

mathematica.gr

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012**

**Λύσεις  
των  
θεμάτων**



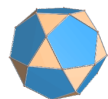
Έκδοση 1<sup>η</sup> (28/05/2012, 18:40)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις  
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς  
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου  
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**  
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica  
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=132389>

**Συνεργάστηκαν οι:**

*Αντωνέας Στράτης, Ανδρέας Βαρβεράκης,  
Φωτεινή Καλδή, Σπύρος Καπελλίδης,  
Σπύρος Καρδαμίτσης, Νίκος Κασίπης,  
Χρήστος Κυριαζής, Γρηγόρης Κωστάκος,  
Ροδόλφος Μπόρης, Μίλτος Παπαγρηγοράκης  
Λευτέρης Πρωτοπαπάς, Σωτήρης Στόγιας,  
Αλέξανδρος Συγκελάκης, Κώστας Τηλέγραφος,  
Χρήστος Τσιφάκης*

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα  
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**



**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι  $f'(x) > 0$ .

Έστω  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$ . Θα δείξουμε ότι  $f(x_1) < f(x_2)$ . Πράγματι, στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ οπότε έχουμε } f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1). \text{ Επειδή } f'(\xi) > 0 \text{ και } x_2 - x_1 > 0,$$

έχουμε  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , οπότε  $f(x_1) < f(x_2)$ .

**A2.** Μια συνάρτηση  $f$  θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $(\alpha, \beta)$  και επιπλέον  $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$  και

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta).$$

**A3.** Μια συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού  $A$ , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε  $f(x) \leq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Το  $x_0$  λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το  $f(x_0)$  τοπικό μέγιστο της  $f$ .

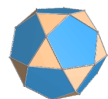
- A4.** α) Σωστό  
β) Σωστό  
γ) Λάθος  
δ) Λάθος  
ε) Λάθος

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Είναι

$$\begin{aligned} |z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 &\Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) + (z+1)(\bar{z}+1) = 4 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - z - \bar{z} + 1 + |z|^2 + z + \bar{z} + 1 = 4 \\ &\Leftrightarrow 2|z|^2 = 2 \Leftrightarrow |z| = 1. \end{aligned}$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$  είναι ο κύκλος με κέντρο το  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .



**B2.** Έχουμε ότι  $|z_1| = |z_2| = 1$ . Επίσης:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\text{Re}(\bar{z}_1 z_2) = 2 \Leftrightarrow \text{Re}(\bar{z}_1 z_2) = 0.$$

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}(\bar{z}_1 z_2) = 2. \text{ Άρα, } |z_1 + z_2| = \sqrt{2}.$$

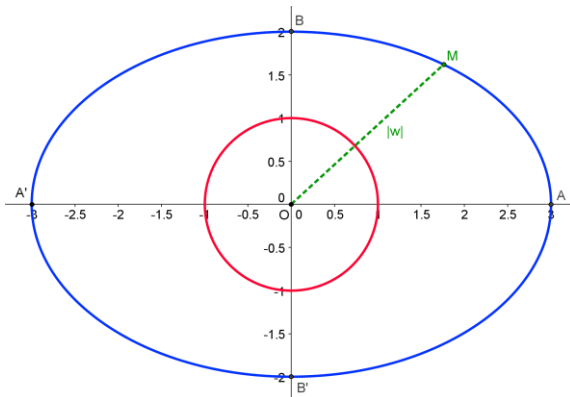
**B3.** Έστω  $w = x + yi$ , όπου  $x, y \in \mathbb{R}$ . Τότε  $|w - 5\bar{w}| = |x + yi - 5(x - yi)| = |-4x + 6iy| = 12$  άρα  
ισοδύναμα παίρνουμε

$$\left| -\frac{x}{3} + \frac{y}{2}i \right| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας  $M(x, y)$  του μιγαδικού  $w$  είναι η προηγούμενη έλλειψη.

