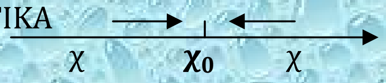
ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Όταν στα μαθηματικά λέμε ότι το χ τείνει στο χ_0 και συμβολίζεται ($\chi \to \chi_0$), εννοούμε ότι οι τιμές χ προσεγγίζουν την τιμή χ_0, είτε με από τιμές μικρότερες του χ_0 (δηλ από αριστερά του χ_0), είτε από τιμές μεγαλύτερες του χ_0 (δηλ. από δεξιά του χ_0)

ΣΧΗΜΑΤΙΚΑ



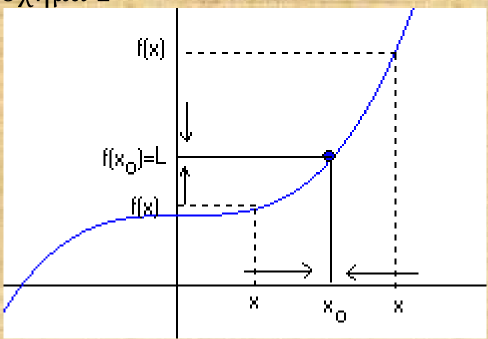
Όταν το $\chi \to \chi_0$ τότε το
$\chi \neq \chi_0$ **και παίρνει τιμές κοντά**
στο χ_0 ,μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το

Αν έχουμε μία συνάρτηση f , τις περισσότερες φορές αναζητούμε την τιμή που πλησιάζουν, προσεγγίζουν οι τιμές της συνάρτησης, όταν το $\chi \to \chi_0$. Αν πράγματι υπάρχει τέτοια τιμή και έστω ότι είναι L τότε γράφουμε

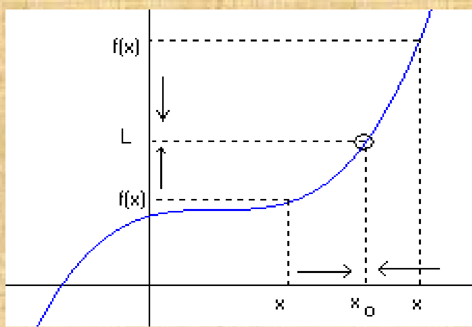
$$\lim_{\chi \to \chi_0} f(\chi) = L$$

Η τιμή L (δηλ. το όριο $\lim_{\chi \to \chi_0} f(\chi) = L$) άλλοτε υπάρχει και άλλοτε δεν υπάρχει
Όταν υπάρχει συμβαίνουν δύο περιπτώσεις
1η περίπτωση : $L = f(\chi_0)$ **βλέπε σχήμα 1**
2η περίπτωση : $L \neq f(\chi_0)$ **βλέπε σχήμα 2**

σχήμα 1



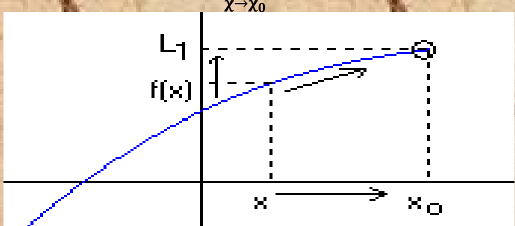
σχήμα 2



ΣΗΜΕΙΩΣΗ
Από τα πιο πάνω γίνεται φανερό ότι για να μιλήσουμε για όριο μιας συνάρτησης στο χ_0 θα πρέπει η συνάρτηση να ορίζεται τουλάχιστον σε κάποιο από τα διαστήματα της μορφής
1) $(\alpha, \chi_0) \cup (\chi_0, \beta)$ ή 2) (α, χ_0) ή 3) (χ_0, β)

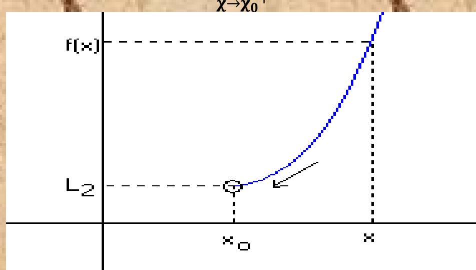
Όταν το χ προσεγγίζει την τιμή χ_0 από αριστερά δηλ. $\chi < \chi_0$ και η τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε ένα πραγματικό αριθμό L_1 τότε γράφουμε:

$$\lim_{\chi \to \chi_0^-} f(\chi) = L_1$$



Όταν το χ προσεγγίζει την τιμή χ_0 από δεξιά δηλ. $\chi > \chi_0$ και η τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε ένα πραγματικό αριθμό L_2 τότε γράφουμε:

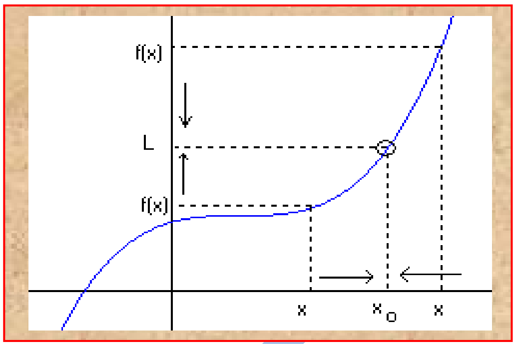
$$\lim_{\chi \to \chi_0^+} f(\chi) = L_2$$



Τό $\lim\limits_{\chi\to\chi_0^+} f(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0^-} f(\chi)$ ονομάζονται πλευρικά όρια.

Όταν μια συνάρτηση ορίζεται αριστερά και δεξιά του $\boldsymbol{\chi_0}$ και υπάρχει το όριό της τότε θα πρέπει

$$\lim_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = L \Leftrightarrow \lim_{\chi\to\chi_0^+} f(\chi) = \lim_{\chi\to\chi_0^-} f(\chi) = L$$



ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1) για την εύρεση του ορίου μιας συνάρτησης στο χ_0 θα πρέπει το χ_0 η να να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ή αν δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της να είναι άκρον του διαστήματος του πεδίου ορισμού της.

2) Αποδεικνύεται ότι όταν υπάρχει το όριο τότε αυτό είναι μοναδικό

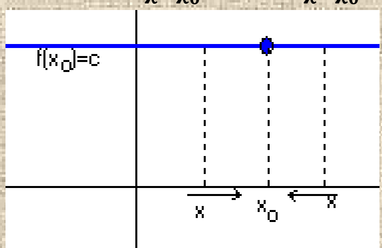
3) Αν μια συνάρτηση ορίζεται δε διάστημα της μορφής **$(\alpha,\chi_0)U(\chi_0,\beta)$ τότε το όριο $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)$** αν υπάρχει δεν εξαρτάται από τα άκρα α και β.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΥ ΙΣΧΥΟΥΝ ΑΠΟ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

1. $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to\chi_0}(f(\chi) - L) = 0$
2. $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(\chi_0 + h) = L$
3. $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to\chi_0}[-f(\chi)] = -L$
4. $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to\chi_0}|f(\chi)| = 0$

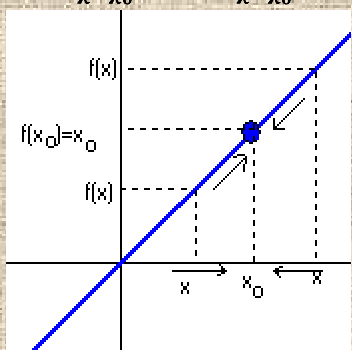
ΟΡΙΟ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to\chi_0} c = c$



ΟΡΙΟ ΤΑΥΤΟΤΙΚΗΣ f(χ)=χ

Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to\chi_0} \chi = \chi_0 = f(\chi_0)$



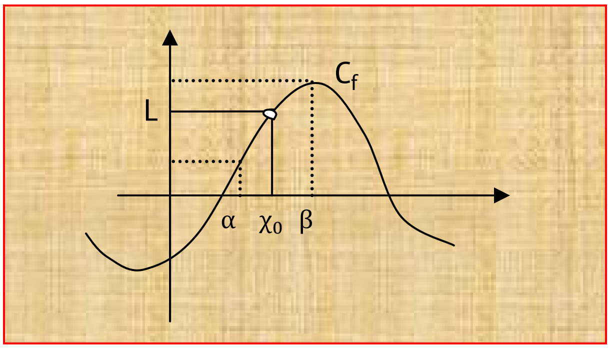
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ

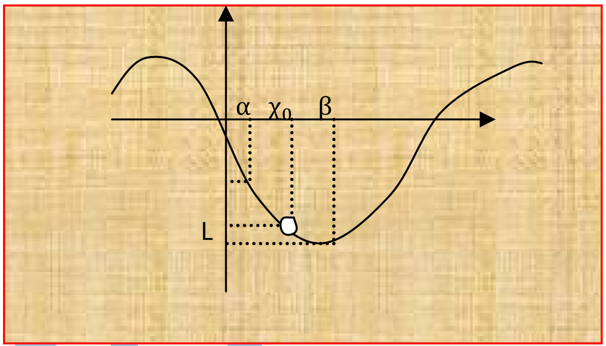
1. ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \mathbf{f(\chi) > 0}$ ***τότε κοντά στο*** $\boldsymbol{\chi_0}$ **έχω και** $\mathbf{f(\chi) > 0}$

Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \mathbf{f(\chi) > 0}$ ***τότε κοντά στο*** $\boldsymbol{\chi_0}$ **έχω και** $\mathbf{f(\chi) > 0}$

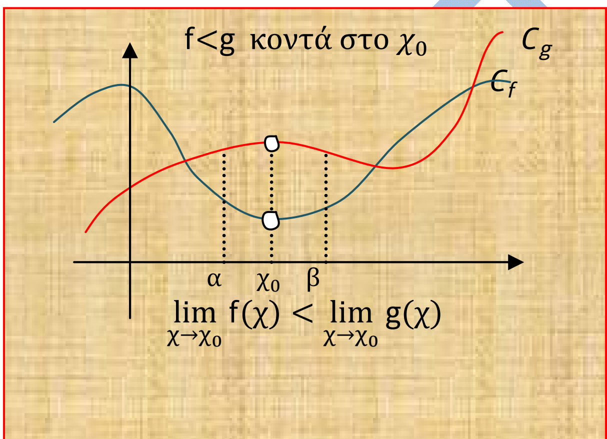


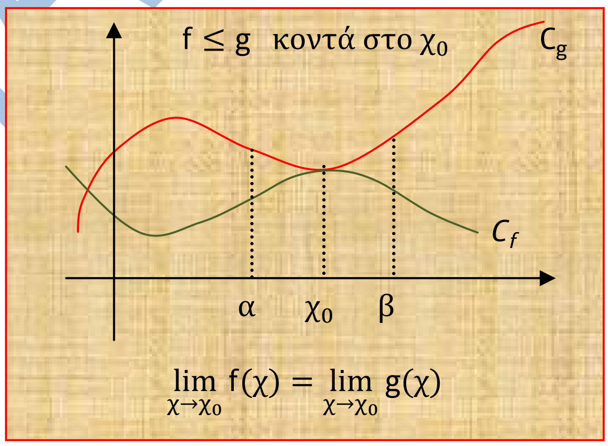


ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν δύο συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο $\boldsymbol{\chi_0}$ και ισχύει $\mathbf{f(\chi) \leq g(\chi)}$ κοντά στο $\boldsymbol{\chi_0}$ τότε και

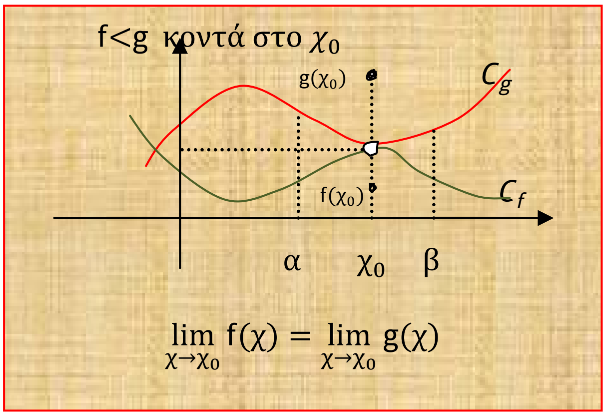
$$\mathbf{\lim f(\chi) \leq \lim g(\chi)}$$





Από το διπλανό σχήμα ενώ f(χ)<g(χ) κοντά στο χ_0 το $\lim_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = \lim_{\chi\to\chi_0} g(\chi)$

Άρα δεν μεταφέρεται η γνήσια διάταξη στα όρια.



ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο χ_0 τότε

1. $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}(f(\chi)+g(\chi)) = \lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) + \lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)$

2. $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}(cf(\chi)) = c\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)$ **για κάθε σταθερά** $c \in R$

3. $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\big(f(\chi)\cdot g(\chi)\big) = \lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)\cdot \lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)$

4. $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\left(\dfrac{f(\chi)}{g(\chi)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)}{\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)}$ **εφόσον** $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi) \neq 0$

5. $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}|f(\chi)| = \left|\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)\right|$

8. $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\sqrt[\kappa]{f(\chi)} = \sqrt[\kappa]{\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)}$ **εφόσον** $f(\chi) \geq 0$ **κοντά στο** χ_0

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

α). Οι ιδιότητες τονίζεται ιδιαίτερα ότι ισχύουν μόνο αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g

β). Οι ιδιότητες 1 και 3 του προηγουμένου θεωρήματος ισχύουν και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις αλλά πεπερασμένο το πλήθος. Ειδικά για την ιδιότητα 3 θα έχουμε ότι ισχύει:

$\lim\limits_{\chi\to\chi_0}[f(\chi)]^\nu = \left[\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)\right]^\nu$, $\nu \in N^*$ και για παράδειγμα $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\chi^\nu = {\chi_0}^\nu$ διότι:

$\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\chi^\nu = \lim\limits_{\chi\to\chi_0}(\chi\cdot\chi\cdot\chi\cdot\ldots\cdot\chi) = \lim\limits_{\chi\to\chi_0}\chi\cdot\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\chi\cdot\ldots\cdot\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\chi = \chi_0\cdot\chi_0\cdot\chi_0\cdot\ldots\cdot\chi_0 = {\chi_0}^\nu$

γ. Εστω πολυώνυμο $P(\chi) = \alpha_\nu\chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\chi + \alpha_0$. Τότε $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} P(\chi) = P(\chi_0)$

δ. Αν $P(\chi)$ και Q δύο πολυώνυμα τότε :

$$\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \frac{\lim\limits_{\chi\to\chi_0} P(\chi)}{\lim\limits_{\chi\to\chi_0} Q(\chi)} = \frac{P(\chi_0)}{Q(\chi_0)} \quad \text{ερόσον } Q(\chi_0) \neq 0$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΟΡΙΩΝ

ΟΡΙΟ ΡΗΤΗΣ ΣΝΑΡΤΗΣΗΣ
Παίρνουμε χωριστά τα όρια αριθμητή και του παρονομαστή και εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ορίων.
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Για λόγους συντομίας δεν τις εφαρμόζουμε πάντα . Αλλά στην ουσία αντικαθιστούμε όπου χ το χ_0 ($\chi \longrightarrow \chi_0$)εκτελούμε τις επιτρεπτές πράξεις και βρίσκουμε το όριο. Αν κατά την εκτέλεση των πράξεων καταλήξουμε σε απροσδιοριστία της μορφής (0/0) κάνουμε παραγοντοποίηση σε αριθμητή και παρονομαστή, κατόπιν κάνουμε απλοποίηση και ύστερα με αντικατάσταση όπου χ το χ_0 βρίσκουμε το όριο

1ο Παράδειγμα
Να βρεθεί το

$$\lim_{\chi\to 2}\frac{\chi^3+3\chi-1}{\chi^2+\chi+2}$$

ΛΥΣΗ

$$\lim_{\chi\to 2}\frac{\chi^3+3\chi-1}{\chi^2+\chi+2}=\frac{2^3+3\cdot 2-1}{2^2+2+2}=\frac{13}{8}$$

2ο Παράδειγμα

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 3}\frac{\chi^2-5\chi+6}{\chi^3-3\chi^2-\chi+3}$

ΛΥΣΗ
Κάνοντας αντικατάσταση βρίσκουμε (0/0). Παραγοντοποιούμε και έχουμε

$$\lim_{\chi\to 3}\frac{\chi^2-5\chi+6}{\chi^3-3\chi^2-\chi+3}=\lim_{\chi\to 3}\frac{(\chi-2)(\chi-3)}{(\chi-1)(\chi+1)(\chi-3)}=\lim_{\chi\to 3}\frac{\chi-2}{(\chi-1)(\chi+1)}=\frac{1}{8}$$

ΟΡΙΟ ΑΡΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
Ριζικά 2ης τάξης

Αντικατάσταση όπου χ το χ_0 κα αν καταλήξουμε σε (0/0)κάνουμε άρση της απροσδιοριστίας πολλαπλασιάζοντας με τη συζυγή παράσταση ή με τις συζυγείς παραστάσεις αν έχουμε ριζικά σε αριθμητή και παρονομαστή. Πρέπει να προκύψει κοινός παράγοντας το (χ-χ_0), απλοποιούμε και αντικαθιστούμε όπου χ το χ_0

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0}\frac{\sqrt{\chi^2+\chi+1}-1}{\chi}$

Λύση

$$\lim_{\chi\to 0}\frac{\sqrt{\chi^2+\chi+1}-1}{\chi}=\lim_{\chi\to 0}\frac{\left(\sqrt{\chi^2+\chi+1}-1\right)\left(\sqrt{\chi^2+\chi+1}+1\right)}{\chi\left(\sqrt{\chi^2+\chi+1}+1\right)}=\lim_{\chi\to 0}\frac{\chi^2+\chi+1-1}{\chi\left(\sqrt{\chi^2+\chi+1}+1\right)}=$$

$$\lim_{\chi\to 0}\frac{\chi(\chi+1)}{\chi\left(\sqrt{\chi^2+\chi+1}+1\right)}=\lim_{\chi\to 0}\frac{\chi+1}{\sqrt{\chi^2+\chi+1}}=1$$

3

ΡΙΖΙΚΑ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Εφαρμόζουμε τη ταυτότητα Newton

$$\boldsymbol{\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\cdot\beta+\alpha^{\nu-3}\cdot\beta^2+\cdots+\beta^{\nu-1}}$$

1ο Παράδειγμα

Νά βρεθεί το $\boldsymbol{\lim_{\chi\to 3}\frac{\sqrt[3]{2\chi+2}-\sqrt[3]{\chi+5}}{\chi-3}}$

Λύση

Με αντικατάσταση όπου χ το 3 έχουμε $\frac{0}{0}$. Από την ταυτότητα

$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ έχω $\alpha-\beta=\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$

αν $\alpha=\sqrt[3]{2\chi+2}$ και $\beta=\sqrt[3]{\chi+5}$ τότε $\alpha-\beta=\sqrt[3]{2\chi+2}-\sqrt[3]{\chi+5}=$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{2\chi+2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{\chi+5}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{2\chi+2}\right)^2+\sqrt[3]{2\chi+2}\cdot\sqrt[3]{\chi+5}+\left(\sqrt[3]{\chi+5}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\chi+2-\chi-5}{\left(\sqrt[3]{2\chi+2}\right)^2+\sqrt[3]{2\chi+2}\cdot\sqrt[3]{\chi+5}+\left(\sqrt[3]{\chi+5}\right)^2}$$

Άρα $\displaystyle\lim_{\chi\to 3}\frac{\sqrt[3]{2\chi+2}-\sqrt[3]{\chi+5}}{\chi-3}=\lim_{\chi\to 3}\frac{2\chi+2-\chi-5}{\left(\sqrt[3]{2\chi+2}\right)^2+\sqrt[3]{2\chi+2}\cdot\sqrt[3]{\chi+5}+\left(\sqrt[3]{\chi+5}\right)^2}=$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}+\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{12}$$

4

ΡΙΖΙΚΑ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

1) Ασχολούμεθα με το ριζικό ανώτερης τάξης και μετά με το άλλο (1ο παράδειγμα)
2) Κάνουμε διάσπαση αν χρειασθεί, προσθαφαιρώντας κατάλληλο αριθμό (2ο παράδειγμα)
3) Αν τα ριζικά έχουν την ίδια υπόρριζη ποσότητα τα μετατρέπουμε σε ριζικά της ίδιας τάξης και μετά κάνουμε αντικατάσταση (3ο παράδειγμα)

1ο παράδειγμα

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 8}\dfrac{\sqrt{1+\chi}-3}{2-\sqrt[3]{\chi}}$

Λύση

$$\lim_{\chi\to 8}\frac{\sqrt{1+\chi}-3}{2-\sqrt[3]{\chi}}=\lim_{\chi\to 8}\frac{\left(\sqrt{1+\chi}-3\right)\left(\sqrt{1+\chi}+3\right)\left(\sqrt[3]{8^2}+\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{\chi}+\sqrt[3]{\chi^2}\right)}{(8-\chi)\left(\sqrt{1+\chi}+3\right)}=$$

$$=-\lim_{\chi\to 8}\frac{(1+\chi-9)\left(\sqrt[3]{8^2}+\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{\chi}+\sqrt[3]{\chi^2}\right)}{(8-\chi)\left(\sqrt{1+\chi}+3\right)}=-\frac{12}{6}=-2$$

2ο παράδειγμα

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2\chi+4}+\sqrt{3\chi-2}-4}{\chi-2}$

Λύση

$$\lim_{\chi\to 2}\frac{\sqrt[3]{2\chi+4}+\sqrt{3\chi-2}-4}{\chi-2}=\lim_{\chi\to 2}\frac{\sqrt[3]{2\chi+4}-2}{\chi-2}+\lim_{\chi\to 2}\frac{\sqrt{3\chi-2}-2}{\chi-2}=$$

$$\lim_{\chi\to 2}\frac{\sqrt[3]{2\chi+4}-\sqrt[3]{8}}{\chi-2}+\lim_{\chi\to 2}\frac{\sqrt{3\chi-2}-2}{\chi-2}=\lim_{\chi\to 2}\frac{2\chi+4-8}{(\chi-2)\left(\sqrt[3]{(2\chi+4)^2}+\sqrt[3]{2\chi+4}\cdot\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{64}\right)}+$$

$$\lim_{\chi\to 2}\frac{3\chi-2-4}{(\chi-2)\left(\sqrt{3\chi-2}+2\right)}=\lim_{\chi\to 2}\frac{2(\chi-2)}{(\chi-2)\left(\sqrt[3]{(2\chi+4)^2}+\sqrt[3]{2\chi+4}\cdot\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{64}\right)}+$$

$$\lim_{\chi\to 2}\frac{3(\chi-2)}{(\chi-2)\left(\sqrt{3\chi-2}+2\right)}=\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{11}{12}$$

3ο παράδειγμα

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\chi+1}-1}{\sqrt{\chi+1}-1}$

Λύση

Θέτω $\tau=\sqrt[6]{\chi+1}$ τότε $\tau^3=\left(\sqrt[6]{\chi+1}\right)^2=\sqrt{\chi+1}$ και $\tau^2=\left(\sqrt[6]{\chi+1}\right)^2=\sqrt[3]{\chi+1}$

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\chi+1}-1}{\sqrt{\chi+1}-1}=\lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{\tau^2-1}{\tau^3-1}=\lim\limits_{\tau\to 1}\dfrac{(\tau-1)(\tau+1)}{(\tau-1)(\tau^2+\tau+1)}=\lim\limits_{\tau\to 1}\dfrac{\tau+1}{\tau^2+\tau+1}=\dfrac{2}{3}$

5
ΙΣΟΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ
ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

1ο Αν κοντά στο χ_0 ισχύει $g(x) \leq f(\chi) \leq h(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi) = \lim\limits_{\chi\to\chi_0} h(\chi) = l$ τότε και

$$\mathbf{\lim_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = l}$$

2ο Αν $|f(\chi)| \leq g(\chi)$ κοντά στο χ_0 και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi) = 0$ τότε $-g(\chi) \leq f(\chi) \leq g(\chi)$ με $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} (-g(\chi)) = \lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi) = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = 0$

Προσοχή. Στη δεύτερη περίπτωση είναι απαραίτητο το $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

1ο παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση f:R→ R η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathbf{3\sqrt{\chi^2+5} - 9 \leq (3\chi-6)f(\chi) \leq 4\left(\chi - \sqrt{2|\chi|}\right)}$$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 2} f(\chi)$

Λύση Αν χ>2 τότε από τη δοθείσα έχω

$\dfrac{3\sqrt{\chi^2+5}-9}{3(\chi-2)} \leq f(\chi) \leq \dfrac{4\left(\chi-\sqrt{2|\chi|}\right)}{3(\chi-2)}$ ΄Αλλά $\lim\limits_{\chi\to 2^+} \dfrac{3\sqrt{\chi^2+5}-9}{3(\chi-2)} = \dfrac{2}{3}$ και $\lim\limits_{\chi\to 2^+} \dfrac{4\left(\chi-\sqrt{2|\chi|}\right)}{3(\chi-2)} = \dfrac{2}{3}$. ΄Αρα και $\lim\limits_{\chi\to 2^+} f(\chi) = \dfrac{2}{3}$

Παρόμοια αν χ<2 διαιρούμε με το χ-2 και θα αλλάξει η φορά αλλά το όριο θα παραμείνει το ίδιο.

