ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΙΟΥ 2012
ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελ. 253
Α2. Σελ. 191
Α3. Σελ. 258
Α4.
(α) Σ
(β) Σ
(γ) Λ
(δ) Λ
(ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Ισχύει $|z-3|^2+|z+3|^2=36$ και $|2w-1|=|w-2|$

Είναι $|z-3|^2+|z+3|^2=36 \Rightarrow (z-3)(\overline{z}-3)+(z+3)(\overline{z}+3)=36 \Rightarrow$

$\Rightarrow z\overline{z}-\cancel{3z}-\cancel{3\overline{z}}+9+z\overline{z}+\cancel{3z}+\cancel{3\overline{z}}+9=36 \Rightarrow 2z\overline{z}=18 \Rightarrow z\overline{z}=9 \Rightarrow |z|^2=9 \Rightarrow |z|=3$

Άρα κύκλος με Κ(0 , 0) και ακτίνα ρ=3

Β2.

$|z_1-z_2|=3\sqrt{2} \Rightarrow |z_1-z_2|^2=(3\sqrt{2})^2 \Rightarrow (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=18$

$z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=18 \Rightarrow |z_1|^2-(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1})+|z_2|^2=18$

$\cancel{9}-(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1})+\cancel{9}=\cancel{18} \Rightarrow z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}=0$

Έχουμε

$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$

$=|z_1|^2+\cancelto{0}{z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}}+|z_2|^2=9+0+9=18$

Άρα $|z_1+z_2|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Β3.

$|2w-1|^2=|w-2|^2 \Rightarrow (2w-1)(2\overline{w}-1)=(w-2)(\overline{w}-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4w\overline{w}-\cancel{2w}-\cancel{2\overline{w}}+1=w\overline{w}-\cancel{2w}-\cancel{2\overline{w}}+4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3w\overline{w}=3 \Rightarrow w\overline{w}=1 \Rightarrow |w|^2=1 \Rightarrow |w|=1$ κύκλος με $K(0,0)$ ακτίνα $\rho=1$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\frac{2}{x}+\alpha x^2+\beta \quad , \ x>0$$

Γ1.

Για $x>0$

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+2\alpha x=\frac{2\alpha x^3-2}{x^2}=\frac{2(\alpha x^3-1)}{x^2}<0$$

$$(\text{για } \ x>0\Rightarrow x^3>0\overset{\alpha<0}{\Rightarrow}\alpha x^3<0\Rightarrow \alpha x^3-1<0)$$

$$\text{Άρα } \left.\begin{array}{l} f'(x)<0 \text{ στο } (0,+\infty) \\ f(x) \text{ συνεχής στο } (0,+\infty) \end{array}\right\}\Rightarrow f\downarrow(0,+\infty)$$

Γ2.

$$\text{Είναι } \ f\downarrow A=(0,+\infty)\Rightarrow f(A)=(\lim_{x\to+\infty}f(x)\ ,\ \lim_{x\to 0^+}f(x))=(1)$$

$$\text{όπου } \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(\frac{2}{x}+\alpha x^2+\beta)=-\infty$$

$$\text{διότι } \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0 \text{ και } \lim_{x\to\infty}(\alpha x^2)\overset{(\alpha<0)}{=}-\infty$$

$$\text{και } \ \lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$$

$$\text{Από } (1)\Rightarrow f(A)=(-\infty,+\infty)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Το } 0\in f(A) \\ f\downarrow A=(0,+\infty) \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=0 \text{ έχει μοναδική λύση στο } (0,+\infty)$$

Γ3.

$$f(x)=\frac{2}{x}+\alpha x^2+\beta\Rightarrow f(x)=\frac{2+\alpha x^3+\beta x}{x}\Rightarrow f(x)=\frac{\alpha x^3+\beta x+2}{x}\ ,\ x>0$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\alpha x^3+\beta x+2}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left((\alpha x^3+\beta x^2+2)\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

$$\text{διότι είναι } \ \lim_{x\to 0^+}\left(\alpha x^3+\beta x^2+2\right)=2 \ \text{ και } \ \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

Άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Είναι $\frac{f(x)}{x}=\frac{\frac{2}{x}+\alpha x^2+\beta}{x}=\frac{2}{x^2}+\alpha x+\frac{\beta}{x}$

Αν $\alpha\neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^2}+\alpha x+\frac{\beta}{x}\right)=\alpha\cdot(+\infty)\begin{cases}=+\infty & ,\ \text{αν}\ \ \alpha>0\\ =-\infty & ,\ \text{αν}\ \ \alpha<0\end{cases}$

Οπότε δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη για $\alpha\neq 0$

Για $\alpha=0$ και $\beta\in R$ έχουμε :

$f(x)=\frac{2}{x}+\beta \quad , \quad x>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^2}+\frac{\beta}{x}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\beta\right)=\beta$

Άρα η y=β είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

Γ4.

