

Θέμα Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 30

A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 148

A3. a) Λάθος

β) Σωστό

γ) Ακυρώθηκε

δ) Σωστό

ε) Σωστό

Θέμα Β

B1.

$$f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$$

$$f(0) = 0^2 + \alpha \cdot 0 + \beta = \beta$$

Η f είναι παραγωγήσιμη με $f'(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)' = 2x + \alpha$ (1)

Το σημείο που η C_f τέμνει τον γάληνο είναι το $M(0, f(0)) = M(0, \beta)$.

Η C_f στο $M(0, \beta)$ δέχεται εφαπτομένη με κλίση

$$\lambda = f'(0) = 2 \cdot 0 + \alpha = \alpha \quad (2)$$

Αφού η εφαπτομένη σχηματίζει με τον γάληνο 45° έχει κλίση

$$\lambda = \text{εφ}45^\circ = 1 \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow \alpha = 1$$

B2.

$$\text{Για } \alpha = 1, f(x) = x^2 + x + \beta$$

Για $x \neq -1$ έχω:

$$\frac{f(x) + \beta x}{x + 1} = \frac{x^2 + x + \beta + \beta x}{x + 1} = \frac{x(x+1) + \beta(1+x)}{x+1} = \frac{(x+1)(\beta+x)}{x+1} = \beta + x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + \beta x}{x + 1} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow -1} (\beta + x) = \beta - 1 \quad (2)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + \beta x}{x + 1} = 6 \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow \beta - 1 = 6 \Leftrightarrow \beta = 7$$

B3.

Για $\alpha = 1$, $\beta = 7$, $f(x) = x^2 + x + 7$

και $g(x) = f(x) - x^3 = x^2 + x + 7 - x^3 = -x^3 + x^2 + x + 7$, $x \in \mathbb{R}$

H g είναι παραγωγόσημη με $g'(x) = -3x^2 + 2x + 1$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -\frac{1}{3}$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3} \text{ ή } x > 1$$

x	-∞	$-\frac{1}{3}$	1	+∞
$g'(x)$	-	+	-	
$g(x)$	↘	↗	↘	↗

άρα η g είναι στο $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ και είναι στο $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ και στο $[1, +\infty)$

Θέμα Γ

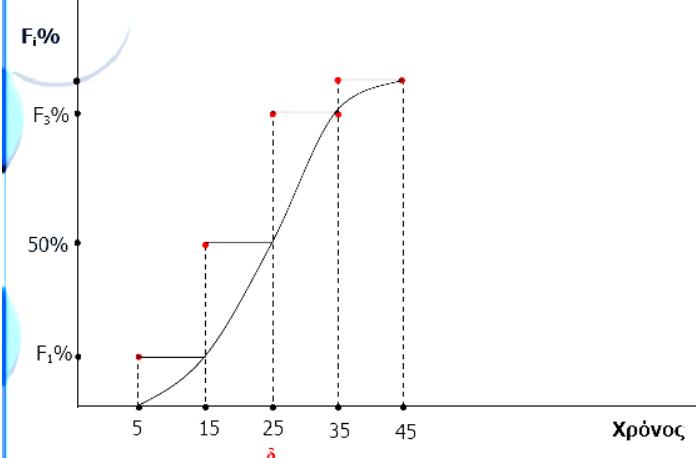
X: χρόνος (σε λεπτά)

$$R = \text{μεγαλύτερη} - \text{μικρότερη παρατήρηση} = 45 - 5 = 40$$

$\kappa = 4$ κλάσεις

$$c = \frac{R}{\kappa} = \frac{40}{4} = 10$$

Γ1.



(σε λεπτά)

Στο ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών % συχνοτήτων % κατασκευάζουμε και το πολύγωνο ζεκινώντας από το αριστερό κάτω άκρο του 1^ο ορθογωνίου κι ενώνουμε διαδοχικά τα δεξιά άνω άκρα όλων των ορθογωνίων με τεθλασμένη γραμμή. Επειδή στη διάμεσο αντιστοιχεί $F_i \% = 50 \%$, από το 50 του κατακόρυφου άξονα φέρνουμε οριζόντια ευθεία μέχρι να τμήσει το πολύγωνο και το σημείο τομής το προβάλλουμε στον οριζόντιο άξονα. Ήτοι προκύπτει ότι

$\delta = 25$ λεπτά

$$F_1\% = f_1\% = 20\%$$

$$F_2\% = F_1\% + f_2\% = (20 + 30)\% = 50\%$$

$$F_3\% = F_2\% + f_3\% = (50 + 40)\% = 90\%$$

$$F_4\% = F_3\% + f_4\% = (90 + 10)\% = 100\%$$

- Τα άκρα κάθε κλάσης διαφέρουν κατά $c = 10$ και από το ιστόγραμμα βλέπουμε πως είναι τα άκρα των κλάσεων:

$$[5, 15), [15, 25), [25, 35), [35, 45)$$

- Οι κεντρικές τιμές είναι:

$$x_1 = \frac{15 + 5}{2} = 10$$

$$x_2 = x_1 + c = 10 + 10 = 20$$

$$x_3 = x_2 + c = 20 + 10 = 30$$

$$x_4 = x_3 + c = 30 + 10 = 40$$

Οπότε ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Χρόνοι (σε λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5, 15)	10	12	20	12	20
[15, 25)	20	18	30	30	50
[25, 35)	30	24	40	54	90
[35, 45)	40	6	10	60	100
Σύνολο	-	60	100	-	-