2ο παράδειγμα

Αν κατά την αντικατάσταση προκύψει ημ$(\pm\infty)$ τότε παίρνουμε το απόλυτο της παράστασης που έχουμε να βρούμε το όριο. Παρόμοια αν έχουμε συν$(\pm\infty)$. Η συνηθέστερη μορφή των συναρτήσεων που λύνονται με το κριτήριο αυτό είναι

$$\mathbf{\lim_{\chi\to\chi_0}\left(f(\chi)\cdot \eta\mu\frac{1}{h(\chi)}\right) \text{ και } \lim_{\chi\to\chi_0}\left(f(\chi)\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{1}{h(\chi)}\right)}$$

Έστω ότι έχουμε να βρούμε το $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\chi^{\nu}\cdot \eta\mu\dfrac{\alpha}{\chi^{\kappa}}\right)$

$\left|\chi^{\nu}\cdot \eta\mu\dfrac{\alpha}{\chi^{\kappa}}\right| = |\chi^{\nu}|\left|\eta\mu\dfrac{\alpha}{\chi^{\kappa}}\right| \le |\chi^{\nu}| \Leftrightarrow -|\chi^{\nu}| \le \chi^{\nu}\cdot \eta\mu\dfrac{\alpha}{\chi^{\kappa}} \le |\chi^{\nu}|$ *και επειδή* $\lim\limits_{\chi\to 0}(-|\chi^{\nu}|) = 0$ και $\lim\limits_{\chi\to 0}|\chi^{\nu}| = 0$ από κριτήριο παρεμβολής και $\lim\limits_{\chi\to 0}\chi^{\nu}\cdot \eta\mu\dfrac{\alpha}{\chi^{\kappa}} = 0$ Παρόμοια και για το $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\chi^{\nu}\cdot \sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{\chi^{\kappa}}\right)$

3ο παράδειγμα

Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi) = 0$ **να δειχθεί ότι** $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{f^3(\chi)-4g^4(\chi)}{f^2(\chi)+g^2(\chi)} = 0$

Λύση

$$\left|\frac{f^3(\chi)-4g^4(\chi)}{f^2(\chi)+g^2(\chi)}\right| \le \left|\frac{f^3(\chi)}{f^2(\chi)+g^2(\chi)}\right| + \left|\frac{4g^4(\chi)}{f^2(\chi)+g^2(\chi)}\right| \le \left|\frac{f^3(\chi)}{f^2(\chi)}\right| + \left|\frac{4g^4(\chi)}{g^2(\chi)}\right| \le |f(\chi)| + 4g^2(\chi)$$

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}(|f(\chi)| + 4g^2(\chi)) = 0$ από κριτήριο παρεμβολής και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{f^3(\chi)-4g^4(\chi)}{f^2(\chi)+g^2(\chi)} = 0$

ΟΡΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1) Αν με αντικατάσταση όπου χ το χ_0 καταλήξουμε σε απροσδιοριστία $\dfrac{0}{0}$ κάνουμε παραγοντοποίηση (παράγειγμα 1ο)

2) Αν η παράσταση περιέχει και παραστάσεις του χ τότε

α) Αν το $\chi \to x_0$ τότε προσπαθούμε με κατάλληλους μετασχηματισμούς να δημιουργήσουμε παραστάσεις της μορφής $\dfrac{\eta\mu(\alpha\chi)}{\alpha\chi}, \dfrac{\varepsilon\varphi(\alpha\chi)}{\alpha\chi}$ (παράδειγμα 2ο)

β) Αν το $\chi \to \chi_0$ τότε κάνουμε το μετασχηματισμό $\chi - \chi_0 = u$ οπότε του $\chi \to \chi_0$ το $u \to 0$
(παράδειγμα 3)

3) $|\eta\mu\chi| \le |\chi|$ **για κάθε** $\chi \in R$ **και** $|\eta\mu\chi| = |\chi|$ **μόνο για** $\chi = 0$

$\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\eta\mu\chi = \eta\mu\chi_0$

$\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\chi_0$

$\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi} = 1$

$\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi - 1}{\chi} = 0$

$\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\chi}{\chi} = 0$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Για τα όρια παρατάσεων που παρουσιάζεται η παράσταση συνχ-1 πολλαπλασιάζουμε με (συνχ+1).
Για (1-συνχ) και (συνχ+1) πολλαπλασιάζουμε με (1+συνχ) και (1-συνχ) αντίστοιχα

1ο παράδειγμα

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\eta\mu^2\chi+\eta\mu\chi-1}{2\eta\mu^2\chi-3\eta\mu\chi+1}$

Λύση

$$\lim_{\chi\to\frac{\pi}{6}}\frac{2(\eta\mu\chi+1)\left(\eta\mu\chi-\frac{1}{2}\right)}{2(\eta\mu\chi-1)\left(\eta\mu\chi-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{\chi\to\frac{\pi}{6}}\frac{\eta\mu\chi+1}{\eta\mu\chi-1}=\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}=-3$$

2ο παράδειγμα

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi-1}{\chi^2+\eta\mu^2\chi}$

Λύση

$$\lim_{\chi\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu\chi-1}{\chi^2+\eta\mu^2\chi}=\lim_{\chi\to0}\frac{(\sigma\upsilon\nu\chi-1)(\sigma\upsilon\nu\chi+1)}{(\chi^2+\eta\mu^2\chi)(\sigma\upsilon\nu\chi+1)}=\lim_{\chi\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi-1}{(\chi^2+\eta\mu^2\chi)(\sigma\upsilon\nu\chi+1)}=$$

$$=\lim_{\chi\to0}\frac{-\eta\mu^2\chi}{\chi^2+\eta\mu^2\chi}\cdot\lim_{\chi\to0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi+1}=\lim_{\chi\to0}\frac{\frac{-\eta\mu^2\chi}{\chi^2}}{1+\frac{\eta\mu^2\chi}{\chi^2}}\cdot\lim_{\chi\to0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi+1}=\frac{-1}{1+1}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

3ο παράδειγμα

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to2}\dfrac{\chi^2+\chi-6}{\eta\mu(\chi-2)}$

Λύση

Θέτω χ-2=u οπότε του $\chi\to2$ το $u\to0$ και ακόμη χ=u+2

Άρα $\lim\limits_{\chi\to2}\dfrac{\chi^2+\chi-6}{\eta\mu(\chi-2)}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{u^2+4u+4+u+2-6}{\eta\mu u}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{1}{\frac{\eta\mu u}{u}}\cdot\lim\limits_{u\to0}(u+5)=1\cdot5=5$

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΠΟ ΣΧΕΣΗ ΟΡΙΟΥ

1) Θέτουμε τη σχέση με g(x) και λύνουμε ως προς f(x) και παίρνουμε τα όρια
2) Αν οι σχέσεις είναι δύο και ζητείται το όριο δύο συναρτήσεων, δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο αλλά έχουμε να λύσουμε σύστημα

1ο παράδειγμα

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι $\lim\limits_{\chi\to1}\dfrac{f(\chi)-5\chi}{\chi^2-4\chi+3}=L$ **να βρεθεί το** $\lim\limits_{\chi\to1}f(\chi)$

Λύση

Θέτω $g(\chi)=\dfrac{f(\chi)-5\chi}{\chi^2-4\chi+3}\Leftrightarrow f(\chi)=(\chi^2-4\chi+3)g(\chi)+5\chi$. Άρα

$$\lim_{\chi\to1}f(\chi)=\lim_{\chi\to1}(\chi^2-4\chi+3)g(\chi)+\lim_{\chi\to1}5\chi=0\cdot L+5\cdot1=5$$

2ο Παράδειγμα

Αν για τις πραγματικές συναρτήσεις $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ ισχύουν $\lim\limits_{\chi\to 3}[3f(\chi)+2g(\chi)]=4$ και $\lim\limits_{\chi\to 3}[5f(\chi)-4g(\chi)]=1$ να βρεθούν $\lim\limits_{\chi\to 3}f(\chi), \lim\limits_{\chi\to 3}g(\chi)$

Λύση

Θέτω $h(\chi)=3f(\chi)+2g(\chi)$ και $z(\chi)=5f(\chi)-4g(\chi)$ και έχω ότι $f(\chi)=\dfrac{2h(\chi)+z(\chi)}{11}$ και $g(\chi)=\dfrac{5h(\chi)-3z(\chi)}{22}$ ΄Αρα $\lim\limits_{\chi\to 3}f(\chi)=\dfrac{2\cdot 4+1}{11}=\dfrac{9}{11}$ και $\lim\limits_{\chi\to 3}g(\chi)=\dfrac{5\cdot 4-3\cdot 1}{22}=\dfrac{17}{22}$

ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

1) Βασική όταν έχουμε απόλυτες τιμές είναι να απαλλαγούμε από αυτές
2) Θέτουμε την τιμή $\chi=x_0$ στην παράσταση που είναι μέσα στο απόλυτο. Αν βρούμε θετική τιμή φεύγει το απόλυτο, αν βρούμε αρνητική τιμή φεύγει το απόλυτο και αλλάζουμε το πρόσημο της παράστασης που είναι στο απόλυτο, αν βρούμε μηδέν (0) τότε παίρνουμε πλευρικά όρια.

1ο Παράδειγμα

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{|\chi^2-3\chi+2|-2|\chi-1|}{|\chi+2|-3}$

Λύση

Η $\chi^2-3\chi+2$ για $\chi=1$ είναι ίση με το μηδέν . Άρα

$$\lim_{\chi\to 1^+}\frac{|\chi-1||\chi-2|-2|\chi-1|}{|\chi+2|-3}=\lim_{\chi\to 1^+}\frac{(\chi-1)(-\chi+2)-2(\chi-1)}{\chi+2-3}=\lim_{\chi\to 1^+}\frac{(\chi-1)(-\chi+2-2)}{\chi-1}=$$
$$\lim_{\chi\to 1^+}(-\chi+2-2)=-1$$

$$\lim_{\chi\to 1^-}\frac{|\chi-1||\chi-2|-2|\chi-1|}{|\chi+2|-3}=\lim_{\chi\to 1^-}\frac{-(\chi-1)(-\chi+2)+2(\chi-1)}{\chi+2-3}=\lim_{\chi\to 1^-}\frac{(\chi-1)(\chi-2+2)}{\chi-1}=\mathbf{1}$$

Άρα δεν υπάρχει το όριο του $\chi\to 1$

2ο Παράδειγμα

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\chi}}{\chi}$

Λύση

$$\lim_{\chi\to 0}\frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\chi}}{\chi}=\lim_{\chi\to 0}\frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\chi}\cdot\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}{\chi\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}=\lim_{\chi\to 0}\frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\chi}}{\chi\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}=\lim_{\chi\to 0}\frac{\sqrt{\eta\mu^2\chi}}{\chi\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}=$$

$\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{|\eta\mu\chi|}{\chi^2\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}$. Παίρνουμε τα πλευρικά όρια και έχουμε

όταν το $\chi>0$ τότε κοντά στο 0 το $\eta\mu\chi>0$ και επομένως $|\eta\mu\chi|=\eta\mu\chi$

$$\lim_{\chi\to 0^+}\frac{|\eta\mu\chi|}{\chi\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}=\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\eta\mu\chi}{\chi\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}=\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\eta\mu\chi}{\chi\cdot\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}=$$

$$= \lim_{\chi \to 0^+} \frac{\eta\mu\chi}{\chi} \lim_{\chi \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

όταν $\chi \to 0^-$ τότε $\chi < 0$ και $\eta\mu\chi < 0$

$$\lim_{\chi \to 0^-} \frac{|\eta\mu\chi|}{\chi\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}} = \lim_{\chi \to 0^-} \frac{-\eta\mu\chi}{\chi\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}} = \lim_{\chi \to 0^-} \frac{-\eta\mu\chi}{\chi} \cdot \lim_{\chi \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}} = -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{\chi \to 0} \frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\chi}}{\chi}$

Παρατήρηση
Όταν για την εύρεση του ορίου έχουμε την παράσταση (1-συνχ) συνήθως πολλαπλασιάζουμε με την συζυγή παράσταση (1+συνχ). Παρόμοια όταν έχουμε την παράσταση (1+συνχ)

ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
Όταν έχουμε όριο σύνθετης συνάρτησης f(g(x)), Θέτουμε g(x)=u και του $\chi \to x_0$ τότε το $u \to u_0$

Παράδειγμα 1

Αν για τη συνάρτηση $f: R \to R$ ισχύει $\lim_{\chi \to 2} \frac{f(\chi)}{\sqrt{\chi+7}-3} = 12$ να βρεθεί το $\lim_{\chi \to 0} \frac{f(\chi+2)}{\chi}$

Λύση

Θέτω $g(\chi) = \frac{f(\chi)}{\sqrt{\chi+7}-3} \Leftrightarrow f(\chi) = g(\chi)\left(\sqrt{\chi+7}-3\right)$. Αρα $\lim_{\chi \to 2} f(\chi) = \lim_{\chi \to 2}\left[g(\chi)\left(\sqrt{\chi+7}-3\right)\right] = 12 \cdot 0 = 0$. Θέτω $\chi + 2 = u \Rightarrow \chi = u - 2$ και του $\chi \to 0$ τότε $u \to 2$. Επομένως

$$\lim_{\chi \to 0} \frac{f(\chi+2)}{\chi} = \lim_{u \to 2} \frac{f(u)}{u-2} = \lim_{u \to 2} \frac{g(u)\left(\sqrt{u+7}-3\right)}{u-2} = \lim_{u \to 2} \frac{\left(\sqrt{u+7}-3\right)\left(\sqrt{u+7}+3\right)g(u)}{(u-2)\left(\sqrt{u+7}+3\right)} =$$

