1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΡΟΔΟΥ - ΒΕΝΕΤΟΚΛΕΙΟ

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 22 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν $z_1 = \alpha + \beta i$, $z_2 = \gamma + \delta i$ δύο μιγαδικοί με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$,

να αποδείξετε ότι: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Μονάδες 10

Α2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α) Για κάθε $z, w \in C$ ισχύει $|z + w| = |z| + |w|$.

β) Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.

γ) Οι εικόνες των μιγαδικών z , $\overline{z}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι συμμετρικά σημεία ως προς τον άξονα $x'x$.

δ) Για κάθε $z_1, z_2 \in C$ ισχύει $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \cdot \operatorname{Re}(z_2)$.

ε) Για κάθε $\alpha, \beta \in R$ ισχύει $|\alpha + \beta i|^2 = (\alpha + \beta i)^2$.

Μονάδες 5×3 = 15

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών η εξίσωση $z^3 + z^2 - 2z + 12 = 0$.

Μονάδες 9

Β2. Αν $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ και $z_3 = -3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης τότε:

α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου .

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $z_1^{2013} < 0$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι μιγαδικοί $z\,,w$ τέτοιοι ώστε $w=\left(\dfrac{4-3i}{3+4i}\right)^{13}+(2-i)^2+1+2i$ και $|z+3i|+|i\cdot\bar{z}+3|=\sqrt{2}\cdot|1+i|$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(w)=4$ και $\mathrm{Im}(w)=-3$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}(0,-3)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς z έχει το μέγιστο και ποιος το ελάχιστο μέτρο.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι μιγαδικοί $z\,,w$ με $z\neq i$, $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ και έστω ότι ο w είναι φανταστικός αριθμός .

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z κινούνται στον κύκλο με κέντρο $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Μονάδες 8

Δ2. Έστω z_1, z_2, z_3 τρεις μιγαδικοί που απεικονίζονται σε σημεία του παραπάνω κύκλου.

α) Να αποδείξετε ότι $|z_1+2z_2+3z_3| = |3z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+2z_1\cdot z_3|$.

Μονάδες 8

β) Αν $|z_1-z_2| = 2$ και $|z_1-z_3| = 1$ να αποδείξετε ότι $|z_2-z_3| = \sqrt{3}$.

Μονάδες 9

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ…

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. $\overline{z_1+z_2} = \overline{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)} = \overline{(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i} =$

$= (\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)\cdot i = (\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i) = \bar{z}_1+\bar{z}_2$

Α2. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $z^3+z^2-2z+12=0$ (1)

Πιθανές ακέραιες ρίζες $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 12 & -3 \\ & -3 & 6 & -12 & \\ \hline 1 & -2 & 4 & 0 & \end{array}$$

Άρα η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $(z+3)\cdot(z^2-2z+4)=0$

Οπότε $\boxed{z=-3}$ ή $z^2-2z+4=0$

$\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot4=4-16=-12<0$ Άρα η $z^2-2z+4=0$ έχει δύο συζυγείς μιγαδικές λύσεις

$$z=\frac{-\beta\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}=\frac{2\pm i\sqrt{12}}{2}=\frac{2\pm i2\sqrt3}{2}=\frac{\cancel{2}(1\pm i\sqrt3)}{\cancel{2}}= \begin{cases} 1+i\sqrt3 \\ 1-i\sqrt3 \end{cases}$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες

$z_1=1+i\sqrt3$, $z_2=1-i\sqrt3$, $z_3=-3$

Β2.α) Έστω Α, Β, Γ οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο. Επειδή z_1, z_2 συζυγείς μιγαδικοί, οι εικόνες τους Α και Β είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$. Άρα ο

άξονας $x'x$ είναι μεσοκάθετος του AB. Η εξίσωση της AB είναι $AB: x=1$ και αφού $x_\Gamma = 3 \neq 1$ έχω ότι τα A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά.
Αφού $x_3 \in R$ έχω ότι $\Gamma \in x'x$ οπότε $\Gamma A = \Gamma B$. Δηλαδή $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές τρίγωνο με $\Gamma A = \Gamma B$.

