mathematica.gr

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

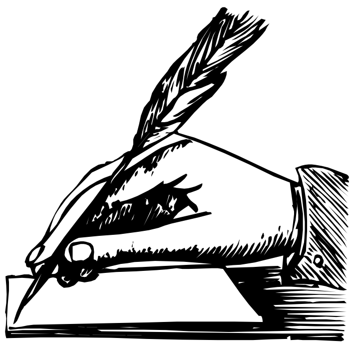
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2012

Λύσεις

των

θεμάτων



Έκδοση 1η (24/05/2012, 16:00)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=131236

Συνεργάστηκαν οι:
Αντωνέας Στράτης, Ανδρέας Βαρβεράκης,
Φωτεινή Καλδή, Σπύρος Καπελλίδης,
Σπύρος Καρδαμίτσης, Νίκος Κατσίπης,
Χρήστος Κυριαζής, Γρηγόρης Κωστάκος,
Ροδόλφος Μπόρης, Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Λευτέρης Πρωτοπαπάς, Σωτήρης Στόγιας,
Αλέξανδρος Συγκελάκης, Κώστας Τηλέγραφος,
Χρήστος Τσιφάκης

mathematica.gr

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2012

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Έχουμε

$$F(x+h)-F(x)=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))$$

$$=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x)),$$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x).$$

Άρα $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

Α2. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου Α τον αριθμό:

$$P(A)=\frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Έτσι, έχουμε τον **κλασικό** ορισμό της πιθανότητας.

Α3. Ο **συντελεστής μεταβολής** ή **συντελεστής μεταβλητότητας**, για $\bar{x}\neq 0$ ορίζεται από το λόγο:

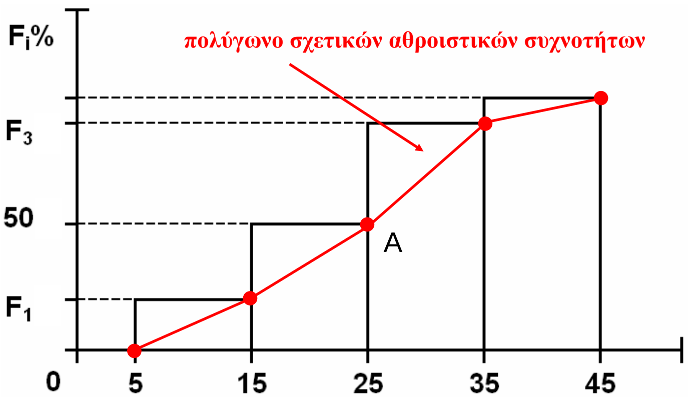
$$CV=\frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}}=\frac{s}{\bar{x}} \text{ όταν } \bar{x}>0.$$

Αν $\bar{x}<0$, τότε αντί της $\bar{x}$ χρησιμοποιούμε την $|\bar{x}|$.

Α4. **α) Λάθος**
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.



Για τη διάμεσο δ γνωρίζουμε ότι, αντιστοιχεί σε εκείνη την τιμή x για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν. Σύμφωνα με το ιστόγραμμα και το αντίστοιχο πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, έχουμε $\delta=25$.

B2. Αφού η διάμεσος είναι $\delta=25$ άρα το πλήθος των μαθητών που περιέχονται στις κλάσεις $[5,15)$ και $[15,25)$ πρέπει να είναι το ίδιο με το πλήθος των μαθητών που περιέχονται στις κλάσεις $[25,35)$ και $[35,45)$.

Άρα έχουμε διαδοχικά: $\alpha+4+3\alpha-6=2\alpha+8+\alpha-2 \Leftrightarrow \alpha=8$.

Συνεπώς για τη συμπλήρωση του πίνακα έχουμε:

$\nu_1=\alpha+4=12$ $\quad$ $N_1=\nu_1=12$

$\nu_2=3\alpha-6=18$ $\quad$ $N_2=N_1+\nu_2=12+18=30$

$\nu_3=2\alpha+8=24$ $\quad$ $N_3=N_2+\nu_3=30+24=54$

$\nu_4=\alpha-2=6$ $\quad$ $N_4=N_3+\nu_4=60$

$f_1\%=\frac{\nu_1}{\nu}\cdot 100=\frac{12}{60}\cdot 100=\frac{1}{5}\cdot 100=20$ $\quad$ $F_1\%=f_1\%=20$

