ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία Σχολικού βιβλίου **σελ. 31**

Α2. Θεωρία Σχολικού βιβλίου **σελ. 148**

Α3. Θεωρία Σχολικού βιβλίου **σελ. 96**

Α4. α) **Λ**

β) **Σ**

γ) **Λ**

δ) **Σ**

ε) **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν, προκύπτει ότι η διάμεσος είανι ίση με 25 .

Β2. Το μέγεθος του δείγματος ν ισούται με: $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=7\alpha+4$

Από το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων συμπεραίνουμε ότι:

$F_2=0,5$ άρα: $\frac{N_2}{\nu}=0,5$

και άρα : $\frac{4\alpha-2}{7\alpha+4}=0,5$ και τελικά **$\alpha=8$**

Ο πίνακας συχνοτήτων συμπληρώνεται με βάση το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων F_i % και τους γνωστούς τύπους.

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας συμπληρωμένος:

Χρόνοι σε min	**x_i**	**v_i**	**f_i**	**N_i**	**F_i**	**$x_i.v_i$**
[5,15)	10	12	20	12	20	120
[15,25)	20	18	30	30	50	360
[25,35)	30	24	40	54	90	720
[35,45)	40	6	10	60	100	240
ΣΥΝΟΛΑ		**60**	**100**			**1440**

B3. Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι $\sum \chi_i v_i=1440$ και άρα για την μέση τιμη των χ_i έχουμε:

$$\bar{X}=\frac{1440}{60}=\mathbf{24}$$

Για να υπολογίσουμε την διακύμανση έχουμε το γνωστό τύπο:

$$S^2=\frac{\sum(\chi_i-\bar{\chi})^2 \cdot v_i}{v}=.....\mathbf{84} \text{ και άρα } s=\sqrt{84}=\mathbf{9{,}17}$$

B4. Ας είναι y ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν χρόνο στο διάστημα [37,45)

Έπειδή θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε κλάση θα έχουμε:

$$\frac{45-37}{45-35}=\frac{y}{10}$$ από όπου προκύπτει ότι:

$$\boxed{\mathbf{y=8}}$$

Άρα το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά για να λύσει το μαθηματικό πρόβλημα **ήταν 8%**

ΘΕΜΑ Γ

Αν συμβολίσουμε με:

Γ: Το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει Γαλλικά και

Ι: Το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει Ισπανικά

Τότε:

P(Γ)= $3v/v^2+1$ και P(I)=$v+2/v^2+1$ και P(Γ∩I)=$v+1/ v^2+1$

Γ1. Το όριο που δόθηκε ισούται με την P(ΓUI) και υπολογίζεται αν πολλαπλασιάσουμε τους όρους του κλάσματος με $\sqrt{x^2+3}+2$

(με συζυγή παράσταση).Έτσι με τις πράξεις έχουμε:

$$\lim_{x\to -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}=1$$

Άρα το ενδεχόμενο ΓUI=Ω (πεπερασμένος δ.χ με ισοπίθανα ενδεχόμενα) είναι **βέβαιο αφού P(ΓUI)=1**

Γ2. Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

P(ΓUI)=P(Γ)+P(I)-P(Γ∩I)

Άρα: $1=3v/ v^2+1 + v+2/v^2+1 - v+1/ v^2+1$ (αφού το άθροισμα των πιθανοτήτων ισούται με την μονάδα) ή μετά τις πράξεις $v^2-3v=0$

από όπου προκύπτει v=0 ή v=3 και επειδή προφανώς v≠0 θα έχουμε **v=3**

Γ3. Τα ενδεχόμενα Γ-Ι και Ι-Γ είναι **ασυμβίβαστα** (αυτό μπορεί να φανεί και με διάγραμμα του Venn) και άρα:

P((Γ-Ι) U (Ι-Γ))=P(Γ-Ι)+P(Ι-Γ)=P(Γ)-P(Γ∩Ι)+P(Ι)- P(Γ∩Ι)=P(Γ)+ P(Ι)- 2P(Γ∩Ι).

