ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ

1. Δίνεται η συνάρτηση f(x)= $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{x\alpha^{y}+(x^2-1)e^{y}}{\alpha^{y-1}+e^{y+3}}$, όπου α θετικός πραγματικός αριθμός με $\alpha\neq e$.

α) Να βρεθεί ο α ώστε η συνάρτηση $g(x)=e^3\ln\alpha\times f(x)$ να παρουσιάζει ελάχιστο .

β) Για οποιαδήποτε από τις τιμές του α που βρήκατε στο (α) ερώτημα να αποδείξετε ότι για την παραπάνω συνάρτηση g ισχύει ότι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την Cg και τον άξονα x΄x δεν είναι μεγαλύτερο από $\frac{4}{3}$ τ.μ.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\Re$ για την οποία ισχύει :

$2f(x)+f(2004-x)=-x$, για κάθε $x\in\Re$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{f(x)}{\ln x}$.

γ) Αν $h(x)=x^2f(x)$, αποδείξτε ότι υπάρχουν α , β $\in\Re$ τέτοιοι ώστε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} xh''(x)dx = h(\alpha)-h(\beta) .$$

3. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$[f(x)]^{1821}+\alpha[f(x)]^3=-e^{f(x)}$, α>0 ,για κάθε $x\in\Re$.

α) Να δείξετε ότι f(x)=c , για κάθε $x\in\Re$,όπου c αρνητική σταθερά .

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x-1}$.

4. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\Re$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$f'(x)+f(x)=1$, για κάθε $x\in\Re$ και $f(0)=e+1$.

α) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{y\to+\infty}(\lim\limits_{x\to 2} f(xy))$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\Re$.

5. Έστω η συνεχής στο $\Re$ συνάρτηση f και η παραγωγίσιμη στο $\Re$ συνάρτηση g για τις οποίες ισχύουν : $(f\circ f\circ f)(x)=x$ και $(f\circ f)(x)=g'(x)$, για κάθε $x\in\Re$ Αν η C_g διέρχεται από τα σημεία A(1 , 3) και B(2 , $\frac{9}{2}$) , να δείξετε ότι :

α) $\int_0^1 f(g'(x))dx=\frac{1}{2}$.

β) $\int_1^2 (f\circ f\circ\cdots\circ f)(t)dt=\frac{3}{2}$ (η f εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα 2006 φορές) .

6. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x)+f(x-1002)=0$,για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι :

α) $f(x+2004)=f(x)$, για κάθε $x\in\Re$.

β) $\int_1^{2005} f(x+2005)dx=\int_2^{2006} f(x)dx$.

7. Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει :

$[f(x)]^3-2003[f(x)]^2-2003f(x)-2004=0$, για κάθε $x\in\Re$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή .

β) Θεωρούμε τα ολοκληρώματα : $I=\int_3^5 \frac{x^4+f(x)-2004}{x^2+x+1}dx$,

f7220332e30000c0000004453204571756174696f6e000b0000000457175617469 6f6e2e3300f439b27100000000000000000000

J = $\int_8^5 \frac{x^4}{x^2+x+1}dx$, K = $\int_8^3 \frac{x^3-x-1}{x^2+x+f(x)-2003}dx$. Να υπολογίσετε την παράσταση I – J – K .

8. Έστω η παραγωγίσιμη στο $\Re$ συνάρτηση g και η συνάρτηση f(x)= $\int_1^{2x+1} g(2x-t)dt$.

α) Να δείξετε ότι : $f''(x) + f'(x) = 2[g(2x-1) + 2g'(2x-1)]$, για κάθε $x \in \Re$.

β) Αν η γραφική παράσταση της g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, να δείξετε ότι η συνάρτηση h(x)= f ΄(x) +f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

9. α) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [-α , α] , α >0 . Να αποδείξετε ότι :

$$\begin{cases} 2\int_0^{\alpha} f(x)dx & \text{, αν η f είναι άρτια .} \\ 0 & \text{, αν η f είναι περιττή .} \end{cases}$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I = $\int_{-0,2}^{0,2} \sigma\upsilon\nu(xe^{|x|}+\eta\mu x)\cdot\log\frac{1+x}{1-x}dx$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα J = $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^5-2x^3-10x+\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$.

10. Δίνεται η συνεχής στο $\Re$ συνάρτηση f και η συνάρτηση

g(x) = $\int_1^x \left(\int_1^t \left(\int_1^z f(u^5)du\right)dz\right)dt$.

α) Να βρείτε τις g' , g'', $g^{(3)}$.

β) Να βρείτε το όριο : $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{(x-1)^3}$ αν είναι γνωστό ότι f(1) = 12 .

γ) Αν για κάθε $x \in \Re$ είναι f (x) $\neq 0$, να δείξετε ότι η g'' είναι γνησίως μονότονη .

11. α) Αν f , g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α , β] και f(x)$\geq$g(x) για κάθε x$\in$ [α , β] , να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

β) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α , β] να δείξετε ότι $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$.

γ) Αποδείξτε ότι : $\left|\int_{1}^{2} (x\sigma\upsilon\nu(e^x+1)+\eta\mu\frac{1}{x})dx\right| \leq \frac{5}{2}$.

δ) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση φ με συνεχή παράγωγο στο [-α , α] ,α>0, τέτοια ώστε : φ(-α) = 3α , φ(α) = 7α και φ΄(x) $\geq$ 4 , για κάθε x$\in$ [-α , α].

12. α) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα [α , β]. Αποδείξτε ότι:

αν η f στρέφει τα κοίλα άνω στο [α , β] τότε $f(\frac{\alpha+\beta}{2}) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$,

ενώ αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο [α , β] τότε $f(\frac{\alpha+\beta}{2}) > \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

« Ανισότητες Jensen »

β) Για κάθε α$\in \Re$ να δείξετε ότι : $e^{-(\alpha+1)} + (\alpha+1)^8 < \frac{1}{2}(e^{-\alpha} + e^{-(\alpha+2)} +(\alpha+2)^8 +\alpha^8)$.

13. Δίνεται η τέσσερις φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ συνάρτηση f τέτοια ώστε :

$f^{(4)}(x) + f^{(3)}(x)$ = ημx + συνx , για κάθε x$\in \Re$ και f(0) = 1 , f ΄(0) = 0 ,

f ΄΄(0) = -1 και $f^{(3)}(0) = 0$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{f(x)}dx$.

γ) Υπολογίστε το άθροισμα : S = $\int_{3}^{4} f^2(\frac{\pi}{2}-x)dx + \int_{3}^{4} f^2(x)dx$.

14. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\Re$ η οποία είναι συνεχής στο R και ισχύει f(x + y) = 5f(x)f(y) , για κάθε x , y $\in \Re$.

α) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\Re$.

β) Αν g(x) = $\int_1^x f(t)dt \times \int_2^x f(t)dt \times \int_3^x f(t)dt \times \ldots \times \int_{100}^x f(t)dt$, να δείξετε ότι η C_g δέχεται τουλάχιστον 99 οριζόντιες εφαπτόμενες .

15. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = αημx + βσυνx – $\frac{2a}{\pi}$, όπου α , β$\in \Re$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0 , π).

β) Αν ισχύει $\int_0^a f(x)dx$ = ημα , να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ$\in$ (0 , α) τέτοιο ώστε f(ξ) = συνξ .