$f_2\%=\frac{\nu_2}{\nu}\cdot 100=\frac{18}{60}\cdot 100=\frac{3}{10}\cdot 100=30$ $\quad$ $F_2\%=50$

$f_3\%=\frac{\nu_3}{\nu}\cdot 100=\frac{24}{60}\cdot 100=\frac{2}{5}\cdot 100=40$ $\quad$ $F_3\%=F_2\%+f_3\%=50+40=90$

$f_4\%=\frac{\nu_4}{\nu}\cdot 100=\frac{6}{60}\cdot 100=\frac{1}{10}\cdot 100=10$ $\quad$ $F_4\%=100$

και τέλος $\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=60$

Ο πίνακας συμπληρωμένος φαίνεται παρακάτω:

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5,15)	10	12	20	12	20
[15,25)	20	18	30	30	50
[25,35)	30	24	40	54	90
[35,45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

B3. Σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής $\bar{x}$ σε ομαδοποιημένα δεδομένα έχουμε:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i v_i}{v}=\frac{10\cdot 12+20\cdot 18+30\cdot 24+40\cdot 6}{60}=\frac{1440}{60}=24\text{ λεπτά.}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της διακύμανσης (ή διασποράς) s^2 σε ομαδοποιημένα δεδομένα έχουμε:

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2\cdot v_i}{v}=\frac{(10-24)^2\cdot 12+(20-24)^2\cdot 18+(30-24)^2\cdot 24+(40-24)^2\cdot 6}{60}$$
$$=\frac{2352+288+864+1536}{60}=84\text{ λεπτά}^2$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $s^2=\sqrt{s}=\sqrt{84}=9{,}17$ λεπτά.

Β4. Θεωρούμε ότι σε κάθε κλάση οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες.
Επειδή στην κλάση $[35,45)$ πλάτους 10 βρίσκεται το $f_4\%=10$ των μαθητών άρα στο διάστημα $[37,45]$ πλάτους 8 βρίσκεται το $\frac{8}{10}f_4\%=8$, δηλαδή το 8% των μαθητών.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω Γ το ενδεχόμενο ο μαθητής να μιλάει Γαλλικά. Τότε $P(\Gamma)=\frac{3v}{v^2+1}$.

Έστω I το ενδεχόμενο ο μαθητής να μιλάει Ισπανικά . Τότε $P(I)=\frac{v+2}{v^2+1}$.

Η πιθανότητα να μιλάει και τις δυο γλώσσες είναι $P(\Gamma\cap I)=\frac{v+1}{v^2+1}$

Γ1. Η πιθανότητα να μιλάει μια τουλάχιστον από τις δυο γλώσσες είναι

$$P(\Gamma\cup I)=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}=2\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$
$$=2\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-2^2}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=2\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$
$$=2\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=2\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=1$$

Είναι $P(\Gamma\cup I)=1\Leftrightarrow\frac{N(\Gamma\cup I)}{N(\Omega)}=1\Leftrightarrow N(\Gamma\cup I)=N(\Omega)$ και επειδή βρισκόμαστε σε πεπερασμένο δειγματικό χώρο με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα άρα $\Gamma\cup I=\Omega$ (αν ήταν $\Gamma\cup I\subset\Omega$ τότε θα είχαμε $N(\Gamma\cup I)<N(\Omega)$, άτοπο). Οπότε το ενδεχόμενο $\Gamma\cup I$ είναι βέβαιο.

Γ2. Είναι $P(\Gamma\cup I)=P(\Gamma)+P(I)-P(\Gamma\cap I)$

Άρα

$$\frac{3\nu+\nu+2-(\nu+1)}{\nu^2+1}=1\Leftrightarrow \nu^2+1=3\nu+\nu+2-\nu-1$$
$$\Leftrightarrow \nu^2+1=3\nu+1\Leftrightarrow \nu^2=3\nu \text{ με } \nu\geq 3$$

Τελικά ν = 3 που είναι δεκτή αφού τότε

$$P(\Gamma)=\frac{9}{10},\ P(I)=\frac{1}{2},\ P(\Gamma\cap I)=\frac{2}{5}$$

Γ3. Είναι $P\big((\Gamma-I)\cup(I-\Gamma)\big)=P(\Gamma-I)+P(I-\Gamma)=$

$$=P(\Gamma)+P(I)-2P(\Gamma\cap I)=\frac{9}{10}+\frac{5}{10}-2\frac{4}{10}=\frac{3}{5}$$

