x_2 + 4, \dots, -6x_n + 4$.

172 Οι παρατηρήσεις x_1, x_2, \dots, x_n ενός δείγματος μεγέθους n έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 3$ και διασπορά $s^2 = 4$. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των παρατηρήσεων y_1, y_2, \dots, y_n που προκύπτουν από τις x_1, x_2, \dots, x_n αν:

- A) προσθέσουμε σε κάθε μία το 1 και πολλαπλασιάσουμε κάθε μια με το -2
 B) αυξήσουμε κάθε μια κατά 10%
 Γ) ελαττώσουμε κάθε μια κατά 20% και μετά προσθέσουμε σε κάθε μια το 1,6

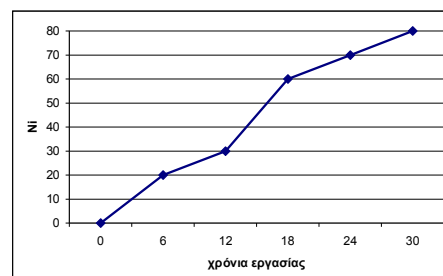
173 Έστω ευθεία (ϵ): $y = -3x + 2$ και τα σημεία της A_1, A_2, \dots, A_9 με τετημημένες x_1, x_2, \dots, x_9 που έχουν μέση τιμή -8 και τυπική απόκλιση 2. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των τεταγμένων των σημείων A_1, A_2, \dots, A_9 .

174 Έστω x_1, x_2, \dots, x_n οι παρατηρήσεις ενός δείγματος που έχουν μέση τιμή και διακύμανση 4. Να βρείτε πόσες μονάδες -τουλάχιστον- πρέπει να αυξησουμε την κάθε μια από τις παρατηρήσεις ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

175 Μια τάξη έχει μέση τιμή ηλικίας των μαθητών 14 χρόνια και τυπική απόκλιση 3 μήνες. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της ηλικίας των μαθητών ύστερα από 3 χρόνια

176 Σε ένα εργοστάσιο σε ένα δείγμα εργαζομένων στο τμήμα Α έχουν μέσο (μηνιαίο) μισθό 950€ και τυπική απόκλιση 100€ ενώ στο τμήμα Β έχουν μέσο (μηνιαίο) μισθό 1080€ και τυπική απόκλιση 120€. Έστω ότι οι εργαζόμενοι θα πάρουν αύξηση στο τμήμα Α, 50€ και στο τμήμα Β 5%. Στους νέους μισθούς να εξετάσετε ποιο από τα δύο δείγματα τιμών έχει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια και αν αυτό είναι ομοιογενές.

177 Τα χρόνια εργασίας ενός δείγματος εργαζομένων σε ένα εργοστάσιο σχηματίζουν το διπλανό πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων. Να βρείτε: τη διάμεσο, τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση, και τον συντελεστή μεταβολής ύστερα από 5 χρόνια.



178 Η μέση τιμή και ο συντελεστής μεταβολής των 10 τιμών ενός δείγματος είναι $\bar{x} = 80$ και $CV = 25\%$ αντίστοιχα.

Αν για τις εννέα τιμές ισχύει ότι: $\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = 3975$ να βρείτε:

- A) τη δέκατη τιμή
 B) πόσες μονάδες τουλάχιστον πρέπει να αυξηθεί κάθε τιμή του δείγματος του δείγματος ώστε να γίνει ομοιογενές

179 Μία βιομηχανία συσκευάζει γάλα σε 4 μεγέθη κουτιών και σε ποσοστά 10%, 20%, 30%, 40% με αντίστοιχα κόστη 8, 6, 4 και 2 € ανά κουτί.

- A) Να βρεθεί το μέσο κόστος ανά κουτί και η τυπική απόκλιση.
 B) Αν αυξηθεί το κόστος κατά 10%, να βρεθεί η νέα τυπική απόκλιση.