Οι κορυφές της έλλειψης είναι  $A(3, 0)$ ,  $A'(-3, 0)$  και  $B(0, 2)$ ,  $B'(0, -2)$ . Ο μεγάλος άξονας έχει μήκος  $2a = (AA') = 6$  και ο μικρός άξονας  $2b = (BB') = 4$ .

Είναι γνωστό από τα μαθηματικά κατεύθυνσης της Β Λυκείου (σελίδα 104) ότι για οποιοδήποτε σημείο  $M$  της έλλειψης ισχύει ότι  $b \leq (MO) \leq a$ . Άρα,  $2 \leq |w| \leq 3$ . Για  $w = 2i$  ή  $w = -2i$  έχουμε ότι  $\min |w| = 2$  και για  $w = 3$  ή  $w = -3$  έχουμε ότι  $\max |w| = 3$ .



**B4.** Από την τριγωνική ανισότητα  $\| |z| - |w| \| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$  βάζοντας όπου  $w$  το  $-w$  παίρνουμε την  $\| |z| - |w| \| \leq |z - w| \leq |z| + |w|$ . Άρα αφενός  $|z - w| \leq |z| + |w| \leq 1 + 3 = 4$  και αφετέρου  $|z - w| \geq \| |z| - |w| \| \geq |z| - |w| \geq 2 - 1 = 1$  έχουμε:

$$1 = 2 - 1 \leq |w| - |z| \leq |w - z| \leq |w| + |z| \leq 3 + 1 = 4$$

**ΘΕΜΑ Γ**

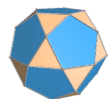
**Γ1.** Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη για κάθε  $x > 0$  διότι προκύπτει από πράξεις μεταξύ των παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $f_1(x) = x - 1$  (πολυώνυμο),  $f_2(x) = \ln x$  (λογαριθμική συνάρτηση).

$$\text{Είναι } f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} = \frac{x \ln x + x - 1}{x}.$$

Έχουμε  $f'(1) = 0$ .

Αν  $0 < x < 1$  τότε  $\ln x < 0 \Rightarrow x \ln x < 0$  και  $x - 1 < 0$ . Επομένως  $x \ln x + x - 1 < 0$  και έτσι  $f'(x) < 0$  για  $0 < x < 1$ . Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, 1]$ .

x	0	1	$+\infty$
<b>f'(x)</b>	-	0	+
<b>f(x)</b>	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$



Αν  $x > 1$  τότε  $\ln x > 0 \Rightarrow x \ln x > 0$  και  $x - 1 > 0$ . Επομένως  $x \ln x + x - 1 > 0$  και έτσι  $f'(x) > 0$  για  $x > 1$ . Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ .

Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, 1]$  άρα  $f((0, 1]) = \left[ f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [-1, +\infty)$  διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-1) \ln x - 1] = +\infty.$$

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$  άρα  $f([1, +\infty)) = \left[ f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty)$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1) \ln x - 1] = +\infty$$

Οπότε τελικά το σύνολο τιμών της  $f$  είναι  $[-1, +\infty)$ .

**Γ2.** Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$x^{x-1} = e^{2013} \Leftrightarrow (x-1) \ln x = 2013 \Leftrightarrow (x-1) \ln x - 1 = 2012 \Leftrightarrow f(x) = 2012$$

Όμως επειδή  $f((0, 1]) = [-1, +\infty)$ , η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, 1] \subseteq (0, +\infty)$  και  $2012 \in [-1, +\infty)$  άρα από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει  $x_1 \in (0, 1)$  ώστε  $f(x_1) = 2012$ . Επειδή επιπλέον η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, 1]$ , το  $x_1$  είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης  $f(x) = 2012$  στο  $(0, 1)$ .

Πιο αναλυτικά: Αφού  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  τότε  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) - 2012) = +\infty$  οπότε  $f(x) - 2012 > 0$  για κάθε  $x$  κοντά στο 0. Συνεπώς υπάρχει  $k > 0$  κοντά στο 0 (άρα  $k < 1$ ) ώστε  $f(k) - 2012 > 0$  δηλαδή  $f(k) > 2012$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[k, 1]$  και  $f(1) < 2012 < f(k)$  οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών στο διάστημα  $[k, 1]$  έχουμε το παραπάνω συμπέρασμα.