$f(x_0)=7\overset{x_0=1}{\Leftrightarrow}f(1)=7\Leftrightarrow 2+\alpha+\beta=7\Leftrightarrow\alpha+\beta=5 \quad (1)$

Η f παρουσιάζει στο εσωτερικό $x_o=1$ τοπικό ακρότατο και η f παραγωγίσιμη στο $x_o=1$:

$\overset{\Theta.\text{Fermat}}{\Rightarrow}\ f'(1)=0\Leftrightarrow -2+2\alpha=0\Leftrightarrow 2\alpha=2\Leftrightarrow\alpha=1 \quad (2)$

Από (1) και (2)$\Rightarrow\beta=4$

Για α=1, β=4 έχουμε:

$f(x)=\frac{2}{x}+x^2+4, \qquad x>0$

$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+2x=\frac{2x^3-2}{x^2}=2\frac{(x^3-1)}{x^2} \quad , \quad x>0$

$f'(x)=0\Rightarrow 2\frac{(x^3-1)}{x^2}=0\Rightarrow x^3-1=0\Rightarrow x^3=1\Rightarrow x=1$

$f'(x)>0\Rightarrow 2\frac{(x^3-1)}{x^2}>0\Rightarrow x^3-1>0\Rightarrow x^3>1\Rightarrow x>1$

Οπότε είναι

x	0		1		+∞
f′(x)	‖	−	0	+	
f(x)	‖	↘	Ο,Ε	↗	

Η f για $x_o=1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, το f(1)=2+1+4=7.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

- $f''(x) > -2$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\eta\mu x}{x^2-x} = 2$
- $f(1) = f'(0)$

Έστω $h(x) = \dfrac{f(x)+\eta\mu(x)}{x^2-x}$ με $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 2$

Άρα $h(x)(x^2-x) = f(x)+\eta\mu x \Rightarrow$

$f(x) = h(x)(x^2-x) - \eta\mu x$

f παραγωγωγίσιμη στο R $\Rightarrow$ f συνεχής στο R $\Rightarrow$ f συνεχής στο $x_0 = 0$

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[h(x)\cdot(x^2-x)-\eta\mu x\right] = \lim\limits_{x\to 0} h(x)(x^2-x) - \lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x = 0-0 = 0$

Άρα $f(0)=0$

Έχουμε $f(1) = f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

Όμως $f(x) = h(x)(x^2-x)-\eta\mu x \overset{:x\neq 0}{\Longrightarrow} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{h(x)(x^2-x)}{x} - \dfrac{\eta\mu x}{x}$

Άρα $f(1) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{h(x)(x^2-x)}{x} - \dfrac{\eta\mu x}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}} - \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 2(-1)-1 = -3$

Δ2.

$g(x) = f(x) + \alpha(x+1)^2$

Εφόσον ισχύει το Θ. Rolle στο [0,1] έχουμε

ότι g συνεχής στο [0,1]

g παραγωγωγίσιμη Στο (0,1)

και

$$\left.\begin{aligned} &g(0)=g(1)\\ &g(0)=f(0)+\alpha=\alpha\\ &g(1)=f(1)+4\alpha=-3+4\alpha \end{aligned}\right\} -3+4\alpha=\alpha \Rightarrow -3=-3\alpha \Rightarrow \alpha=1$$

Δ3.

$f'(\xi) = -2(\xi+1) \Leftrightarrow f'(\xi)+2(\xi+1) = 0$

Έστω η $\Phi(x) = f(x)+x^2+2x$

- Η $\Phi(x)$ συνεχής στο [0,1] ως πραξη συνεχών
- Η $\Phi(x)$ παραγωγίσιμη στο (0,1) με $\Phi'(x) = f'(x)+2x+2$
- $\Phi(0) = f(0)+0 = 0$
- $\Phi(1) = f(1)+1+2 = -3+3 = 0$

Από Θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $\Phi'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi)+2\xi+2 = 0$

Δ4.

$g(x) = f(x) + (x+1)^2$

$g'(x) = f'(x) + 2(x+1)$

Για $x = \xi$ $\quad g'(\xi) = f'(\xi) + 2(\xi + 1) = 0$

Είναι $g''(x) = f''(x) + 2 > 0$ γιατί $f''(x) > -2$

Άρα η $g'(x)$ γνησίως αύξουσα

Για $x > \xi \overset{g'(x)\ \text{γν.αυξ.}}{\Rightarrow} g'(x) > g'(\xi) \Rightarrow g'(x) > 0$

Για $x < \xi \overset{g'(x)\ \text{γν.αυξ.}}{\Rightarrow} g'(x) < g'(\xi) \Rightarrow g'(x) < 0$

Οπότε είναι

x	$-\infty$	ξ	$+\infty$
g'(x)	−	0	+
g(x)	↘		↗
		Ο,Ε	

Άρα η g παρουσιάζει στο $x_o = \xi$ ολικό ελάχιστο

Επιμέλεια :
Μυλωνίδης Σ. – Τάνης Α. – Ηλιάδης Κ. – Μαργαριτέλη Ε. – Πασχαλίδου Ξ. – Σαμαρά Φ.