180 Οι σημερινές ηλικίες κάποιων ατόμων έχουν $CV_1 = 0,05$ ενώ πριν από 16 χρόνια είχαν $CV_2 = 25\%$

- A) να βρεθεί η μέση σημερινή τους ηλικία
 B) πριν πόσα χρόνια από σήμερα το δείγμα των ηλικιών τους ήταν για πρώτη φορά ομοιογενές;
 Γ) αν το άθροισμα των τετράγωνων των σημερινών ηλικιών είναι 1604 να βρεθεί το πλήθος των ατόμων

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

181 Η βαθμολογία 200 μαθητών σε ένα διαγώνισμα είναι περίπου κανονική. Εκατό μαθητές έχουν βαθμό το πολύ 12 και 5 μαθητές τουλάχιστον 16. Να βρείτε πόσοι μαθητές έχουν βαθμό από 8 έως 16 και να εξετάσετε αν το δείγμα των βαθμών είναι ομοιογενές. ΑΠ: 190 ,όχι

182 Τα νούμερα των παπουτσιών ενός δείγματος 400 ατόμων ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Δέκα άτομα φοράνε παπούτσια με νούμερο τουλάχιστον 43 και 64 άτομα το πολύ 37. Να βρείτε πόσα άτομα φοράνε παπούτσια από νούμερο 37 έως 43 ΑΠ: 326

183 Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ακολουθούν την κανονική κατανομή. Αν το 16% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 10 και το 50% μεγαλύτερες του 12, να βρείτε το συντελεστή μεταβλητότητας του δείγματος των παρατηρήσεων. ΑΠ: $CV = 1/6$

184 Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ακολουθούν την κανονική κατανομή. Αν το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες του 30 και το 84% μεγαλύτερες του 10 να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων από 15 έως 35

185 Οι παρατηρήσεις μια μεταβλητής X μεγέθους 800 ακολουθούν την κανονική κατανομή. Είκοσι παρατηρήσεις είναι μικρότερες του 18 και 128 μεγαλύτερες του 36.

- A) Να βρείτε κατά προσέγγιση το εύρος του δείγματος.
- B) Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

186 Έστω μεταβλητή X η οποία παίρνει θετικές τιμές, ακολουθεί την κανονική κατανομή και έχει εύρος -περίπου- $R = 36$ και $CV = 20\%$

- A) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} του δείγματος.
- B) Να υπολογίσετε το ποσοστό των ατόμων που η τιμή τους είναι μεταξύ 24 και 42
- Γ) Να αποδείξετε ότι αν οι τιμές της X αυξηθούν κατά $\omega > 0$, ο CV θα μειωθεί
- Δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του ω , ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

187 Ένα δείγμα έχει μέγεθος $n=10$ και η μεταβλητή ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Αν $\sum_{i=1}^{10} x_i = 2,4$ και $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 4,86$ τότε να βρείτε το συντελεστή CV

188 Η διάρκεια ζωής (σε χιλιάδες ώρες) ενός δείγματος 8000 ηλεκτρικών συσκευών που παράγει μια μηχανή, όταν λειτουργεί κανονικά, ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή. Η διάμεσος του δείγματος είναι 20 και 200 ηλεκτρικές συσκευές έχουν ζωή τουλάχιστον 22

- A) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
- B) Να υπολογίσετε το πλήθος των ηλεκτρικών συσκευών του δείγματος που έχουν διάρκεια από 19 έως 23.
- Γ) Θεωρούμε μια συσκευή ελαττωματική όταν έχει διάρκεια ζωής κάτω από 17. Αν στο δείγμα βρέθηκαν 15 ηλεκτρικές συσκευές που έχουν διάρκεια ζωής κάτω από 17, να εξετάσετε αν έχει βλάβη η μηχανή που τις παράγει.

189 Ένα μηχάνημα κατασκευάζει βίδες. Όταν το μηχάνημα λειτουργεί σωστά, η κατανομή συχνοτήτων των βιδών ως προς το μήκος τους, είναι κανονική με μέση τιμή \bar{x} (σε cm) και τυπική απόκλιση s (σε cm). Αν το 95% περίπου των βιδών που κατασκευάζει το παραπάνω μηχάνημα έχουν μήκος μεταξύ 5,6 cm και 6,4 cm τότε

- A) Να υπολογίσετε το μέσο μήκος των βιδών, την τυπική απόκλιση του μήκους και το εύρος της κατανομής.
- B) Να βρείτε το ποσοστό των βιδών που έχει μήκος μεταξύ 5,8 cm και 6 cm
- Γ) Αν μία βίδα έχει μήκος μικρότερο ή ίσο των 5,4 cm ή μεγαλύτερο ή ίσο των 6,6 cm τότε θεωρείται ελαττωματική. Να βρείτε το ποσοστό των ελαττωματικών βιδών.

Δ) Σε ποιοτικό έλεγχο 10000 βιδών που κατασκευάζει το μηχάνημα, 45 βίδες βρίσκονται ελαττωματικές. Η πρόταση: «Το μηχάνημα παρουσιάζει πρόβλημα λειτουργίας» είναι Σωστή ή Λανθασμένη;