Β' ΤΡΟΠΟΣ

$A(1,\sqrt{3})$, $B(1,-\sqrt{3})$, $\Gamma(-3,0)$

$\vec{AB} = (0, -2\sqrt{3})$

$\vec{A\Gamma} = (-4, -\sqrt{3})$

$\vec{B\Gamma} = (-4, \sqrt{3})$

Είναι $\det(\vec{A\Gamma}, \vec{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} -4 & -\sqrt{3} \\ -4 & \sqrt{3} \end{vmatrix} =$

$= -4\sqrt{3} - (-4)\cdot(-\sqrt{3}) = -8\sqrt{3} \neq 0$

Άρα A, B, Γ μη συνευθειακά και

αφού $|\vec{A\Gamma}| = \sqrt{(-4)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{16+3} = \sqrt{19}$

$|\vec{B\Gamma}| = \sqrt{(-4)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{16+3} = \sqrt{19}$

έχω ότι $|\vec{A\Gamma}| = |\vec{B\Gamma}|$ οπότε $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές τρίγωνο.

β) Είναι $z_1^{2013} = (1+i\sqrt{3})^{2013}$. Όμως

$z_1^2 = (1+i\sqrt{3})^2 = 1 - 3 + 2\sqrt{3}i = -2 + 2\sqrt{3}i = -2(1 - i\sqrt{3})$ και

$z_1^3 = z_1^2 \cdot z = -2(1-i\sqrt{3})\cdot(1+i\sqrt{3}) = -2\left[1^2 + (\sqrt{3})^2\right] = -8 \in R$

Θεωρούμε την Ευκλείδεια διαίρεση $2013 : 3$

$$\begin{array}{r|l} 2013 & 3 \\ 21 & 671 \\ =3 & \\ = & \end{array}$$

Τότε $2013 = 3 \cdot 671$. Άρα

$z_1^{2013} = z_1^{3\cdot 671} = (z_1^3)^{671} = (-8)^{671} = -8^{671} < 0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $W = \left(\dfrac{4-3i}{3+4i}\right)^{13} + (2-i)^2 + 1 + 2i = \left(\dfrac{-4i^2 - 3i}{3+4i}\right)^{13} + 4 - 1 - 4i + 1 + 2i =$

$= \left(\dfrac{-i(3+4i)}{3+4i}\right)^{13} + 4 - 2i = (-i)^{13} + 4 - 2i = -i^{13} + 4 - 2i \underset{=}{\overset{13=4\cdot 3+1}{=}}$

$= -(i^4)^3 \cdot i + 4 - 2i = -i + 4 - 2i = 4 - 3i.$

Άρα $Re(w) = 4$ και $Im(w) = -3$.

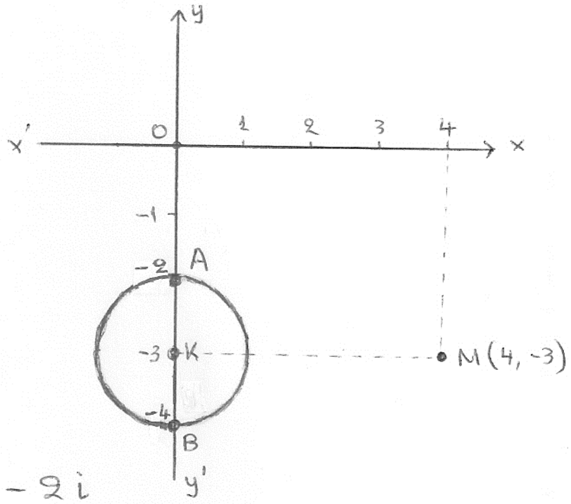
Γ2. Είναι $|z+3i|+|i\bar{z}+3|=\sqrt{2}\cdot|1+i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z+3i|+|i\bar{z}-3i^2|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} \Leftrightarrow |z+3i|+|i(\bar{z}-3i)|=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z+3i|+|i|\cdot|\bar{z}-3i|=2 \Leftrightarrow |z+3i|+|\overline{z+3i}|=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z+3i|+|z+3i|=2 \Leftrightarrow 2|z+3i|=2 \Leftrightarrow |z+3i|=1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(0,-3)$ και ακτίνα $\rho=1$.