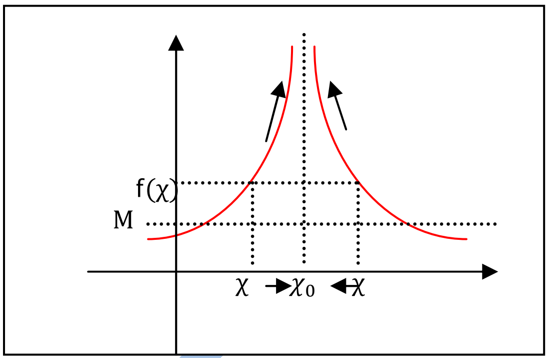
$$= \lim_{u \to 2} \frac{(u+7-9)g(u)}{(u-2)\left(\sqrt{u+7}+3\right)} = \lim_{u \to 2} \frac{g(u)}{\sqrt{u+7}+3} = \frac{12}{6} = 2$$

Παράδειγμα 2

ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\chi_0 \in R$ $(+\infty$ ή $-\infty)$

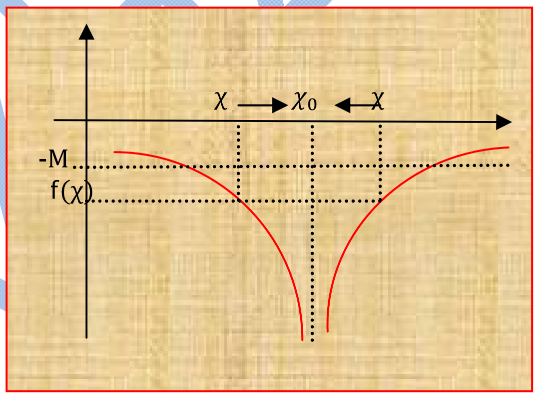
Όταν το χ προσεγγίζει το χ_0 με οποιονδήποτε τρόπο δηλ είτε $\chi<\chi_0$.είτε το $\chi>\chi_0$, τότε οι τιμές της συνάρτησης αυξάνονται απεριόριστα και είναι μεγαλύτερες από τον οποιονδήποτε θετικό αριθμό Μ. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\lim_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = +\infty$$

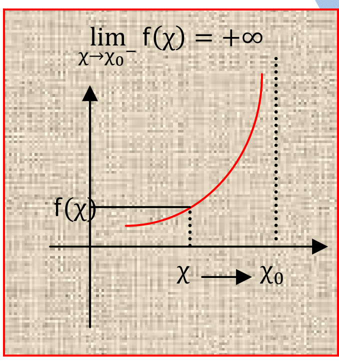


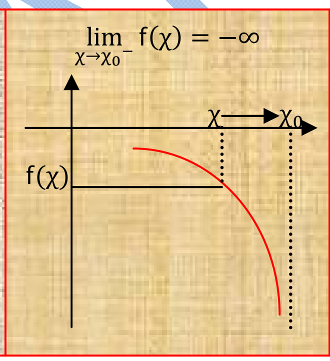
Όταν το χ προσεγγίζει το χ_0 με οποιονδήποτε τρόπο δηλ είτε $\chi<\chi_0$.είτε το $\chi>\chi_0$, τότε οι τιμές της συνάρτησης ελαττώνονται απεριόριστα και είναι μικρότερες από τον οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό -Μ με Μ>0 . Τότε στην περίπτωση αυτή έχουμε

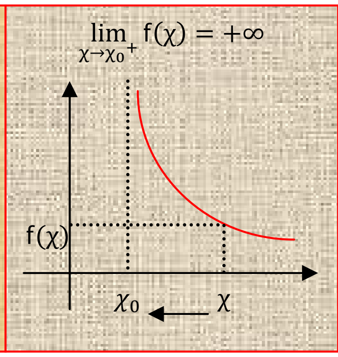
$$\lim_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = -\infty$$

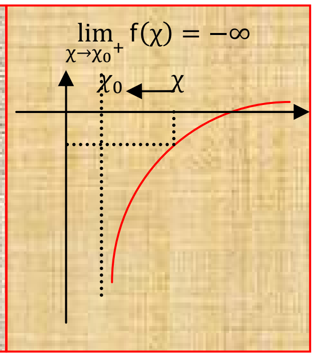


ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ









ΙΣΧΥΟΥΝ ΟΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ

$\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to\chi_0^-} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to\chi_0^+} f(\chi) = +\infty$

$\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to\chi_0^-} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to\chi_0^+} f(\chi) = -\infty$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1). Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = +\infty$, τότε $f(\chi) > 0$ *κοντά στο* χ_0 και αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = -\infty$ τότε $f(\chi) < 0$ *κοντά στο* χ_0

2). Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} (-f(\chi)) = -\infty$ και αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} (-f(\chi)) = +\infty$

3). Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \dfrac{1}{f(\chi)} = 0$

4). Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = 0$ και $f(\chi) > 0$ *κοντά στο* χ_0, τότε $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \dfrac{1}{f(\chi)} = +\infty$

5). Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = 0$ και $f(\chi) < 0$ *κοντά στο* χ_0, τότε $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \dfrac{1}{f(\chi)} = -\infty$

6). Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} |f(\chi)| = +\infty$

7.) Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \sqrt[\kappa]{f(\chi)} = +\infty$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $\lim\limits_{\chi\to0} \dfrac{1}{\chi^2} = +\infty$, **διότι ο παρονομαστής** $\lim\limits_{\chi\to0} \chi^2 = 0$ **και** $\chi^2 > 0$

2. $\lim\limits_{\chi\to0} \dfrac{1}{\chi^{2\nu}} = +\infty$, **με** $\nu \in N^*$, **διότι ο παρονομαστής** $\chi^{2\nu} \to 0$ **από θετικές τιμές**

3. $\lim\limits_{\chi\to0^+} \dfrac{1}{\chi} = +\infty$ **4.** $\lim\limits_{\chi\to0^+} \dfrac{1}{\chi^{2\nu+1}} = +\infty$, **με** $\nu \in N$

5. $\lim\limits_{\chi\to0^-} \dfrac{1}{\chi} = -\infty$ **6.** $\lim\limits_{\chi\to0^-} \dfrac{1}{\chi^{2\nu+1}} = -\infty$, **με** $\nu \in N$

Επομένως θεωρώντας τη συνάρτηση $f(\chi) = \dfrac{1}{\chi^{2\nu+1}}$, $\nu \in N$ **δεν υπάρχει** $\lim\limits_{\chi\to0} f(\chi)$

$\overline{R} = [-\infty, +\infty]$ είναι ένα νέο σύνολο που ονομάζεται R συμπαγές και περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία του R και ακόμη περιλαμβάνει ως στοιχεία το $-\infty$ **και** $+\infty$ αλλά δεν ισχύουν όλες οι ιδιότητες του R

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

$(+\infty) + (-\infty)$ **πρόσθεση με ετερόσημα άπειρα**

$(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$ **αφαίρεση με ομόσημα άπειρα**

$0 \cdot (\pm\infty)$ **πολλαπλασιασμός του 0 με άπειρο**

$\dfrac{0}{0}$ **και** $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ **διαίρεση με άπειρα**

Απροσδιόριστη πράξη είναι η πράξη εκείνη της οποίας το αποτέλεσμα δεν είναι πάντα το ίδιο. Δηλ. γνωστό

Ακόμη ισχύουν (ανάλογο του κριτηρίου παρεμβολής για το πεπερασμένο όριο)

Αν $f(\chi) \le g(\chi)$ **κοντα στο** χ_0 **και** $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = +\infty$ **τότε και** $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi) = +\infty$

Αν $f(\chi) \le g(\chi)$ **κοντα στο** χ_0 **και** $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi) = -\infty$ **τότε και** $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = -\infty$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκηση 1 $\left(\frac{\alpha}{0} \text{ με } \alpha \neq 0\right)$

Να υπολογισθούν τα όρια :

1. $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2\chi-1}{(\chi-1)^2}$ 2. $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2\chi-1}{|\chi-1|}$ 3. $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2\chi-1}{\chi-1}$ 4. $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2\chi-1}{\chi^2+2\chi-3}$

Λύση

1.

$\lim\limits_{\chi\to 1}(\chi-1)^2 = 0$ και $(\chi-1)^2 \succ 0$ και επομένως $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{1}{(\chi-1)^2} = +\infty$ και ακόμη

$\lim\limits_{\chi\to 1}(2\chi-1) = 1$. Άρα $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2\chi-1}{(\chi-1)^2} = \lim\limits_{\chi\to 1}\left[(2\chi-1)\cdot\dfrac{1}{(\chi-1)^2}\right] = 1\cdot(+\infty) = +\infty$

2.

$\lim\limits_{\chi\to 1}(|\chi-1|) = 0$ και $|\chi-1| \succ 0$ και επομένως $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{1}{|\chi-1|} = +\infty$ και

$\lim\limits_{\chi\to 1}(2\chi-1) = 1$. Άρα $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2\chi-1}{|\chi-1|} = \lim\limits_{\chi\to 1}\left[(2\chi-1)\dfrac{1}{|\chi-1|}\right] = 1(+\infty) = +\infty$

3.

$\lim\limits_{\chi\to 1}(\chi-1) = 0$ αλλά δεν ξέρουμε αν το $\chi-1$ πηγαίνει στο 0 από θετικές η από αρνητικές τιμές

Γι αυτό παίρνουμε πλευρικά όρια και έχουμε

$\lim\limits_{\chi\to 1^+}(\chi-1) = 0$ και επειδή $\chi\to 1^+$ τότε $\chi > 1 \Leftrightarrow \chi-1 > 0$. Άρα $\lim\limits_{\chi\to 1^+}\dfrac{1}{\chi-1} = +\infty$

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 1^+}\dfrac{2\chi-1}{\chi-1} = \lim\limits_{\chi\to 1^+}\left[(2\chi-1)\dfrac{1}{\chi-1}\right] = 1(+\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{\chi\to 1^-}(\chi-1) = 0$ και επειδή $\chi\to 1^-$ τότε $\chi < 1 \Leftrightarrow \chi-1 < 0$. Άρα $\lim\limits_{\chi\to 1^-}\dfrac{1}{\chi-1} = -\infty$

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 1^-}\dfrac{2\chi-1}{\chi-1} = \lim\limits_{\chi\to 1^-}\left[(2\chi-1)\dfrac{1}{\chi-1}\right] = 1(-\infty) = -\infty$

Αρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2\chi-1}{\chi-1}$

4.

$\chi^2+2\chi-3 = (\chi-1)(\chi+3)$ και επομένως $\dfrac{2\chi-1}{\chi^2+2\chi-3} = \dfrac{2\chi-1}{\chi-3}\cdot\dfrac{1}{\chi-1}$ και

$\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2\chi-1}{\chi-3} = -\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{\chi\to 1^+}(\chi-1) = 0$ και επειδή $\chi\to 1^+$ τότε $\chi > 1 \Leftrightarrow \chi-1 > 0$. Άρα $\lim\limits_{\chi\to 1^+}\dfrac{1}{\chi-1} = +\infty$

και $\lim\limits_{\chi\to 1^+}\dfrac{2\chi-1}{\chi^2+2\chi-3} = \lim\limits_{\chi\to 1^+}\left(\dfrac{2\chi-1}{\chi-3}\cdot\dfrac{1}{\chi-1}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)(+\infty) = -\infty$

$\lim_{\chi\to1^-}(\chi-1)=0$ και επειδή $\chi\to1^-$ τότε $\chi<1 \Leftrightarrow \chi-1<0$. Άρα $\lim_{\chi\to1^-}\frac{1}{\chi-1}=-\infty$

και $\lim_{\chi\to1^-}\frac{2\chi-1}{\chi^2+2\chi-3}=\lim_{\chi\to1^-}\left(\frac{2\chi-1}{\chi-3}\cdot\frac{1}{\chi-1}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)(-\infty)=+\infty$

άρα δεν υπάρχει το $\lim_{\chi\to1}\frac{2\chi-1}{\chi^2+2\chi-3}$ παρά μόνο τα πλευρικά όρια.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να βρεθεί το $\lim_{\chi\to0}\frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\chi}}{\chi^2}$

Λύση

$\lim_{\chi\to0}\frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\chi}}{\chi^2}=\lim_{\chi\to0}\frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\chi}\cdot\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}{\chi^2\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}=\lim_{\chi\to0}\frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\chi}}{\chi^2\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}=\lim_{\chi\to0}\frac{\sqrt{\eta\mu^2\chi}}{\chi^2\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}=$

