

**Γ' Λυκείου Μαθηματικά Κατεύθυνσης  
Μιγαδικοί**

Όνοματεπώνυμο:.....

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

A) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  ισχύει:  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ .

B) Να χαρακτηρίσετε με σωστό ή λάθος κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

1) Αν  $z_1 = \alpha + \beta i$  και  $z_2 = \gamma + \delta i$  δύο μιγαδικοί για τους οποίους ισχύει  $Im(z_1 + z_2) = 0$ , τότε  $Im(z_1) + Im(z_2) = 0$ .

2) Για οποιονδήποτε  $z \in \mathbb{C}$  με  $z \neq 0$  τότε ισχύει  $Re(z) \neq 0$  και  $Im(z) \neq 0$ .

3) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι η διαφορά των διανυσματικών τους ακτίνων.

4) Αν για το μιγαδικό  $z$  ισχύει  $z + \bar{z} = 4$  τότε η εικόνα του  $z$  θα βρίσκεται πάνω στην ευθεία  $x = 4$ .

5) Αν A η εικόνα του  $z \in \mathbb{C}$ , B η εικόνα του  $i \cdot z$  και  $O(0,0)$ , τότε το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές (με την προϋπόθεση ότι ορίζεται το τρίγωνο).

Μονάδες 10 +10 =20

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

A) Να αντιστοιχίσετε σε καθένα από τα γράμματα A, B, Γ, Δ έναν αριθμό από το 1 έως το 4 ώστε καθεμιά από τις εξισώσεις ευθειών της πρώτης στήλης να ταιριάζει με τη μιγαδική της μορφή στη δεύτερη στήλη και να αιτιολογήσετε.

A. $\psi = 1$	1. $ z - i  =  z - 1 $
B. $\psi = x$	2. $ z - 2  =  z $
Γ. $x = 1$	3. $ z + i  =  z - 1 $
Δ. $\psi = -x$	4. $ z - 2i  =  z $

B) Αν  $z \in \mathbb{C}$  και  $|z| + 2z = 1$ .

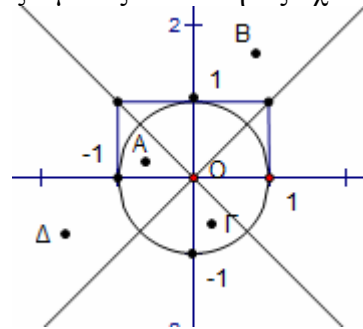
α) Να δείξετε ότι η εικόνα του  $z$  βρίσκεται πάνω στον άξονα  $x'x$

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 12+13 =25

### Θέμα 3<sup>ο</sup>

A) Να αντιστοιχίσετε σε καθένα από τα γράμματα A, B, Γ, Δ έναν αριθμό από το 1 έως το 4 ώστε καθένα από τα σημεία του σχήματος να ταιριάζει με τις κατάλληλες σχέσεις.



1.  $|z+1| < |z-i|$  και  $|z| > 1$
2.  $|z-1| < |z-i|$  και  $|z| < 1$
3.  $|z-1| > |z-i|$  και  $|z| < 1$
4.  $|z+1| > |z-i|$  και  $|z| > 1$

A	B	Γ	Δ

B) Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$  ισχύει  $|z_1|^2 + 4|z_2|^2 = |z_1 - 2z_2|^2$ ,

να δείξετε ότι  $|z_1 + 2z_2| = |2z_2 - z_1|$  και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία.

Μονάδες 12+13=25

### Θέμα 4<sup>ο</sup>

Εστω  $z \in \mathbf{C}$  και  $(1 + iz)^\nu = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \nu \in \mathbf{N}^*$  (1).

α) Να αποδείξετε ότι ο  $z$  δεν είναι πραγματικός αριθμός.

β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στον κύκλο, με κέντρο  $K(0, 1)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .

γ) Να αποδείξετε ότι  $4 \leq |z + 3 - 5i| \leq 6$ .

δ) Αν  $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$  και ικανοποιούν την (1), να αποδείξετε ότι  $|z_1 - z_2| \leq 2$ .

ε) Αν  $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$  ικανοποιούν την (1) και  $|z_1 - z_2| = 2$ , να υπολογίσετε το  $|z_1 + z_2|$ .

Μονάδες 5χ6=30

Καλή επιτυχία

Ρόδος 12/10/12

Μησιακούλη Ερμιόνη