Γ3. Η ευθεία OK είναι ο άξονας $y'y$ και τέμνει τον παραπάνω κύκλο στα σημεία $A(0,-2)$ και $B(0,-4)$. Άρα από τους μιγαδικούς z, μέγιστο μέτρο έχει ο $-4i$ και ελάχιστο μέτρο έχει ο $-2i$

Γ4. Έστω M η εικόνα του μιγαδικού w.

Είναι $(MK)=\sqrt{(4-0)^2+(-3+3)^2}=4>1=\rho$ Άρα το M εξωτερικό του κύκλου $(K,1)$, οπότε

$|z-w|_{max}=MK+\rho=4+1=5$ και

$|z-w|_{min}=MK-\rho=4-1=3$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $w\in I \Leftrightarrow \bar{w}=-w \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)}=-\frac{z+i}{z-i} \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}=\frac{-z-i}{z-i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\bar{z}-i)(z-i)=(\bar{z}+i)\cdot(-z-i) \Leftrightarrow z\bar{z}-i\bar{z}-iz-1=$

$=-z\bar{z}-\bar{z}i-zi+1 \Leftrightarrow 2z\bar{z}=2 \Leftrightarrow 2|z|^2=2 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|=1$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z κινούνται στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Δ2. α) Είναι $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Τότε

$|z_1| = 1 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 1 \Leftrightarrow z_1 \cdot \bar{z}_1 = 1 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$ και

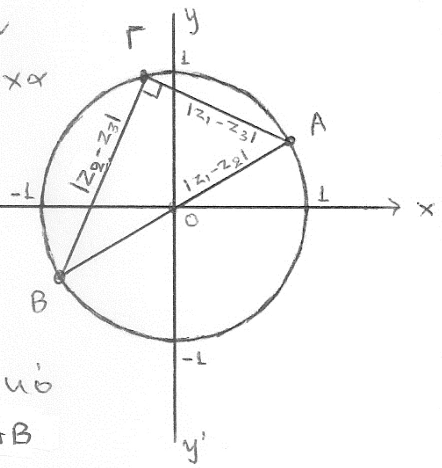
όμοια $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$, $\bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}$. Άρα

$$|z_1 + 2z_2 + 3z_3| = |\overline{z_1 + 2z_2 + 3z_3}| = |\bar{z}_1 + 2\bar{z}_2 + 3 \cdot \bar{z}_3| =$$

$$= \left|\frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2} + \frac{3}{z_3}\right| = \left|\frac{z_2 z_3 + 2z_1 z_3 + 3z_1 z_2}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}\right| =$$

$$= \frac{|3z_1 z_2 + z_2 z_3 + 2z_1 z_3|}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|} = |3z_1 z_2 + z_2 z_3 + 2z_1 z_3|$$

β) Έστω Α, Β, Γ οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα στον μοναδιαίο κύκλο.



Επειδή $|z_1 - z_2| = 2 = 2 \cdot \rho$ έχουμε ότι η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου. Επίσης επειδή $|z_1 - z_3| = 1$ έχω ότι το σημείο Γ είναι διαφορετικό από τα Α και Β. Αφού ΑΒ διάμετρος του κύκλου, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ. Άρα από Πυθαγόρειο θεώρημα

$$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_1 - z_3|^2 + |z_2 - z_3|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^2 = 1^2 + |z_2 - z_3|^2 \Leftrightarrow |z_2 - z_3|^2 = 4 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_2 - z_3|^2 = 3 \Leftrightarrow |z_2 - z_3| = \sqrt{3}$$