Αφού P(Γ)=9/10 και P(Ι)=5/10=0,5 και P(Γ∩Ι)=4/10=2/5 (Μια και v=3) καταλήγουμε ότι

$P((\Gamma\text{-}I) \cup (I\text{-}\Gamma))=\mathbf{6/10}=3/5$

Γ4. Ξέρουμε ότι $P(\Gamma\cap I)=4/10$ και επειδή τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, σύμφωνα με τον ορισμό θα έχουμε:

$$P(\Gamma\cap I)=\frac{N(\Gamma\cap I)}{N(\Omega)}=\frac{32}{N(\Omega)} \text{ άρα } \frac{2}{5}=\frac{32}{N(\Omega)}$$ από όπου προκύπτει **N(Ω)=80.**

ΘΕΜΑ Δ:

Δ1: $f(x)=\dfrac{1+\ln^2 x}{x}$ έχει πεδίο ορισμού $D_f=(0,\infty)$ και $f(1)=1$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο D_f ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x)=-\frac{\ln^2 x-2\ln x+1}{x^2}=-\frac{(\ln x-1)^2}{x^2}<0$$

με $x>0$ και $x\neq e$ και $f'(1)=-1<0$ η f είναι **γνησίως φθίνουσα** συνάρτηση στο $(0,\infty)$.(Η $f'(\chi)=0$ έχει λύση την $\chi=e$ και από τον πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι είναι φθίνουσα)

Δ2. Για το εμβαδόν του ορθογωνίου έχουμε:

$E(x)=x.f(x)$, με $\chi>0$ και $f(x)>0$

Άρα $E(x)=1+\ln^2 x$, $x>0$

Η $E(\chi)$ είναι παραγωγίσιμη για $\chi>0$ και έτσι:

$E'(\chi)=2\ln x/\chi$, $\chi>0$

$E'(\chi)=0$ από όπου προκύπτει: $\chi=1$

Επίσης $E'(\chi)>0$ για $\chi>1$ και $E'(\chi)<0$ για $0<\chi<1$

Ο πίνακας μονοτονίας της Ε(χ) είναι:

	0	**1**
χ		
Ε΄(χ)	**-**	**+**
Ε(χ)	↓	↑

Ελάχιστο

Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστο όταν χ=1 με Ε(1)=1 και άρα το ορθογώνιο ΟΚΜΛ είναι τετράγωνο (Οι κόρυφές είναι Ο(0,0), Κ(1,0), Λ(0,1) και Μ(1,1) με μήκος πλευρών 1).

Δ3. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Σ(1,f(1)) είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): ψ=λχ+β, β≠10 και άρα $λ_ε=λ_η$ δηλαδή f΄(1)=λ και άρα λ=-1.

Έτσι η (ε) γίνεται ψ=-χ+β, β≠10 και οι παρατηρήσεις $(χ_ι,ψ_ι)$ πληρούν τη σχέση $ψ_ι=-χ_ι+β$, ι=1,....10 και από την γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (3 σελ.99) προκύπτει ότι ψ=-10+β και $s_y=s_x=2$.

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές θα πρέπει

CV_y≤0,1 δηλαδή 2/|β-10| ≤0,1 από όπου προκύπτει |β-10|≥20 και άρα **β≥30 ή β≤-10**

Δ4.Επειδή Α≠ø και Α∩Β≠ø θα έχουμε P(A) ,P(AUB)>0

Επειδή Α CAUB θα είναι P(A) ≤P(AUB) με P(A) ,P(AUB) є(0,1] και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα (ο,∞) στο θα είναι:

f(P(A))≥f(P(AUB) (1) και αφού Α∩ΒCAUB θα είναι: P(A∩B)≤ P(AUB) με P(A∩B), P(AUB)**є**(0,1] και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (ο,∞) θα ισχύει: f(P(A∩B))≥f(P(AUB)) (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε

f(P(A))+ f(P(A∩B))≥2 f(P(AUB)) που είναι η ζητούμενη.