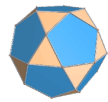
Όμοια αφού  $f([1, \infty)) = [-1, +\infty)$ , η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, +\infty) \subseteq (0, +\infty)$  και  $2012 \in [-1, +\infty)$  άρα από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (η αναλυτική δικαιολόγηση είναι όμοια με την παραπάνω) υπάρχει  $x_2 \in (1, +\infty)$  ώστε  $f(x_2) = 2012$ . Επειδή επιπλέον η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(1, +\infty)$ , άρα το  $x_2$  είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης  $f(x) = 2012$  στο  $(1, +\infty)$ .

Άρα τελικά η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς δύο θετικές λύσεις  $x_1$  και  $x_2$ .

**Γ3.** Θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f'(x) + f(x) = 2012 \Leftrightarrow f'(x)e^x + f(x)e^x = 2012e^x \Leftrightarrow (f(x)e^x - 2012e^x)' = 0 \text{ έχει λύση στο διάστημα } (x_1, x_2).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $H(x) = f(x)e^x - 2012e^x$ ,  $x \in [x_1, x_2]$ . Η συνάρτηση  $H$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  διότι προκύπτει από πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη στο  $(x_1, x_2)$  διότι προκύπτει από πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με  $H'(x) = f'(x)e^x + f(x)e^x - 2012e^x$ . Επίσης  $H(x_1) = H(x_2) = 0$  διότι από το προηγούμενο ερώτημα ισχύει  $f(x_1) = f(x_2) = 2012$ .



Συνεπώς ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την  $H$  στο  $[x_1, x_2]$ . Άρα υπάρχει  $x_0 \in (x_1, x_2)$  ώστε

$$H'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0)e^{x_0} + f(x_0)e^{x_0} - 2012e^{x_0} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012.$$

- Γ4.** Επειδή το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $[-1, +\infty)$  άρα για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $f(x) \geq -1 \Leftrightarrow f(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$ . Επίσης η μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = -1$  άρα και της  $g(x) = 0$  είναι το  $x = 1$ . Συνεπώς το ζητούμενο εμβαδό είναι το

$$\begin{aligned} E &= \int_1^e g(x) dx = \int_1^e (x-1) \ln x dx = \int_1^e \left( \frac{(x-1)^2}{2} \right)' \ln x dx \\ &= \left[ \frac{(x-1)^2}{2} \ln x \right]_0^e - \int_1^e \frac{(x-1)^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{(e-1)^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{x^2 - 2x + 1}{x} dx \\ &= \frac{(e-1)^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e \left( x - 2 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{(e-1)^2}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} - 2x + \ln x \right]_1^e \\ &= \frac{e^2 - 2e + 1}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{2} - 2e + 1 - \frac{1}{2} + 2 \right) = \frac{e^2 - 3}{4} \tau.μ. \end{aligned}$$

**ΘΕΜΑ Δ**

- Δ1.** Θεωρούμε συνάρτηση  $g(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t) dt - \frac{x-x^2}{e}, x \in (0, +\infty)$ .

Από την υπόθεση έχουμε ότι:  $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(1)$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ , οπότε η  $g$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για  $x = 1$ , οπότε παρουσιάζει και τοπικό ελάχιστο για  $x = 1$ .

Η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  (ως διαφορά συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων), παρουσιάζει και τοπικό ελάχιστο για  $x = 1$  που είναι εσωτερικό σημείο του  $A_g = (0, +\infty)$ , οπότε από το θεώρημα του Fermat έχουμε ότι  $g'(1) = 0$ .

Όμως  $g'(x) = f(x^2 - x + 1)(2x - 1) - \frac{1 - 2x}{e}$ , οπότε  $g'(1) = f(1) + \frac{1}{e}$

και αφού  $g'(1) = 0$ , έχουμε ότι  $f(1) + \frac{1}{e} = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{e}$  (1).