$\lim_{\chi\to0}\frac{|\eta\mu\chi|}{\chi^2\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}$. Παίρνουμε τα πλευρικά όρια και έχουμε

όταν το $\chi>0$ τότε κοντά στο 0 το $\eta\mu\chi\succ0$ και επομένως $|\eta\mu\chi|=\eta\mu\chi$

$\lim_{\chi\to0^+}\frac{|\eta\mu\chi|}{\chi^2\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}=\lim_{\chi\to0^+}\frac{\eta\mu\chi}{\chi^2\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}=\lim_{\chi\to0^+}\frac{\eta\mu\chi}{\chi\cdot\chi\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}=$

$=\lim_{\chi\to0^+}\frac{\eta\mu\chi}{\chi}\lim_{\chi\to0^+}\frac{1}{\chi}\lim_{\chi\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}=1(+\infty)\frac{1}{\sqrt{2}}=+\infty$

όταν $\chi\prec0$ τότε κοντά στο 0 $\eta\mu\chi\prec0$ και επομένως $|\eta\mu\chi|=-\eta\mu\chi$ και επομένως

$\lim_{\chi\to0^-}\frac{|\eta\mu\chi|}{\chi^2\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}=\lim_{\chi\to0^-}\frac{-\eta\mu\chi}{\chi}\lim_{\chi\to0^-}\frac{1}{\chi}\lim_{\chi\to0^-}\frac{1}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}=-1(-\infty)\frac{1}{\sqrt{2}}=+\infty$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αν $\lim_{\chi\to1}\frac{\chi^2+\alpha\chi+1}{\chi^2+2\alpha\chi+5}=+\infty$, να υπολογισθεί $\alpha\in R$

Λύση

Θέτω $f(\chi)=\frac{\chi^2+\alpha\chi+1}{\chi^2+2\alpha\chi+5}\Leftrightarrow\chi^2+2\alpha\chi+5=\frac{1}{f(\chi)}\cdot(\chi^2+\alpha\chi+1)\Rightarrow$

$\Rightarrow\lim_{\chi\to1}(\chi^2+2\alpha\chi+5)=\lim_{\chi\to1}\left[\frac{1}{f(\chi)}\cdot(\chi^2+\alpha\chi+1)\right]\Rightarrow1+2\alpha+5=\lim_{\chi\to1}\frac{1}{f(\chi)}\cdot\lim_{\chi\to1}(\chi^2+\alpha\chi+1)\Rightarrow$

$\Rightarrow2\alpha+6=0(\alpha+2)\Rightarrow2\alpha+6=0\Rightarrow\alpha=\mathbf{-3}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Δουλεύουμε όπως στα άλλα όρια και στο τέλος προσέχουμε τις απροσδιόριστες πράξεις η διακρίνουμε περιπτώσεις αν έχουμε απροσδιοριστία

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Στην άσκηση 3 θα μπορούσαμε από την αρχή να απαιτήσουμε το 1 να είναι ρίζα του παρονομαστή και να προσδιορίσουμε την τιμή του α, η οποία θα ήταν δεκτή αν δεν μηδένιζε τον αριθμητή για να έχουμε όριο το $+\infty$. Όπως

$1^2+2\alpha+5=0\Leftrightarrow2\alpha+6=0\Leftrightarrow\alpha=-3$ και για $\chi=1$ και $\alpha=-3$ ο αριθμητής είναι

είναι ίσος με 2-3=-1$\neq$ **0**

Άσκηση 4

Αν το $\lim\limits_{\chi\to 0}[\chi\cdot f(\chi)] = 2$, να βείτε το $\lim\limits_{\chi\to 0}\left[\dfrac{f(\chi)}{\chi}\right]$

Λύση

Θέτω $g(\chi) = \chi\cdot f(\chi) \Leftrightarrow \dfrac{g(\chi)}{\chi^2} = \dfrac{f(\chi)}{\chi}$, μέ $\chi \neq 0$. Επομένως $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{g(\chi)}{\chi^2} = \lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)}{\chi}$. Αλλά

$\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{g(\chi)}{\chi^2} = \lim\limits_{\chi\to 0} g(\chi)\cdot\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1}{\chi^2} = 2(+\infty) = +\infty$. Άρα και $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)}{\chi} = +\infty$

Άσκηση 5

Αν ισχύει $\chi^2\cdot f(\chi) > 1$ για κάθε $\chi \in$ R, να δείξετε ότι $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi) = +\infty$

Λύση

$\chi^2\cdot f(\chi) > 1 \Leftrightarrow f(\chi) > \dfrac{1}{\chi^2} \Rightarrow \lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi) \geq \lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1}{\chi^2} \Rightarrow \lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi) \geq +\infty$ διότι $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1}{\chi^2} = +\infty$

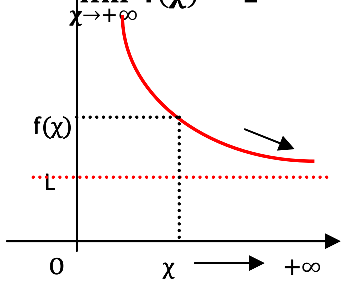
Επομένως $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi) = +\infty$

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

$(+\infty)$

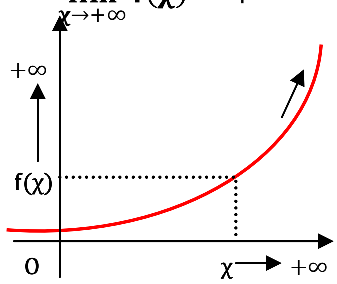
Όταν το χ αυξάνεται απεριόριστα, οι τιμές της f(χ) προσεγγίζουν την τιμή L. Σε αυτή τη περίπτωση γράφουμε

$$\lim_{\chi\to+\infty} f(\chi) = L$$



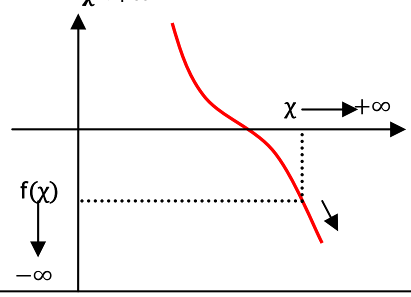
Όταν το χ αυξάνεται απεριόριστα, οι τιμές της f(χ αυξάνονται απεριόριστα. Σε αυτή τη περίπτωση γράφουμε

$$\lim_{\chi\to+\infty} f(\chi) = +\infty$$



Όταν το χ αυξάνεται απεριόριστα, οι τιμές της f(χ ελαττώνονται απεριόριστα. Σε αυτή τη περίπτωση γράφουμε

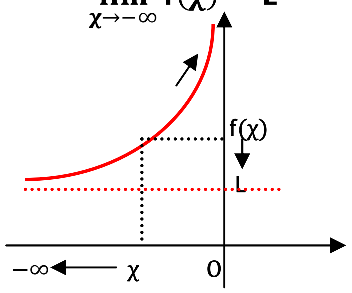
$$\lim_{\chi\to+\infty} f(\chi) = -\infty$$



$(-\infty)$

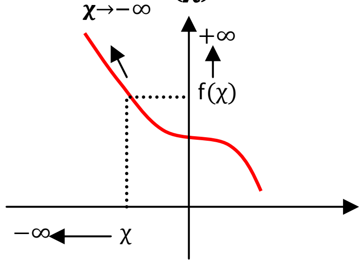
Όταν το χ ελαττώνεται απεριόριστα, οι τιμές της f(χ) προσεγγίζουν την τιμή L. Σε αυτή τη περίπτωση

$$\lim_{\chi\to-\infty} f(\chi) = L$$



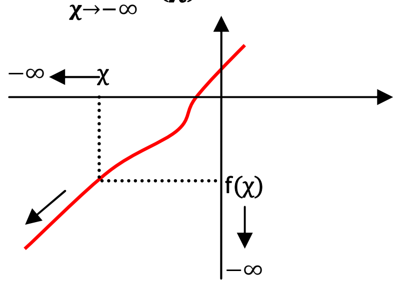
Όταν το χ ελαττώνεται απεριόριστα, οι τιμές της f(χ) αυξάνονται απεριόριστα. Τότε γράφουμε

$$\lim_{\chi\to-\infty} f(\chi) = +\infty$$



Όταν το χ ελαττώνεται απεριόριστα, οι τιμές της f(χ)ελαττώνονται απεριόριστα. Τότε γράφουμε

$$\lim_{\chi\to-\infty} f(\chi) = -\infty$$



Απαραίτητη προϋπόθεση για το όριο του χ→+∞ είναι η συνάρτηση να ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α,+∞), ενώ του χ→−∞ σε διάστημα της μορφής (−∞, α)

ΒΑΣΙΚΕΣ ΟΡΙΑ

1. $\lim\limits_{\chi\to+\infty} \chi^{\nu} = +\infty,\ \nu \in N^*$ **2.** $\lim\limits_{\chi\to+\infty} \frac{1}{\chi^{\nu}} = 0\ ,\nu \in N^*$

3. $\lim\limits_{\chi\to-\infty} \chi^{\nu} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν ν άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν ν περιττός} \end{cases}\quad \nu \in N^*$ **4.** $\lim\limits_{\chi\to-\infty} \frac{1}{\chi^{\nu}} = 0,\ \nu \in N^*$

1. Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(\chi) = \alpha_{\nu}\chi^{\nu} + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\chi + \alpha_0,\ \ \nu \in N^*$

Πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A_f = (-\infty, +\infty)$. Επομένως έχει νόημα το όριο στο $+\infty$

τότε $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to+\infty} (\alpha_{\nu}\chi^{\nu} + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\chi + \alpha_0) =$

$= \lim\limits_{\chi\to+\infty} \chi^{\nu}\left(\alpha_{\nu} + \alpha_{\nu-1}\frac{1}{\chi} + \alpha_{\nu-2}\frac{1}{\chi^2} + \cdots + \alpha_1\frac{1}{\chi^{\nu-1}} + \alpha_0\frac{1}{\chi^{\nu}}\right) =$

$= \lim\limits_{\chi\to+\infty} \chi^{\nu} \cdot \lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\alpha_{\nu} + \alpha_{\nu-1}\frac{1}{\chi} + \alpha_{\nu-2}\frac{1}{\chi^2} + \cdots + \alpha_1\frac{1}{\chi^{\nu-1}} + \alpha_0\frac{1}{\chi^{\nu}}\right) =$

$= \lim\limits_{\chi\to+\infty} \chi^{\nu} \cdot (\alpha_{\nu} + \alpha_{\nu-1}\cdot 0 + \alpha_{\nu-2}\cdot 0 + \cdots + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_0 \cdot 0) = \lim\limits_{\chi\to+\infty} \alpha_{\nu}\chi^{\nu}$

ΔΗΛΑΔΗ

το όριο της πολυωνυμικής συνάρτησης ισούται με το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου της

π.χ

$\lim\limits_{\chi\to+\infty} (-3\chi^3 + 2\chi^2 - 2\chi + 1) = \lim\limits_{\chi\to+\infty} (-3\chi^3) = -3(+\infty) = -\infty$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ακριβώς τα ίδια ισχύουν για το όριο στο $(-\infty)$

2. Όριο ρητής συνάρτησης

Εστω συνάρτηση με τύπο $f(\chi) = \frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$, **όπου $P(\chi)$ και $Q(\chi)$ πολυώνυμα με**

$P(\chi) = \alpha_{\nu}\chi^{\nu} + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\chi + \alpha_0,\ \ \nu \in N^*$ **και**

$Q(\chi) = \alpha_{\mu}\chi^{\mu} + \alpha_{\mu-1}\chi^{\mu-1} + \cdots + \alpha_1\chi + \alpha_0,\ \ \mu \in N^*$

τότε $\lim\limits_{\chi\to+\infty} \frac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \frac{\lim\limits_{\chi\to+\infty} P(\chi)}{\lim\limits_{\chi\to+\infty} Q(\chi)} = \frac{\alpha_{\nu}\chi^{\nu}}{\alpha_{\mu}\chi^{\mu}}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

- *Αν αριθμητής και παρονομαστής έχουν τον ίδιο βαθμό, τότε το όριο ισούται με το πηλίκο των συντελεστών των μεγιστοβαθμίων όρων*
- *Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή, τότε το όριο είναι* $\pm\infty$
- *Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή, τότε το όριο είναι μηδέν*

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια

1. $\lim\limits_{\chi\to+\infty} \frac{\chi^5 - 2\chi + 1}{2\chi^3 + \chi^2 - \chi + 23}$ 2. $\lim\limits_{\chi\to-\infty} \frac{-2\chi^3 + \chi^2 - 2}{4\chi^3 - 6}$ 3. $\lim\limits_{\chi\to-\infty} \frac{-4\chi^2 + 2\chi}{-12\chi^{12} + 3\chi^2 - 2\chi + 1}$