Γ4. Αφού τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, έχουμε

$$P(\Gamma\cap I)=\frac{N(\Gamma\cap I)}{N(\Omega)}\Leftrightarrow\frac{4}{10}=\frac{32}{N(\Omega)}\Leftrightarrow N(\Omega)=\frac{10\cdot 32}{4}=80\,.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο εν λόγω διάστημα με

$$f'(x)=\frac{(1+\ln^2x)'x-(x)'(1+\ln^2x)}{x^2}=\frac{2\ln x-1-\ln^2x}{x^2}=-\frac{(\ln x-1)^2}{x^2}$$

Παρατηρούμε ότι $f'(x)=0\Leftrightarrow -\dfrac{(\ln x-1)^2}{x^2}=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$

Από τον πίνακα μεταβολών της f προκύπτει ότι είναι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,e)\cup(e,+\infty)$.

Επομένως είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

x	0		e		+∞
f′		-	0	-	
f		↘		↘	

Δ2. Παρατηρούμε αρχικά ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$.

Είναι:

$$(OK)=|x|\overset{x>0}{=}x$$

$$(O\Lambda)=|f(x)|\overset{f(x)>0}{=}f(x)=\frac{1+\ln^2x}{x}$$

Το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΟΚΜΛ είναι: $E(x)=(OK)(O\Lambda)\Leftrightarrow E(x)=1+\ln^2x,\ x>0$

Η συνάρτηση του εμβαδού είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ με $E'(x)=2\dfrac{\ln x}{x},x>0$.

Είναι $E'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$

Είναι $E'(x)>0\Leftrightarrow \dfrac{2\ln x}{x}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x>0\Leftrightarrow x>1$

x	-∞		0		1		+∞
2lnx		-		-	0	+	
x		-	0	+		+	
E′(x)		-		-	0	+	
E(x)				↘	Ο.ε	↗	

Είναι $E'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{x}<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$

Επομένως η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνήσια αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Στο σημείο $x=1$ παρουσιάζει ελάχιστο το $E(1)=1$τ.μ

Παρατηρούμε πως όταν $x=1$ είναι $f(1)=1+\ln^2 1=1$ επομένως στο ορθογώνιο $OKM\Lambda$ ισχύει $(OK)=(O\Lambda)=1$ επομένως αυτό είναι τετράγωνο.

Δ3. Αφού η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς την εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Sigma(1,f(1))$ θα είναι $\lambda=f'(1)=-\frac{(\ln 1-1)^2}{1^2}=-1$.

Επομένως η εξίσωση της ευθείας (ϵ) είναι $y=-x+\beta$.

Οι τεταγμένες των δέκα σημείων είναι $y_i=-x_i+\beta, i=1,2,...,10$.

Έστω $z_i=-x_i, i=1,2,...,10$. Τότε $\bar{z}=-\bar{x}=-10$ και $s_z=|-1|s_x=2$.

Επίσης $y_i=z_i+\beta, i=1,2,...,10$. Τότε $\bar{y}=\bar{z}+\beta=\beta-10$ και $s_y=s_z=2$.

Άρα $CV_y=\frac{s_y}{|\bar{y}|}=\frac{2}{|\beta-10|}$.

Το δείγμα των τεταγμένων των δέκα σημείων είναι ομοιογενές αν και μόνο αν

$$CV_y\le\frac{1}{10}\Leftrightarrow\frac{2}{|\beta-10|}\le\frac{1}{10}\Leftrightarrow|\beta-10|\ge 20\Leftrightarrow$$
$$\beta-10\le-20 \text{ ή } \beta-10\ge 20\Leftrightarrow \beta\le-10 \text{ ή } \beta\ge 30.$$

Δ4. Τα Α, Β είναι ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Αφού $A\neq\varnothing$ και $A\cap B\neq\varnothing$ θα είναι $P(A)>0$ και $P(A\cap B)>0$.

Επίσης $P(A),P(A\cap B),P(A\cup B)\in(0,1]$ στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα $A\subseteq A\cup B\Rightarrow P(A)\le P(A\cup B)\Rightarrow f(P(A))\ge f(P(A\cup B))$ (1)

και $A\cap B\subseteq A\cup B\Rightarrow P(A\cap B)\le P(A\cup B)\Rightarrow f(P(A\cap B))\ge f(P(A\cup B))$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1), (2) και έχουμε $f(P(A))+f(P(A\cap B))\ge 2f(P(A\cup B))$.