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ , οπότε διατηρεί πρόσημο και κατά συνέπεια λόγω της (1) έχουμε ότι  $f(x) < 0$ .

Τότε από την υπόθεση έχουμε  $\ln x - x = \left( \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) f(x)$  (2)

Αφού  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ , από την (2) βρίσκουμε ότι  $\frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e$  (3)

Θέτουμε  $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  [δικαιολόγηση: Η συνάρτηση με τύπο  $\ln t - t$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και αφού η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  με  $f(t) \neq 0$ , για κάθε  $t > 0$ , η συνάρτηση  $\frac{\ln t - t}{f(t)}$  είναι επίσης συνεχής στο  $(0, +\infty)$  ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων. Επομένως ορίζεται η συνάρτηση  $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt$  στο  $(0, +\infty)$  στο οποίο είναι παραγωγίσιμη] με  $F'(x) = \frac{\ln x - x}{f(x)}$  οπότε η (3) παίρνει τη μορφή:

$$F'(x) = F(x) + e \Leftrightarrow e^{-x} F'(x) - e^{-x} F(x) = e^{-x+1} \Rightarrow e^{-x} F(x) = -e^{-x+1} + c, c \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Για  $x=1$  η (4) γίνεται:  $e^{-1} F(1) = -e^{-1+1} + c \Leftrightarrow c=1$ , άρα από την (4) έχουμε:

$$e^{-x} F(x) = -e^{-x+1} + 1 \Leftrightarrow F(x) = -e^{-1} + e^x \Leftrightarrow \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt = e^x - e^{-1} \quad (5)$$

Το πρώτο μέλος της (5) είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση. Επίσης παραγωγίσιμη είναι και η συνάρτηση  $e^x - e^{-1}$  ως διαφορά των παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $e^x$  (εκθετική) και  $e^{-1}$  (σταθερή). Παραγωγίζοντας την (5) βρίσκουμε ότι:  $\frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$ .

Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  ως γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $e^{-x}$  [σύνθεση των παραγωγίσιμων  $e^x$  (εκθετική) και  $-x$  (πολυωνυμική)] και  $\ln x - x$  [διαφορά των παραγωγίσιμων  $\ln x$  (λογαριθμική) και  $-x$  (πολυωνυμική)].

**Δ2.** Για  $x \in (0,1)$  έχουμε ότι:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - x}{e^x} = -\infty$ , αφού  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$ .

Τότε για τον υπολογισμό του ορίου  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( f^2(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right)$  θέτουμε  $u = \frac{1}{f(x)}$ , οπότε  $u \rightarrow 0^-$ , άρα για  $x \in (0,1)$  έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( f^2(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right) &= \lim_{u \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{u^2} \eta \mu u - \frac{1}{u} \right) = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\eta \mu u - u}{u^2} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\sigma \nu \nu u - 1}{2u} = 0 \end{aligned}$$

αφού  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \nu \nu x - 1}{x} = 0$  και δεδομένου ότι για το όριο  $\lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\eta \mu u - u}{u^2}$  ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De L' Hospital, αφού  $\lim_{u \rightarrow 0^-} (\eta \mu u - u) = \lim_{u \rightarrow 0^-} u^2 = 0$  και υπάρχει

$$\text{το } \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{(\eta \mu u - u)'}{(u^2)'} = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\sigma \nu \nu u - 1}{2u} = 0.$$

**Δ3.** Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$ , οπότε ορίζεται η  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  και είναι παραγωγίσιμη με  $F'(x) = f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$ .

Η  $F'$  είναι παραγωγίσιμη αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με

$$F''(x) = f'(x) = -e^{-x}(\ln x - x) + e^{-x}\left(\frac{1}{x} - 1\right) = e^{-x}\left(-\ln x + x + \frac{1}{x} - 1\right) \geq e^{-x}\frac{1}{x}$$

αφού  $x - 1 - \ln x \geq 0, x \in (0, +\infty)$ .

