Τετάρτη 23 Μαΐου 2012
Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Εσπερινών Λυκείων
Ενδεικτικές απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ. 31 Βιβλίο
Α2. Θεωρία σελ 148
Α3. σελ. 96-97
Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$

Β1.

Σημείο τομής με yy' για $x = 0$ είναι $f(0) = \beta$

Είναι $f'(x) = 2\alpha x + \alpha$

$$\left.\begin{aligned} f'(0) &= \varepsilon\varphi 45 \\ f'(0) &= \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \varepsilon\varphi 45 \Rightarrow \alpha = 1$$

Οπότε $f(x) = x^2 + x + \beta$

Β2.

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)+\beta x}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+\beta+\beta x}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)+\beta(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x+\beta)}{\cancel{x+1}} = \beta - 1$$

Οπότε $\beta - 1 = 6 \Rightarrow \beta = 7$

Β3.

Είναι $\alpha = 1$, $\beta = 7$ Αρα $f(x) = x^2 + x + 7$

Οπότε $g(x) = f(x) - x^3 = x^2 + x + 7 - x^3 = -x^3 + x^2 + x + 7$, $x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = -3x^2 + 2x + 1$

$g'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 2x + 1 = 0$

$$\Delta = 4 - 4\cdot(-3)\cdot 1 = 16 \quad x_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			T.E		T.M		

Στο $(-\infty,-\frac{1}{3}]$ η g γνησίως φθίνουσα

Στο $[-\frac{1}{3},1]$ η g γνησίως αύξουσα

Στο $[1,+\infty)$ η g γνησίως φθίνουσα

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Επειδή $F_2\% = 50\% \Rightarrow \delta = 25$

Γ2.

Είναι $c = \frac{R}{K} = \frac{45-5}{4} = \frac{40}{4} = 10$ οπότε οι κλάσεις γίνονται $[5,15),[15,25)$ κλπ

Είναι $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = \alpha + 4 + 3\alpha - 6 + 2\alpha + 8 + \alpha - 2 = 7\alpha + 4$

Είναι $N_2 = \alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 4\alpha - 2$

$F_2 = \frac{N_2}{\nu} \Rightarrow 0,5 = \frac{4\alpha - 2}{7\alpha + 4} \Rightarrow 4\alpha - 2 = 3,5\alpha + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,5\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{4}{0,5} \Rightarrow \alpha = 8$

Άρα ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις	X_i	V_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5,15)	10	12	20	12	20
[15,25)	20	18	30	30	50
[25,35)	30	24	40	54	90
[35,45)	40	6	10	60	100
Σύνολο	-	60	100	-	-

Γ3.

Μέση Τιμή

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i = \frac{10\cdot 12 + 20\cdot 18 + 30\cdot 24 + 40\cdot 6}{60} = \frac{120+360+720+240}{60} = \frac{1440}{60} = 24\,\text{min}$$

Διακύμανση

$$s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2\nu_i=\frac{(10-24)^2\cdot 12+(20-24)^2\cdot 18+(30-24)^2\cdot 24+(40-24)^2\cdot 6}{60}=$$

$$=\frac{196\cdot 12+16\cdot 18+36\cdot 24+256\cdot 6}{60}=\frac{5040}{60}=84$$

$$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{84}\simeq 9,17$$

Γ4.

Θεωρούμε ότι η κατανομή είναι ομοιόμορφη

Στο διάστημα $[35,45)$ πλάτους 10 έχουμε 10%

Στο διάστημα $[37,45)$ πλάτους 8 έχουμε x

$$x=\frac{10\%\cdot 8}{10}=8\%$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f(x)=\frac{2}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{(2)'\cdot(x^2+1)-2\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-4x}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow -4x=0\Rightarrow x=0$$

$$f'(x)>0\Rightarrow\frac{-4x}{(x^2+1)^2}>0\Rightarrow -4x>0\Rightarrow x<0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↘

Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$

Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

Δ2.

$0<\alpha<\beta<\gamma<3$ και επειδή στο $[0,+\infty)$ η f είναι

γν. φθίνουσα άρα $f(0)>f(\alpha)>f(\beta)>f(\gamma)>f(3)$

$R =$ Έυρος $=$ Μεγαλύτερη τιμή $-$ μικρότερη τιμή $=$

$$= f(0)-f(3) = 2-\frac{2}{10} = \frac{20}{10}-\frac{2}{10} = 1{,}8$$

Δ3.

Η εφαπτομένη είναι $y=\lambda x+\beta$

Στο $x = 1$ είναι

$$y = f(1) = \frac{2}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lambda = f'(1) = \frac{-4\cdot 1}{\left(1^2+1\right)^2} = \frac{-4}{2^2} = \frac{-4}{4} = -1$$

Οπότε $y=\lambda x+\beta \Rightarrow 1=-1\cdot 1+\beta \Rightarrow 2=\beta$

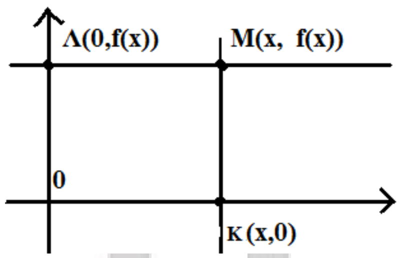
Άρα ε: $y=-x+2$

Είναι $\bar{x}=10$, $S_x=2$ και ε: $y=-x+2$

$\bar{y}=-1\cdot\bar{x}+2=-10+2=-8$

$Sy=|-1|\,Sx=1\cdot 2=2$

Δ4.



Το εμβαδό του ΟΚΜΛ είναι

$$E(x)=(OK)\cdot(O\Lambda)=x\cdot f(x)=x\frac{2}{x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1}\ ,\ x>0$$

$$E'(x)=\frac{(2x)'\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$E'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Rightarrow -2x^2+2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \text{ (το } x=-1 \text{ απορρίπτεται)}$$

$$E'(x) > 0 \Rightarrow \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2} > 0 \Rightarrow -2x^2+2>0 \Rightarrow x^2<1 \Rightarrow |x|<1 \overset{x>0}{\Rightarrow} 0<x<1$$

x	0		1		$+\infty$
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$\searrow$	T.E	$\nearrow$	

Άρα για x=1 το εμβαδό γίνεται ελάχιστο οπότε είναι (ΟΚ)=1

Και $(\text{ΟΛ}) = f(1) = \frac{2}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1$

Άρα (ΟΚ)=(ΟΛ) και έχουμε ότι το εμβαδό γίνεται ελάχιστο όταν έχουμε τετράγωνο

Επιμέλεια :
Μυλωνίδης Σ. – Τάνης Σ. – Ηλιάδης Κ. – Μαργαριτέλη Ε. – Πασχαλίδου Ξ. – Σαμαρά Φ.