Λύση

1. $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi^5-2\chi+1}{2\chi^3+\chi^2-\chi+23}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi^5}{2\chi^3}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi^3}{2}=\dfrac{+\infty}{2}=+\infty$

2. $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{-2\chi^3+\chi^2-2}{4\chi^3-6}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{-2\chi^3}{4\chi^3}=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{-4\chi^2+2\chi}{-12\chi^{12}+3\chi^2-2\chi+1}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{-4\chi^2}{-12\chi^{12}}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{1}{3\chi^{10}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Για τα πεδία ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων, μπορούμε να το αποφύγουμε ως εξής στην περίπτωση 1 όπου ο παρονομαστής είναι $2\chi^3+\chi^2-\chi+23$ *, του* $\chi\to+\infty$ *έχουμε* $\lim\limits_{\chi\to+\infty}(2\chi^3+\chi^2-\chi+23)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}(2\chi^3)=+\infty$. *Και επομένως κοντά στο* $+\infty$ *η παράσταση* $2\chi^3+\chi^2-\chi+23$ *έχει πρόσημο το ίδιο με το πρόσημο του ορίου και επομένως είναι θετική*
Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε σε όλες τις περιπτώσεις, γιατί η εύρεση του πεδίου ορισμού είναι ορισμένες φορές επίπονη και δυσκολότερη από την ίδια την εύρεση του ορίου

ΑΣΚΗΣΗ 2 (ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ)

Στην αρχή λύνουμε την άσκηση αδιαφορώντας για τις τιμές τις παραμέτρου, θεωρώντας ότι είναι ένας οιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, που μας επιτρέπει τις πράξεις

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{(\kappa-1)\chi^3+4\chi+1}{\kappa\chi^2+1}$, με κ ∈ R

Λύση

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{(\kappa-1)\chi^3+4\chi+1}{\kappa\chi^2+1}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{(\kappa-1)\chi^3}{\kappa\chi^2}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\dfrac{\kappa-1}{\kappa}\cdot\chi\right)=\dfrac{\kappa-1}{\kappa}\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi$

Οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις

α) με κ διαφορετικό του μηδενός ($\kappa\neq0$)

Αν $\dfrac{\kappa-1}{\kappa}>0\Leftrightarrow\kappa\in(-\infty,0)\mathrm{U}(1,+\infty)$ τότε $\dfrac{\kappa-1}{\kappa}\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi=\left(\dfrac{\kappa-1}{\kappa}\right)\cdot(+\infty)=+\infty$

Αν $\dfrac{\kappa-1}{\kappa}<0\Leftrightarrow\kappa\in(0,1)$ οπότε $\dfrac{\kappa-1}{\kappa}\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi=\left(\dfrac{\kappa-1}{\kappa}\right)\cdot(+\infty)=-\infty$

Αν $\dfrac{\kappa-1}{\kappa}=0\Leftrightarrow\kappa=1$ και η αρχική γίνεται $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{(\kappa-1)\chi^3+4\chi+1}{\kappa\chi^2+1}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{4\chi+1}{\chi^2+1}=$

$=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{4\chi}{\chi^2}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{4}{\chi}=0$

β) Αν κ=0

τότε η δοθείσα γίνεται

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{(\kappa-1)\chi^3+4\chi+1}{\kappa\chi^2+1}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{-\chi^3+4\chi+1}{1}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}(-\chi^3+4\chi+1)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}(-\chi^3)=-\infty$

ΟΡΙΟ ΑΡΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ριζικά δεύτερης τάξης
Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ορίων και αν καταλήξουμε σε απροσδιοριστία πολλαπλασιάζουμε με την συζυγή παράσταση

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to-\infty}f(\chi)$ αν $f(\chi)=\sqrt{\chi^2+\chi+1}$

Λύση

$$\lim_{\chi\to-\infty}\sqrt{\chi^2+\chi+1}=\lim_{\chi\to-\infty}\sqrt{\chi^2\left(1+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}\right)}=\lim_{\chi\to-\infty}\left[|\chi|\sqrt{1+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}\right]=\lim_{\chi\to-\infty}(-\chi)\sqrt{1+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}=$$

$$=\lim_{\chi\to-\infty}(-\chi)\cdot\lim_{\chi\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}=+\infty\cdot 1=+\infty$$

ΠΑΡΑΤΗΣΗΣΗ

αφού το $\chi\to-\infty$ τότε το χ θεωρείται αρνητικό κοντά στο $-\infty$ οπότε $|\chi|=-\chi$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to-\infty} f(\chi)$ αν $f(\chi)=\sqrt{\chi^2+\chi+1}-\chi$

Λύση

$$\lim_{\chi\to-\infty}\left(\sqrt{\chi^2+\chi+1}-\chi\right)=\lim_{\chi\to-\infty}\left(\sqrt{\chi^2+\chi+1}-\chi\right)=\lim_{\chi\to-\infty}\left[-\chi\left(\sqrt{1+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}\right)-\chi\right]=$$

$$=\lim_{\chi\to-\infty}\left[-\chi\left(\sqrt{1+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}+1\right)\right]=+\infty\cdot 2=+\infty$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν είχαμε να βρούμε $\sqrt{\chi^2+\chi+1}-\chi$ και εφαρμόζαμε τις ιδιότητες των ορίων τότε θα καταλήγαμε σε απροσδιοριστία

Το όριο στην περίπτωση αυτή βρίσκεται ως εξής

$$\lim_{\chi\to-\infty}\left(\sqrt{\chi^2+\chi+1}-\chi\right)=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{\chi^2+\chi+1}-\chi\right)\left(\sqrt{\chi^2+\chi+1}-\chi\right)}{\left(\sqrt{\chi^2+\chi+1}+\chi\right)}=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{\chi^2+\chi+1-\chi^2}{\sqrt{\chi^2+\chi+1}+\chi}=$$

$$=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{\chi+1}{\chi\left(\sqrt{1+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}\right)+\chi}=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{\chi\left(1+\frac{1}{\chi}\right)}{\chi\left(\sqrt{1+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}+1\right)}=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{\chi}}{\sqrt{1+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}+1}=$$

$$=\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{1}{2}$$

Αν τα ριζικά είναι ανώτερης τάξης τότε εφαρμόζουμε την ταυτότητα Newton

$\boldsymbol{\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\cdot\beta+\alpha^{\nu-3}\cdot\beta^2+\cdots+\beta^{\nu-1}}$ $,\nu\in N^*$ ή

$\boldsymbol{\alpha^\nu+\beta^\nu=(\alpha+\beta)(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\cdot\beta+\alpha^{\nu-3}\cdot\beta^2-\cdots-\beta^{\nu-1}}$ $,\nu\in N^*$ *και ν περιττός*

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\chi+2}-\sqrt[3]{\chi}\right)$

Λύση

Αν εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των ορίων καταλήγουμε σε απροσδιοριστία της μορφής $(+\infty)-(+\infty)$. Οπότε εφαρμόζω την ταυτότητα **Newton** για $\nu=3$ και έχω

$\alpha-\beta=\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$ και αν θεωρήσω ότι $\alpha=\sqrt[3]{\chi+2}$ και $\beta=\sqrt[3]{\chi}$ θα έχω

$$\sqrt[3]{\chi+2}-\sqrt[3]{\chi}=\frac{\left(\sqrt[3]{\chi+2}\right)^3-(\sqrt[3]{\chi})^3}{\left(\sqrt[3]{\chi+2}\right)^2+\sqrt[3]{\chi+2}\cdot\sqrt[3]{\chi}+(\sqrt[3]{\chi})^2}=\frac{\chi+2-\chi}{\left(\sqrt[3]{\chi+2}\right)^2+\sqrt[3]{\chi+2}\cdot\sqrt[3]{\chi}+(\sqrt[3]{\chi})^2}=$$

$$= \frac{2}{\left(\sqrt[3]{\chi+2}\right)^2 + \sqrt[3]{\chi+2}\cdot\sqrt[3]{\chi} + (\sqrt[3]{\chi})^2}$$

Αλλά $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\left(\sqrt[3]{\chi+2}\right)^2 + \sqrt[3]{\chi+2}\cdot\sqrt[3]{\chi} + \left(\sqrt[3]{\chi}\right)^2\right) = +\infty$ οπότε

$$\lim_{\chi\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\chi+2} - \sqrt[3]{\chi}\right) = \lim_{\chi\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{\chi+2}\right)^2 + \sqrt[3]{\chi+2}\cdot\sqrt[3]{\chi} + (\sqrt[3]{\chi})^2} = 0$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\chi^2+2\chi} - \sqrt[3]{\chi}\right)$

Λύση

Αν εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των ορίων καταλήγουμε σε απροσδιοριστία της μορφής $(+\infty)-(+\infty)$. Οπότε εφαρμόζω την ταυτότητα **Newton** για $\nu=3$ και έχω

$\alpha-\beta = \dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$ και αν θεωρήσω ότι $\alpha = \sqrt[3]{\chi^2+2\chi}$ και $\beta = \sqrt[3]{\chi}$ θα έχω

$$\sqrt[3]{\chi^2+2\chi} - \sqrt[3]{\chi} = \frac{\left(\sqrt[3]{\chi^2+2\chi}\right)^3 - (\sqrt[3]{\chi})^3}{\left(\sqrt[3]{\chi^2+2\chi}\right)^2 + \sqrt[3]{\chi^2+2\chi}\cdot\sqrt[3]{\chi}+(\sqrt[3]{\chi})^2} = \frac{\chi^2+2\chi-\chi}{\left(\sqrt[3]{\chi^2+2\chi}\right)^2 + \sqrt[3]{\chi^2+2\chi}\cdot\sqrt[3]{\chi}+(\sqrt[3]{\chi})^2} >$$

$$> \frac{\chi^2+2\chi-\chi}{\left(\sqrt[3]{\chi^2+2\chi}\right)^2} = \frac{\chi^2\left(1+\frac{2}{\chi}\right)}{\left(\sqrt[3]{\chi^2\left(1+\frac{2}{\chi}\right)}\right)^2} = \frac{\chi^2\left(1+\frac{2}{\chi}\right)}{\sqrt[3]{\chi^4}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{\chi}}} = \frac{\chi^2\left(1+\frac{2}{\chi}\right)}{\chi^{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{\chi}}} = \chi^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1+\frac{2}{\chi}}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{\chi}}}.\text{ Αρα τελικά}$$

$$\sqrt[3]{\chi^2+2\chi} - \sqrt[3]{\chi} > \chi^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1+\frac{2}{\chi}}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{\chi}}}.\ \text{ Αλλά } \lim_{\chi\to+\infty}\left(\chi^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1+\frac{2}{\chi}}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{\chi}}}\right) = +\infty\cdot\frac{1+0}{\sqrt[3]{1+0}} = +\infty \text{ και επομένως και}$$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\chi^2+2\chi} - \sqrt[3]{\chi}\right) = +\infty$$

ΡΙΖΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\mathbf{2\chi+4}} - \sqrt{\mathbf{3\chi+1}}}{\mathbf{\chi-2}}$

Λύση

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\mathbf{2\chi+4}} - \sqrt{\mathbf{3\chi+1}}}{\mathbf{\chi-2}} = \lim_{\chi\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\chi\left(2+\frac{4}{\chi}\right)} - \sqrt{\chi\left(3+\frac{1}{\chi}\right)}}{\chi-2} = \lim_{\chi\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\chi}\cdot\sqrt[3]{2+\frac{4}{\chi}} - \sqrt{\chi}\sqrt{3+\frac{1}{\chi}}}{\chi-2} =$$

$$= \lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{2+\frac{4}{\chi}} - \chi^{\frac{1}{2}}\sqrt{3+\frac{1}{\chi}}}{\chi-2} = \lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^{\frac{2}{6}}\cdot\sqrt[3]{2+\frac{4}{\chi}} - \chi^{\frac{3}{6}}\cdot\sqrt{3+\frac{1}{\chi}}}{\chi\left(1-\frac{2}{\chi}\right)} =$$

$$= \lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^{\frac{3}{6}}\cdot\left(\frac{1}{\chi^{\frac{1}{6}}}\cdot\sqrt[3]{2+\frac{4}{\chi}} - \sqrt{3+\frac{1}{\chi}}\right)}{\chi\left(1-\frac{2}{\chi}\right)} = \lim_{\chi\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{\chi}}\cdot\frac{\frac{1}{\chi^{\frac{1}{6}}}\cdot\sqrt[3]{2+\frac{4}{\chi}} - \sqrt{3+\frac{1}{\chi}}}{1-\frac{2}{\chi}}\right] = 0$$

Διότι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\chi^{\frac{1}{6}}}\cdot\sqrt[3]{2+\dfrac{4}{\chi}}-\sqrt{3+\dfrac{1}{\chi}}}{1-\dfrac{2}{\chi}}=\dfrac{0\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}}{1-0}=-\sqrt{3}$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\chi}}=0$

ΙΣΟΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

Ισχύει και εδώ το κριτήριο παρεμβολής δηλαδή

Αν $\boldsymbol{g(\chi)\le f(\chi)\le h(\chi)}$ ***και*** $\boldsymbol{\lim\limits_{\chi\to\pm\infty} g(\chi)=\lim\limits_{\chi\to\pm\infty} h(\chi)=L}$ ***τότε και*** $\boldsymbol{\lim\limits_{\chi\to\pm\infty} f(\chi)=L}$

ΑΚΟΜΗ ΙΣΧΎΟΥΝ

Αν $\mathbf{f(\chi)\le g(\chi)}$ **κοντα στο** $\pm\infty$ **και** $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\mathbf{f(\chi)}=+\infty$ **τότε και** $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\mathbf{g(\chi)}=+\infty$

Αν $\mathbf{f(\chi)\le g(\chi)}$ **κοντα στο** $\pm\infty$ **και** $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\mathbf{g(\chi)}=-\infty$ **τότε και** $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\mathbf{f(\chi)}=-\infty$

Παράδειγμα 1

Αν για τη συνάρτηση f:(0,+∞)→R ισχύει:

$\dfrac{\sqrt{\chi^2+\chi+1}}{\chi}\le 1+\dfrac{f(\chi)}{\chi}\le\sqrt{\chi^2+1}-\chi+1$ να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}f(\chi)$

Λύση

$\dfrac{\sqrt{\chi^2+\chi+1}}{\chi}\le 1+\dfrac{f(\chi)}{\chi}\le\sqrt{\chi^2+1}-\chi+1 \Leftrightarrow \sqrt{\chi^2+\chi+1}\le\chi+f(\chi)\le\chi\sqrt{\chi^2+1}-\chi^2+\chi\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{\chi^2+\chi+1}-\chi\le f(\chi)\le\chi\sqrt{\chi^2+1}-\chi^2$ και έχουμε:

$$\lim_{\chi\to+\infty}\left(\sqrt{\chi^2+\chi+1}-\chi\right)=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\chi^2+\chi+1}-\chi\right)\left(\sqrt{\chi^2+\chi+1}+\chi\right)}{\sqrt{\chi^2+\chi+1}+\chi}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^2+\chi+1-\chi^2}{\sqrt{\chi^2+\chi+1}+\chi}=$$

$$=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi+1}{|\chi|\sqrt{1+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}+\chi}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi+1}{\chi\sqrt{1+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}+\chi}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi\left(1+\frac{1}{\chi}\right)}{\chi\left(\sqrt{1+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\chi}}{\sqrt{1+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}+1}=\frac{1}{2}\ \textit{και}$$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\left(\chi\sqrt{\chi^2+1}-\chi^2\right)=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^2(\chi^2+1)-\chi^4}{\chi\sqrt{\chi^2+1}+\chi^2}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^2}{\chi^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}\right)+\chi^2}=$$

$$=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^2}{\chi^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}+1\right)}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}+1}=\frac{1}{2}$$ και απο κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{\chi\to+\infty}f(\chi)=\frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 2

Αν για τη συνάρτηση $\mathbf{f:R\to R}$ **ισχύει η σχέση** $\mathbf{f(\chi+1)\le\chi\le f(\chi)+1}$ **για κάθε** $\boldsymbol{\chi\in R}$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\sqrt{f(\chi)}}{\chi-2}$

Λύση

$f(\chi+1)\le\chi\Rightarrow f(\chi)\le\chi-1$ αν θέσω όπου χ το $\chi-1$ και από
$\chi\le f(\chi)+1\Rightarrow\chi-1\le f(\chi)$. Επομένως και από τις δύο σέσεις τελικά έχω ότι
f(χ)=χ-1. Άρα το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\sqrt{f(\chi)}}{\chi-2}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\sqrt{\chi-1}}{\chi-2}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\sqrt{\chi}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{\chi}}}{\chi-2}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\sqrt{\chi}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{\chi}}}{\chi\left(1-\frac{2}{\chi}\right)}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\chi}}\cdot\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{\chi}}}{1-\frac{2}{\chi}}=$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{1-0}}{1-0}=0$$

ΟΡΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΏΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

1. $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}$ **2.** $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\chi}$ **3.** $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\chi\eta\mu\dfrac{1}{\chi}\right)$ **4.** $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\chi\varepsilon\varphi\dfrac{1}{\chi}\right)$

Λύση

1.

Αν χ→+∞

$\left|\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}\right|=\dfrac{|\eta\mu\chi|}{|\chi|}\le\dfrac{1}{|\chi|}=\dfrac{1}{\chi}$ αφού $\chi\to+\infty$ και επομένως θεωρείται θετικό. Άρα τελικά ισχύει:
$-\dfrac{1}{\chi}\le\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}\le\dfrac{1}{\chi}$ και επειδή $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{\chi}\right)=0$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{1}{\chi}=0$ από κριτήριο παρεμβολής και
$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}=0$

Αν χ→-∞ τότε το χ θεωρείται αρνητικό και επομένως
$\left|\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}\right|=\dfrac{|\eta\mu\chi|}{|\chi|}\le\dfrac{1}{|\chi|}=-\dfrac{1}{\chi}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\chi}\le\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}\le-\dfrac{1}{\chi}$ και επειδή $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{\chi}\right)=0$ και $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{1}{\chi}=0$
από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι:
$\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}=0$

2.

$\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\chi}\right|=\dfrac{|\sigma\upsilon\nu\chi|}{|\chi|}\le\dfrac{1}{|\chi|}$ και τελικά ισχύει $-\dfrac{1}{|\chi|}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\chi}\le\dfrac{1}{|\chi|}$ και επειδή
$\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{|\chi|}\right)=0$ και $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\dfrac{1}{|\chi|}=0$ και $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\chi}=0$

3.

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\chi\eta\mu\dfrac{1}{\chi}\right)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\dfrac{\eta\mu\frac{1}{\chi}}{\frac{1}{\chi}}\right)$ και αν θέσω $\dfrac{1}{\chi}=\tau$ τότε όταν $\chi\to+\infty$ το $\tau\to0$ και έχουμε

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\dfrac{\eta\mu\frac{1}{\chi}}{\frac{1}{\chi}}\right)=\lim\limits_{\tau\to+0}\dfrac{\eta\mu\tau}{\tau}=1$. Επομένως και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\chi\eta\mu\dfrac{1}{\chi}\right)=1$

4.

$$\lim_{\chi\to+\infty}\left(\chi\varepsilon\varphi\frac{1}{\chi}\right)=\lim_{\chi\to+\infty}\left(\frac{\chi\eta\mu\frac{1}{\chi}}{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\chi}}\right)=\frac{\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\chi\eta\mu\frac{1}{\chi}\right)}{\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\chi}\right)}=\frac{1}{1}=1$$

Στις παρακάτω εφαρμογές δουλεύουμε με στόχο να απαλλαγούμε από τις τριγωνομετρικές παραστάσεις. Και ακόμη παίρνουμε υπόψη μας τις ιδιότητες

1. $\boldsymbol{A\nu\ |f(\chi)|\le g(\chi)\ \kappa\alpha\iota\ \lim\limits_{\chi\to\pm\infty} g(\chi)=0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \kappa\alpha\iota\ \lim\limits_{\chi\to\pm\infty} f(\chi)=0}$
2. $\boldsymbol{A\nu\ f(\chi)>g(\chi)\ \kappa\alpha\iota\ \lim\limits_{\chi\to\pm\infty} g(\chi)=+\infty\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \kappa\alpha\iota\ \lim\limits_{\chi\to\pm\infty} f(\chi)=+\infty}$
3. $\boldsymbol{A\nu\ f(\chi)<g(\chi)\ \kappa\alpha\iota\ \lim\limits_{\chi\to\pm\infty} g(\chi)=-\infty\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \kappa\alpha\iota\ \lim\limits_{\chi\to\pm\infty} f(\chi)=-\infty}$

Η δυσκολία κάθε φορά είναι να δούμε ποια από τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις θα εφαρμόσουμε. Γι αυτό κάνουμε το εξής: Δημιουργούμε το πηλίκο των μεγιστοβαθμίων όρων. Αν αυτό τείνει στο μηδέν παίρνουμε την 1. Αν τείνει στο +∞ την 2 και αν τείνει στο -∞ την 3

Παράδειγμα 1

Νά βρεθεί το $\boldsymbol{\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{2\chi\eta\mu5\chi+3\chi}{\chi^2-1}}$

Λύση

Το πηλίκο των μεγιστοβαθμίων όρων ως προς χ είναι $\dfrac{3\chi}{\chi^2}=\dfrac{3}{\chi}$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{3}{\chi}=0$. Επομένως

$$\left|\frac{2\chi\eta\mu5\chi+3\chi}{\chi^2-1}\right|=\frac{|2\chi\eta\mu5\chi+3\chi|}{|\chi^2-1|}\le\frac{|2\chi\eta\mu5\chi|+|3\chi|}{|\chi^2-1|}=\frac{2\chi|\eta\mu5\chi|+3\chi}{\chi^2-1}\le\frac{2\chi+3\chi}{\chi^2-1}=\frac{5\chi}{\chi^2-1}$$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{5\chi}{\chi^2-1}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{5\chi}{\chi^2}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{5}{\chi}=0$$

Παρατήρηση

Επειδή το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}(\chi^2-1)=+\infty$ τότε σε περιοχή του $+\infty$ το $\chi^2-1>0$. Άρα $|\chi^2-1|=\chi^2-1$

Άλλος τρόπος επίλυσης είναι να διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με χ^2

Παράδειγμα 2

Νά βρεθεί το $\boldsymbol{\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi^3+\eta\mu\chi}{\chi^2-1}}$

Λύση

Το πηλίκο των μεγιστοβαθμίων όρων ως προς χ είναι $\dfrac{\chi^3}{\chi^2}=\chi$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi=+\infty$. Επομένως

χρησιμοποιούμε την περίπτωση 2

Από την γνωστή σχέση $-1\le\eta\mu\chi\le1$ έχω $\eta\mu\chi\ge-1\Leftrightarrow\chi^3+\eta\mu\chi\ge\chi^3-1$ και

Επειδή το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}(\chi^2-1)=+\infty$ τότε σε περιοχή του $+\infty$ το $\chi^2-1>0$.

έχω $\dfrac{\chi^3+\eta\mu\chi}{\chi^2-1}\ge\dfrac{\chi^3-1}{\chi^2-1}$. Όμως $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi^3-1}{\chi^2-1}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi^3}{\chi^2}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi=+\infty$

Άλλος τρόπος επίλυσης είναι να διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\boldsymbol{\chi^2}$δηλ με το μικρότερο βαθμό

Παράδειγμα 3

Νά βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi^3+\eta\mu\chi}{\chi^2-1}$

Λύση

Το πηλίκο των μεγιστοβαθμίων όρων ως προς χ είναι $\dfrac{\chi^3}{\chi^2}=\chi$ και $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\chi=-\infty$. Επομένως χρησιμοποιούμε την περίπτωση 3

Από την γνωστή σχέση $-1\le\eta\mu\chi\le1$ έχω $\eta\mu\chi\le1 \;\Leftrightarrow \eta\mu\chi+\chi^3\le1+\chi^3 \Leftrightarrow$

Επειδή το $\lim\limits_{\chi\to-\infty}(\chi^2-1)=+\infty$ τότε σε περιοχή του $-\infty$ το $\chi^2-1>0$. ΄Αρα

$\dfrac{\eta\mu\chi+\chi^3}{\chi^2-1}\le\dfrac{1+\chi^3}{\chi^2-1}$. ΄Ομως $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{1+\chi^3}{\chi^2-1}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\chi^3}{\chi^2}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\chi=-\infty$.