Επιπλέον αφού ισχύει  $e^{-x}\frac{1}{x} > 0$  για κάθε  $x > 0$ , έχουμε ότι  $F''(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ ,

οπότε η συνάρτηση  $F$  είναι κυρτή στο  $(0, +\infty)$  και η  $F'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

Η συνάρτηση  $F$  είναι συνεχής στα  $[x, 2x], [2x, 3x] \subset (0, +\infty)$  με  $x > 0$  αφού είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$ , είναι παραγωγίσιμη στα  $(x, 2x), (2x, 3x) \subset (0, +\infty)$  με  $x > 0$  αφού είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$ , οπότε από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχουν  $x_1 \in (x, 2x), x_2 \in (2x, 3x)$  ώστε  $F'(x_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} = \frac{F(2x) - F(x)}{x}$  (6) και

$$F'(x_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x} = \frac{F(3x) - F(2x)}{x} \quad (7).$$

Όμως  $x_1 < x_2$  και η  $F'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ , οπότε  $F'(x_1) < F'(x_2)$  και από τις (6), (7) βρίσκουμε:

$$\frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(2x)}{x} \Leftrightarrow F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x) \Leftrightarrow F(x) + F(3x) > 2F(2x),$$

αφού  $x > 0$ .

**Δ4.** Έχουμε ότι:  $\ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow \ln x - x \leq -1, x > 0$  και  $e^{-x} > 0, x > 0$ ,

άρα  $e^{-x}(\ln x - x) < 0, x > 0$ , οπότε  $F'(x) = f(x) < 0, x > 0$ , άρα η συνάρτηση  $F$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta), x \in [\beta, 2\beta] \subset (0, +\infty)$ .

Η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $[\beta, 2\beta]$ , ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων

$2F$  (αποδείξαμε νωρίτερα ότι είναι παραγωγίσιμη) και της σταθεράς  $F(\beta) + F(3\beta)$ , με

$h(\beta) = 2F(\beta) - F(\beta) - F(3\beta) = F(\beta) - F(3\beta) > 0$  (αφού η συνάρτηση  $F$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$  και  $\beta < 3\beta$ )

$h(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$  (από το ερώτημα Δ3),

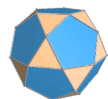
οπότε  $h(\beta)h(2\beta) < 0$ , δηλαδή από το θεώρημα Bolzano υπάρχει  $\xi \in (\beta, 2\beta)$  έτσι ώστε

$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2F(\xi) = F(\beta) + F(3\beta)$ .

#### ΣΧΟΛΙΑ:

**A4.** Εξήγηση των προτάσεων σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο:





- α) **Σωστό** (σελ. 91 σχολικού βιβλίου: «Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες  $M(a, \beta)$  και  $M'(a, -\beta)$  δύο συζυγών μιγαδικών  $z = a + \beta i$  και  $\bar{z} = a - \beta i$  είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.»)
- β) **Σωστό** (σελ. 152 σχολικού βιβλίου: «Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν: Για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της η εξίσωση  $f(x) = y$  έχει ακριβώς μια λύση ως προς  $x$ .»)
- γ) **Λάθος** (σελ. 178 σχολικού βιβλίου: «Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ »)
- δ) **Λάθος** (σελ. 232 σχολικού βιβλίου: «  $(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$  »)
- ε) **Λάθος** (σελ. 336 σχολικού βιβλίου: «  $\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x)g(x)dx$ , όπου  $f', g'$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $[a, \beta]$  »)

**B1. Εναλλακτικά**

1<sup>η</sup> Προσέγγιση: Έστω  $z = x + yi$  όπου  $x, y \in \mathbb{R}$ . Τότε

$|z-1|^2 + |z+1|^2 = |x-1+yi|^2 + |x+1+yi|^2 = (x-1)^2 + (x+1)^2 + 2y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2 = 4$  άρα ισοδύναμα  $x^2 + y^2 = 1$  που παριστάνει κύκλο με κέντρο το  $(0,0)$  και ακτίνα  $\rho=1$ . Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$  στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho=1$ .