Το ίσον ισχύει όταν Α=Β.

ΣΧΟΛΙΑ:

Α2. Εναλλακτική απόδειξη

Έστω $F(x)=f(x)+g(x)$.

Τότε για $x\neq x_0$ έχουμε:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

δεδομένου ότι οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες,
άρα $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$.

Α4. Εξήγηση των προτάσεων σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο:

α) **Λάθος** (σελ. 70 σχολικού βιβλίου: *«Το **κυκλικό διάγραμμα** χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων»)*

β) **Σωστό** (σελ. 23 σχολικού βιβλίου: *«Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει **το ρυθμό μεταβολής** του* $y=f(x)$ *ως προς το x, όταν $x=x_0$.»*)

γ) **Λάθος** (σελ. 151 σχολικού βιβλίου: «*Αν* $A\subseteq B$*, τότε* $P(A)\le P(B)$ »)

δ) **Σωστό** (σελ. 91 σχολικού βιβλίου: *«Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς είναι το εύρος, η ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.»*)

ε) **Σωστό** (σελ. 16 σχολικού βιβλίου: *«Έτσι ισχύει για παράδειγμα* $\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0$ *και* $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi x_0$ *(όταν* $\sigma\upsilon\nu x_0\neq 0$ *).»*)

Β1. Ο άξονας y΄y του ιστογράμματος αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων αναφέρεται σε $F_i\%$ συνεπώς οι αριθμοί που βρίσκονται σε αυτόν δε θα έπρεπε να έχουν το σύμβολο « % ».

Β2. Εναλλακτικά για την εύρεση του α:

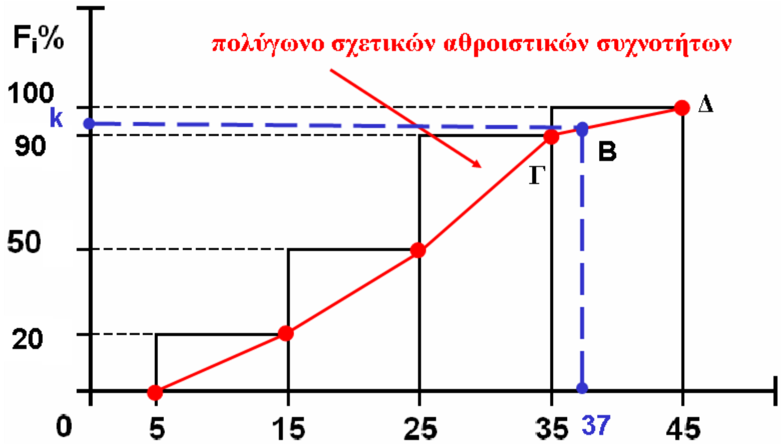
$$F_2=50\%\Leftrightarrow\frac{(\alpha+4)+(3\alpha-6)}{\nu}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{4\alpha-2}{7\alpha+4}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha=8$$

Β3. Εναλλακτικά χρησιμοποιώντας τον τύπο $s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa}x_i^2\nu_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa}x_i\nu_i\right)^2}{\nu}\right\}$ με $\sum_{i=1}^{4}x_i^2\nu_i=39.600$ και

$$\sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i=1.440 \text{ έχουμε } s^2=\frac{1}{60}\left(39.600-\frac{1.440^2}{60}\right)=\frac{1}{60}(39.600-34.560)=\frac{5.040}{60}=84\,\lambda\varepsilon\pi\tau\acute{\alpha}^2$$

Β4. Εναλλακτική προσέγγιση

Θα χρησιμοποιήσουμε το πολύγωνο των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων, στο οποίο αναζητούμε το σημείο Γ με συντεταγμένες $(37,k)$. Οι μαθητές που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά για να λύσουν το πρόβλημα βρίσκονται στο διάστημα $[37,45)$, στο οποίο ψάχνουμε το ποσοστό των παρατηρήσεων. Έχουμε ότι: $\Gamma(35,90)$ και $\Delta(45,100)$. Έστω $y=ax+b$ η εξίσωση της ευθείας $\Gamma\Delta$. Τότε αφού $\Gamma\in\Gamma\Delta$ και $\Delta\in\Gamma\Delta$, έχουμε: $90=35a+b, 100=45a+b\Leftrightarrow(a,b)=(1,55)$. Συνεπώς $y=x+55$ είναι η εξίσωση της ευθείας $\Gamma\Delta$, στην οποία ανήκει το $B(37,k)$ άρα προκύπτει ότι: $k=37+55=92$. Επομένως το ζητούμενο ποσοστό είναι $100\%-92\%=8\%$.