΄Αρα και $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\eta\mu\chi+\chi^3}{\chi^2-1}=-\infty$

Άλλος τρόπος επίλυσης είναι να διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με χ^2 δηλ με το μικρότερο βαθμό

Παράδειγμα 4

Νά βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi+2\eta\mu\chi}{\chi-1}$

Λύση

Παρατηρούμε ότι είναι του ίδιου βαθμού ως προς χ ο αριθμητής και ο παρονομαστής. Σε αυτή τη περίπτωση διαιρούμε με χ και έχω

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi+2\eta\mu\chi}{\chi-1}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\dfrac{\chi+2\eta\mu\chi}{\chi}}{\dfrac{\chi-1}{\chi}}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{1+\dfrac{2\eta\mu\chi}{\chi}}{1-\dfrac{1}{\chi}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.
Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\chi+\psi)=f(\chi)f(\psi)$ για κάθε $\chi,\psi \in R$ με $f(0)\neq 0$ και $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)=f(0)$ να δειχθεί ότι

ι) $f(0)=1$

ιι) $\lim_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=f(\chi_0)$

2.
Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(\chi\cdot\psi)=f(\chi)+f(\psi)$ για κάθε $\chi,\psi\in R^*$ και ισχύει ότι $\lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi)=f(1)$. Να δειχθούν ότι

I) $f(1)=0$

II) $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=f(\chi_0)$

3.
Αν για τις πραγματικές συναρτήσεις f, g ισχύει $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\left(f^2(\chi)+g^2(\chi)\right)=0.$

Να υπολογίσετε τα όρια:

I. $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}[f(\chi)+g(\chi)]$

II. $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}[f(\chi)\cdot g(\chi)]$

III. Αν $f^2(\chi)+g^2(\chi)\leq 2\eta\mu\chi f(\chi)$ γιακάθε $\chi\in R$. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0} g(\chi)=0$

4.
Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και ισχύει

$\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{f(\chi)-f(1)}{\chi-1}=L, L\in R$ να δειχθεί ότι:

$$\lim_{\chi\to 1}\frac{f(\chi)-\chi f(1)}{\chi(\chi^2-1)}=\frac{1}{2}\big(L-f(1)\big)$$

5.
Αν για κάθε $\chi\in R$ ισχύει $3(\chi^2-1)\leq f(\chi)\leq 2(\chi^3-1)$ να βρεθούν

I. $\lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi)$ II . $f(1)$ III. $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{f(\chi)-f(1)}{\chi-1}$ III. $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{f(\chi)}{\eta\mu(\chi-1)}$

6.
Αν για κάθε $\chi\in R$ ισχύει $2\eta\mu(4\chi)\chi|\chi|\leq f(\chi)\leq 8\chi+\chi|\chi|$ να υπολογισθούν

I. $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)$ II. $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)}{\chi}$

7.
Να βρεθεί ο $\alpha\in R$ και ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(\beta,\gamma)$, με $\beta,\gamma\in R$ ώστε να

υπάρχουν τα $\lim\limits_{\chi\to\frac{\pi}{2}} f(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to-\frac{\pi}{2}} f(\chi)$ για τη συνάρτηση με τύπο

$$f(\chi)=\begin{cases} -2\eta\mu\chi, & \chi\le-\frac{\pi}{2} \\ \alpha\eta\mu\chi+\beta+\gamma, & -\frac{\pi}{2}<\chi<\frac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu\chi, & \chi\ge\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

8.

Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{f(\chi)-L}{f(\chi)+L}=0$ να δειχθεί ότι $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=L, L\in R$

9.

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=l$, με $l\in R$. Να δειχθεί ότι:

α) Αν η f είναι άρτια , $\lim\limits_{\chi\to-\chi_0} f(\chi)=l$

β) Αν η f είναι περιττή , $\lim\limits_{\chi\to-\chi_0} f(\chi)=-l$

10.

Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια

α) $\lim\limits_{\chi\to0}\dfrac{\chi^3\eta\mu\frac{1}{\chi}+\varepsilon\varphi^2\chi}{\eta\mu^2\chi+\varepsilon\varphi^2\chi}$ β) $\lim\limits_{\chi\to\pi}\dfrac{\eta\mu^2\chi}{\chi-\pi}$ γ) $\lim\limits_{\chi\to0}\eta\mu\big(\eta\mu(\eta\mu2\chi)\big)$

11.

Δίνεται η συνάρτηση f τέτοια ώστε

$f(\chi)\le\dfrac{\sqrt{2\chi-2}}{(\chi-2)^2}$ για κάθε $\chi\in(1,2)$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to2^-} f(\chi)$

12.

Αν $f(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\chi^2+\chi+2}{\chi-2}, & \chi\epsilon(-\infty,2) \\ \dfrac{\chi^2+\beta\chi+2}{\eta\mu(\chi-2)}, & \chi\epsilon(2,3)\end{cases}$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta\,\epsilon R$ ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to2} f(\chi)$

13.

Να υπολογισθούν τα όρια

α) $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{1+2^\chi+3^\chi}{1+5^\chi+e^\chi}$ β) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{2^\chi+3^{\chi+1}}{2^{\chi+1}+3^\chi}$ γ) $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{2^{\chi+1}-3^\chi}{2^\chi+3^{\chi+1}}$ δ) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\alpha^{\chi+1}+2^{\chi+2}}{\alpha^{\chi+2}+2^{\chi+1}}$

14.

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(0,+\infty)$ και για κάθε $\chi>0$ ισχύει

$|(2+x^4)f(\chi)-3\chi^4|\le\chi^2+1$, να αποδείξετε ότι:

Α) $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)=3$ και Β) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi f(\chi)\eta\mu\dfrac{1}{\chi}=3$

15.
Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το (0,+∞) και σύνολο τιμών το (2,+∞) ικανοποιεί τη συνθήκη

$$f^2(\chi)-3f(\chi)+3=\frac{\chi+2}{f(\chi)} \text{ για κάθε } \chi>0$$

I. Να δειχθεί ότι $f^2(\chi)-f(\chi)+1>1$ *και*
II. να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)$

16.
Αν για τη συνάρτηση f :R→R* με πεδίο ορισμού το R και σύνολο τιμών το (-∞,0)∪(0,+∞) ισχύει $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)+\alpha\beta$ για κάθε α, β ϵR και

$$\lim_{\chi\to 0}\frac{f(\chi)-1}{\chi}=1 \text{ και } \lim_{\chi\to 1}\frac{\chi^2 f(\chi)-f(1)}{\chi-1}=7 \text{ να βρεθεί το } f(2)$$

17.

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει

$$\lim_{\chi\to 2}\frac{f(\chi)-f(2)}{\chi-2}=3 \text{ να βρεθεί το } \lim_{\chi\to 0}\frac{f(2+\chi)-f(2-\chi)+3\chi}{4\chi-\eta\mu 2\chi}$$

18.
Αν για τη συνάρτηση f ισχύει

$$\lim_{\chi\to 0}\frac{f(\chi)}{\chi}=3 \text{ να βρεθεί ο } \alpha\epsilon R \text{ ώστε } \lim_{\chi\to 0}\frac{\chi f(3\chi)+f(-\chi)\cdot\eta\mu(\alpha\chi)}{4\chi^2-\eta\mu^2\chi}=7$$

19.
Αν για τη συνάρτηση f ισχύει

$$\lim_{\chi\to 2}\frac{(\chi^2-4)f(\chi)+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi\chi}{4}}{(\chi-2)^2}=8 \text{ να βρεθεί το } \lim_{\chi\to 2}f(\chi)$$

20 .
Αν για την συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το (0,+∞) ισχύει
$f(\alpha\beta)=\alpha f(\beta)+\beta f(\alpha)$ για κάθε α, βϵR και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{\chi\to 1}\frac{f(\chi)-f(1)}{\chi-1}=2 \text{ να βρεθεί το } \lim_{\chi\to \xi}\frac{f(\chi)-f(\xi)}{\chi-\xi} \text{ όπου } \xi \text{ η τετμημένη σημείου}$$

που η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει την διχοτόμο ψ=χ

21.
Δίδονται οι συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα σύνολο A για τις οποίες ισχύει

$$\lim_{\chi\to\xi}f(\chi)=\lim_{\chi\to\xi}g(\chi)=0$$

Να δειχθεί ότι

$$\lim_{\chi\to\xi}\frac{f^{2\nu+1}(\chi)\sigma\upsilon\nu\chi+g^{2\nu+1}(\chi)\eta\mu\chi}{f^{2\nu}(\chi)+g^{2\nu}(\chi)}=0$$

22.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια αν υπάρχουν

I. $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{|\chi-\alpha|-|\chi+\alpha|}{\chi^3},\ \ \alpha>0$

II. $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\sqrt{\chi}-\lambda}{(\chi-1)^2},\qquad \lambda\epsilon R$

23.

Αν $f(\chi)=\dfrac{\alpha|\chi+2|+\beta|\chi-4|-2}{\chi^2-5\chi+6}$, να βρείτε τα $\alpha,\beta\epsilon R$ ώστε $\lim\limits_{\chi\to 3}f(\chi)=10$

24.

Στους παρακάτω ισχυρισμούς υπάρχει κάποιο λάθος . Ποιο είναι αυτό

I. Αν κοντά στο 3 ισχύει $f(\chi)\le g(\chi)$ και $\lim_{\chi\to 3}g(\chi)=0$ τότε $\lim_{\chi\to 3}f(\chi)=0$

II. Αν υπάρχει το
$\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\big(f(\chi)+g(\chi)\big)$, τότε $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\big(f(\chi)+g(\chi)\big)=\lim\limits_{\chi\to\chi_0}f(\chi)+\lim\limits_{\chi\to\chi_0}g(\chi)$

III. Αν $\lim_{\chi\to\chi_0}|f(\chi)|=5$, τότε $\lim_{\chi\to\chi_0}f(\chi)=5$ η $\lim_{\chi\to\chi_0}f(\chi)=-5$

IV για κάθε $\chi\epsilon\left(\frac{5}{2},6\right)$ ισχύει $g(\chi)\le f(\chi)\le h(\chi)$ και

$\lim_{\chi\to 2}g(\chi)=\lim_{\chi\to 2}h(\chi)=L$ τότε $\lim_{\chi\to 2}f(\chi)=L$

25.

Ποιους από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι αληθείς και ποιοι είναι ψευδείς;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας

I. Αν $\lim_{\chi\to 0}\sqrt{f(\chi)}=L$, τότε $\lim_{\chi\to 0}f(\chi)=L^2$ με $f(\chi)\ge 0$

II. Για κάθε συνάρτηση που ορίζεται κοντά στο χ_0 ισχύει $\lim_{\chi\to\chi_0}f(\chi)=f(\chi_0)$

III. Αν $\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{f(\chi)}{g(\chi)}=0$ τότε $\lim_{\chi\to\chi_0}f(\chi)=0$

IV. Αν $\lim_{\chi\to\chi_0}f(\chi)=L>0$ τότε σε κάθε σύνολο κοντά στο χ_0 είναι $f(\chi)>0$

V. Αν $\lim_{\chi\to\chi_0}|f(\chi)|=0$ τότε $\lim_{\chi\to\chi_0}f(\chi)=0$

VI. Αν κοντά στο 2 ισχύει $h(\chi)\le f(\chi)\le g(\chi)$, με
$\lim\limits_{\chi\to 2}g(\chi)=8$ και $\lim\limits_{\chi\to 2}h(\chi)=-6$ τότε $-6\le\lim\limits_{\chi\to 2}f(\chi)\le 8$

26.

Να υπολογισθεί το

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{2\chi^4-\chi^3\eta\mu\chi}{4+\eta\mu\chi}$$

> Τα μαθηματικά αν κοιταχτούν σωστά χαρακτηρίζονται από ύψιστη ομορφιά ψυχρή και αυστηρή σαν εκείνη των γλυπτών που δεν απευθύνεται στις ασθενέστερες πλευρές της φύσης μας, που της λείπουν η γοητεία της ζωγραφικής και της μουσικής, και όμως αγνή και ικανή για μια απρόσβλητη τελειότητα, τέτοια που μόνο τα μεγαλύτερα έργα τέχνης έχουν να δείξουν. Το αληθινό πνεύμα της απόλαυσης, την ανάταση, την αίσθηση πως είναι κανείς κάτι παραπάνω από άνθρωπος, αυτό το κριτήριο της απαράμιλλης ανωτερότητας, το βρίσκουμε στα μαθηματικά, όχι λιγότερο από ότι στην ποίηση
>
> Bertrand Russel

27.

Αν $f(\chi)=\dfrac{\chi^2+2\chi}{\chi^3+\chi-2}(\eta\mu\chi-2)$ και $g(\chi)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 4\chi}{\sqrt{\chi^2+\eta\mu^2\chi}}$,

να δειχθεί ότι

$\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty} g(\chi)=0$

και αν

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{g(\chi)}=\kappa$ τότε $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\eta\mu(f(\chi))}{\eta\mu(g(\chi))}=\kappa$

28.

Αν $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{\varepsilon\varphi\chi}=2$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi^2 g(\chi)}{\sigma\upsilon\nu\chi}=2$ να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)\cdot g(\chi)$

29.

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει

$$f^3(\chi)+f(\chi)=\chi^3 \text{ με } \chi\epsilon(0,+\infty)$$

- Να αποδείξετε ότι $f(\chi)\succ 0$ για κάθε $\chi>0$
- Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{f(\chi)}{\chi^3} \quad\text{και}\quad \lim_{\chi\to+\infty}\frac{f(\chi)}{\chi}$$

30.

Να βρείτε τους αριθμούς α,β∈R, αν για τη συνάρτηση με τύπο

$$f(\chi)=\begin{cases}\chi^2+\beta^2+1 & ,\alpha\nu\ \chi\leq\alpha\\ 2\chi & ,\quad \alpha\nu\ \chi>\alpha\end{cases}$$

υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to\alpha} f(\chi)$

31.

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)\chi^4+(\kappa-2)\chi^3-4}{(\kappa-1)\chi^2+3}$ $\mu,\kappa\in R$