Γ3.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i}{v} = \frac{10 \cdot 12 + 20 \cdot 18 + 30 \cdot 24 + 40 \cdot 6}{60} = \frac{120 + 360 + 720 + 240}{60} = \frac{1440}{60} = 24 \text{ λεπτά}$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i = \frac{(10-24)^2 \cdot 12 + (20-24)^2 \cdot 18 + (30-24)^2 \cdot 24 + (40-24)^2 \cdot 6}{60}$$

$$= \frac{196 \cdot 12 + 16 \cdot 18 + 36 \cdot 24 - 256 \cdot 6}{60}$$

$$= \frac{2352 + 288 + 864 - 1536}{60} = \frac{5040}{60} = 84$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{84} \approx 9,17 \text{ λεπτά}$$

Γ4.

Τουλάχιστον 37 λεπτά σημαίνει $[37, 45]$.

Επειδή οι παρατηρήσεις είναι συμμετρικά και ομοιόμορφα κατανεμημένες σε κάθε κλάση ισχύει:

$$\frac{c}{f_4 \%} = \frac{c'}{f_4 \%} \Leftrightarrow \frac{10}{10} = \frac{8}{f_4 \%} \Leftrightarrow [f_4 \% = 8\% \text{ των μαθητών}]$$

Θέμα Δ

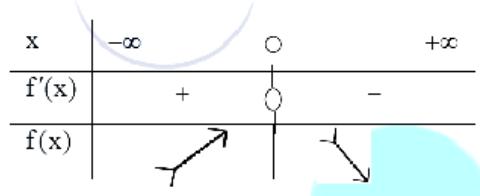
Δ1. $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -\frac{2}{(x^2 + 1)^2} (x^2 + 1)' = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2} > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2} < 0 \Leftrightarrow x > 0$$



Άρα η f είναι ↑ στο $(-\infty, 0]$ και ↓ στο $[0, +\infty)$

Δ2.

$\alpha, \beta, \gamma \in (0, 3) \subset [0, +\infty)$ στο οποίο η f είναι γηγεσίως φθίνουσα
 οπότε $0 < \alpha < \beta < \gamma < 3$ και f ↓
 $f(0) > f(\alpha) > f(\beta) > f(\gamma) > f(3)$

R = μεγαλύτερη παρατήρηση - μικρότερη παρατήρηση

$$R = f(0) - f(3) = \frac{2}{0^2 + 1} - \frac{2}{3^2 + 1} = 2 - \frac{2}{10} = \frac{18}{10} = 1.8$$

Δ3.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $\Sigma(1, f(1))$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - \frac{2}{1^2 + 1} = \frac{-4 \cdot 1}{(1^2 + 1)^2} \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon: y = -x + 2$$

Έστω $A_i(x_i, -x_i + 2)$, $i=1, 2, \dots, 10$ τα σημεία της ευθείας ε

Οι x_i έχουν $\bar{x} = 10$ και $S_x = 2$

Οι $y_i = -x_i + 2$ προκύπτουν ως εξής:

Αρχικά κάθε x_i πολλαπλασιάζεται με (-1) οπότε $z_i = -x_i$

και λόγω εφαρμογής σχολικού βιβλίου:

$$\bar{x}_z = -\bar{x} = -10 \text{ και } S_z = |-1| \cdot S_x = 2$$

Μετά σε κάθε z_i προσθέτουμε το 2 δηλ. $y_i = -x_i + 2$.

οπότε από εφαρμογή σχολικού βιβλίου:

$$\bar{x}_y = \bar{x}_z + 2 = -10 + 2 = -8 \text{ και } S_y = S_z = 2$$

Δ4.

$$M(x, f(x)) = \left(x, \frac{2}{x^2 + 1} \right)$$

$$K(x, 0), \Lambda(0, f(x)) = \left(0, \frac{2}{x^2 + 1} \right)$$

$$(OK) = |x| = x \text{ αφού } x > 0$$

$$(KM) = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (f(x) - 0)^2} = |f(x)| = \frac{2}{x^2 + 1} \text{ διότι } \frac{2}{x^2 + 1} > 0$$

$$\text{Εμβαδόν ορθογωνίου} = (\text{OK}) \cdot (\text{KM}) = x \cdot \frac{2}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad x > 0$$

$$\text{άρα } E(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad x > 0$$

$$E'(x) = \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(2x)'(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$\frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}, \quad x > 0$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$\text{και } E'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

x	0	1	$+\infty$
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$			

Άρα για $x = 1$ παρουσιάζει μέγιστο.

Τότε $(\text{OK}) = 1$

$$(\text{KM}) = f(1) = \frac{2}{1^2 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

άρα $(\text{OK}) = (\text{KM})$ δηλαδή το ΟΚΜΛ γίνεται τετράγωνο