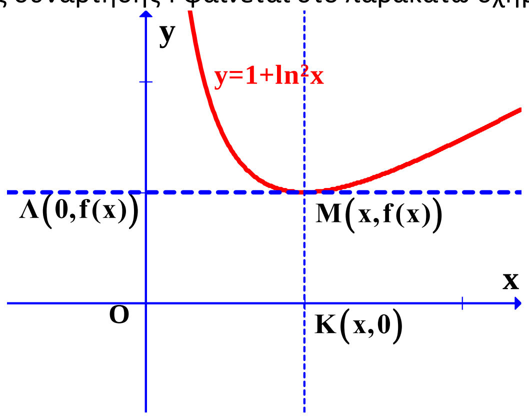


- Ας σημειωθεί ότι υπάρχει πρόβλημα στο ότι εάν βρούμε πρώτα το πλήθος των μαθητών στο διάστημα $(37,45)$, θα είναι τα $\frac{8}{10}$ του 6, δηλαδή 4,8 μαθητές!

Γ1. <u>Εναλλακτική προσέγγιση</u>
Ας υποθέσουμε ότι $A \subset \Omega$ Τότε υπάρχει στοιχείο $\omega \in \Omega - A$. Όμως καθώς $\{\omega\} \subseteq \Omega - A$ άρα έπεται ότι $P(\{\omega\}) \leq P(\Omega - A) = P(\Omega) - P(\Omega \cap A) = 1 - 1 = 0$. Άρα $P(\{\omega\}) = 0$, άτοπο διότι τα απλά ενδεχόμενα δεν έχουν πιθανότητα 0.
Πρέπει να σημειωθεί ότι οι παραπάνω προσεγγίσεις, δικαιολογούνται λόγω του ότι έχουμε <u>πεπερασμένο</u> δειγματικό χώρο με <u>ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα</u>.

Γ2. Το δεδομένο $\nu \geq 3$ είναι περιττό αφού για $\nu = 0$ παίρνουμε $P(I) = 2$, άτοπο οπότε η λύση $\nu = 0$ απορρίπτεται.

Δ2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- Διαφορετικά για το ελάχιστο της $E(x) = 1 + \ln^2 x,\ x > 0$:
  Είναι $\ln^2 x \geq 0 \Rightarrow \ln^2 x + 1 \geq 1 \Rightarrow E(x) \geq 1$. Η ισότητα λαμβάνεται μόνο για x=1 άρα βρίσκουμε ελάχιστο για $x = 1$ το $E(1) = 1$.
- Σύμφωνα με την εκφώνηση <u>χρειάζεται</u> επιπλέον να δειχθεί ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης $(OK) = (O\Lambda) \Leftrightarrow \frac{1 + \ln^2 x}{x} = x \Leftrightarrow 1 + \ln^2 x - x^2 = 0$ είναι η $x = 1$.
  Παρά το ότι μία τέτοια απόδειξη ξεφεύγει από τα πλαίσια του μαθήματος, παραθέτουμε δύο προσεγγίσεις για λόγους πληρότητας παρακάτω:
  Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = 1 + \ln^2 x - x^2$. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα.
  Έχουμε $g'(x) = 2\left(\frac{\ln x}{x} - x\right)$ άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\ln(x) < x^2$ για κάθε $x > 0$.

Επειδή όμως $x<x^2+1$ για κάθε x έχουμε ότι $\ln(x)<\ln(x^2+1)\leqslant x^2$ λόγω της τας $\ln x\le x-1$, για κάθε $x>0$, η οποία μπορεί να αποδειχθεί εύκολα μελετώντας τη συνάρτηση $h(x)=\ln x-x-1$.

Εναλλακτικά

$(OK)=(O\Lambda)\Leftrightarrow\dfrac{1+\ln^2 x}{x}=x\Leftrightarrow\dfrac{1+\ln^2 x}{x}-x=0\Leftrightarrow T(x)=0\Leftrightarrow T(x)=T(1)$, όπου θεωρήσαμε

την $T(x)=\dfrac{1+\ln^2 x}{x}-x=f(x)-x$ που είναι γνησίως φθίνουσα αφού οι f και $h(x)=-x$ ειναι γνησίως φθίνουσες άρα το x παίρνει την τιμή 1 μια μόνο φορά .