2<sup>η</sup> Προσέγγιση: Αν θεωρήσουμε τα σημεία  $M(z), A(1,0), B(-1,0)$ , όπου  $M(z)$  είναι η εικόνα του μιγαδικού  $z$ , το  $A$  είναι η εικόνα του μιγαδικού  $1$  ενώ το  $B$  είναι η εικόνα του μιγαδικού  $-1$ . Παρατηρούμε ότι η σχέση γράφεται  $(MA)^2 + (MB)^2 = (AB)^2$  οπότε στο τρίγωνο  $AMB$  ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα άρα  $MA \perp MB$ . Συνεπώς το σημείο  $M$  κινείται σε κύκλο κέντρου  $O(0,0)$  και ακτίνας  $\rho=1$ .

**B2. Εναλλακτικά**

1<sup>η</sup> Προσέγγιση: Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε  $|z_1| = |z_2| = 1$  οπότε από τον κανόνα του παραλληλογράμμου  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$  (Άσκηση 9 σχολικό βιβλίο σελίδα 101. Η σχέση αυτή δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί εάν προηγουμένως δεν αποδειχθεί), έχουμε  $|z_1 + z_2|^2 + (\sqrt{2})^2 = 2 + 2 \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{2}$ .

2<sup>η</sup> Προσέγγιση: Αφού τα σημεία  $A(z_1), B(z_2)$  είναι σημεία του προηγούμενου κύκλου και  $(AB) = |z_1 - z_2| = \sqrt{2}$  άρα η  $AB$  είναι πλευρά κανονικού τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Τότε από την Β Λυκείου είναι γνωστό ότι το απόστημα  $a_4$  είναι το μισό της πλευράς  $AB$  και αν  $M$  το μέσον της  $AB$  τότε  $2\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB}$  άρα  $2|\overline{OM}| = |\overline{OA} + \overline{OB}|$  ή  $2a_4 = |z_1 + z_2|$  δηλαδή  $|z_1 + z_2| = (AB) = \sqrt{2}$ .

**B3. Εναλλακτικά**

Αν  $P, Q$  εστίες της έλλειψης το  $|w|$  είναι το μήκος της διαμέσου  $m$  του τριγώνου  $SPQ$  όπου  $S$  τυχαίο σημείο της έλλειψης και είναι  $2 \leq |w| \leq 3$  με  $|w|=2$  όταν το  $S$  βρεθεί στο άκρο του μικρού άξονα και  $|w|=3$  όταν το  $S$  βρεθεί στο άκρο του μεγάλου άξονα.

**Γ1. Εναλλακτική προσέγγιση για την μονοτονία της  $f$**

- 1<sup>η</sup> Προσέγγιση:  $f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x}$ . Είναι  $f'(1) = 0$  και παρατηρούμε ότι για  $x > 1$  ισχύει  $f'(x) > 0$  και για  $x < 1$   $f'(x) < 0$ .
- 2<sup>η</sup> Προσέγγιση: Είναι:  $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}, \forall x \in (0, +\infty)$ .

Η συνάρτηση  $f'$  είναι και αυτή παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο  $(0, +\infty)$  ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο εν λόγω διάστημα με  $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, \forall x > 0$ . Επομένως πρόκειται για κυρτή συνάρτηση στο  $(0, +\infty)$  δηλαδή η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ . Παρατηρώ ότι  $f'(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$  και για  $0 < x < 1$  είναι:  $f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$  απ' όπου (λόγω της συνέχειας της συνάρτησης) προκύπτει πως η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, 1]$ . Παρόμοια αν  $x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$ , επομένως λόγω της συνέχειας της συνάρτησης  $f$  αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ .

**Γ3. Εναλλακτική Προσέγγιση**

Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο:

$$h(x) = f'(x) + f(x) - 2012, x \in [x_1, x_2] \Leftrightarrow h(x) = \ln x - \frac{1}{x} + (x-1) \ln x - 2013, x \in [x_1, x_2]$$

Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και:

$$h(x_1) = \ln x_1 + 1 - \frac{1}{x_1} + (x_1 - 1) \ln x_1 - 2013 \stackrel{(x_1-1)\ln x_1 = 2013}{=} \ln x_1 + 1 - \frac{1}{x_1} < 0, \text{ αφού είναι άθροισμα αρ-}$$

νητικών. (Είναι  $0 < x_1 < 1 \Rightarrow \ln x_1 < 0$  και  $0 < x_1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > 1 \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x_1} < 0$ )

Επιπλέον  $h(x_2) = \ln x_2 + 1 - \frac{1}{x_2} + (x_2 - 1) \ln x_2 - 2013 \stackrel{(x_2-1)\ln x_2 = 2013}{=} \ln x_2 + 1 - \frac{1}{x_2} > 0$  αφού πρόκει-

ται για άθροισμα θετικών. (Είναι:  $x_2 > 1 \Rightarrow \ln x_2 > 0$  και

$$x_2 > 1 \Rightarrow \frac{1}{x_2} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{x_2} > -1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x_2} > 0)$$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (x_1, x_2)$  ώστε  $h(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$ .

**Δ1. Εναλλακτικά για το πρόσημο της  $f$**

$$\text{Για } x = \frac{1}{2} \text{ έχουμε } \int_1^{\frac{3}{4}} f(t) dt \geq \frac{1/4}{e} > 0 \Leftrightarrow -\int_{\frac{3}{4}}^1 f(t) dt > 0 \Leftrightarrow \int_{\frac{3}{4}}^1 f(t) dt < 0$$

Όμως η  $f$  ως συνεχής και μη μηδενική διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αν ήταν  $f(x) > 0$  τότε θα είχαμε  $\int_{\frac{3}{4}}^1 f(t)dt > 0$  άτοπο άρα το πρόσημο της  $f$  είναι αρνητικό.

Εναλλακτικά για την απόδειξη της παραγωγισιμότητας της  $f$  πριν την εύρεση του τύπου της

Έστω  $\alpha(x) = \ln x - x$ . Τότε  $\alpha'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$\alpha'(x)$			$+$	$-$
$\alpha(x)$			$\nearrow$	$\searrow$

Είναι  $\alpha(x) \leq \alpha(1) \Leftrightarrow \alpha(x) \leq -1 \Leftrightarrow \frac{\alpha(x)}{f(x)} \geq \frac{-1}{f(x)} > 0$  συνεπώς  $\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \frac{\ln x - x}{f(x)} > 0$ .

Επομένως για  $x > 1$  είναι  $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt > 0 \Leftrightarrow \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e > e \neq 0$  και για  $0 < x < 1$

$\int_x^1 \frac{\ln t - t}{f(t)} dt > 0 \Leftrightarrow -\int_x^1 \frac{\ln t - t}{f(t)} dt > 0 \Leftrightarrow \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e < e \neq 0$ .

Τέλος για  $x = 1$  είναι  $\int_1^1 \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e = e \neq 0$  οπότε τελικά  $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \neq 0$  για κάθε  $x > 0$ .

Σημείωση: Το ολοκλήρωμα γίνεται μηδέν μόνο για  $x = 1$  αφού  $\frac{\ln x - x}{f(x)} > 0$ .

Άρα  $f(x) = \frac{\ln x - x}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e}$  οπότε η  $f$  είναι παραγωγίσιμη.

- Παρατήρηση: Η εκφώνηση της άσκησης προϋποθέτει την ύπαρξη συνάρτησης  $f$  που ικανοποιεί τα δεδομένα (σε αντίθεση με την εκφώνηση «Να βρεθεί η συνάρτηση  $f$  ώστε...»). Χωρίς λοιπόν να είναι απαραίτητη η επαλήθευση στη συγκεκριμένη άσκηση αν επαληθεύσουμε διαπιστώνουμε ότι πράγματι τέτοια συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος υπάρχει και είναι η συνάρτηση που βρήκαμε.

$$\begin{aligned} \left( \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) f(x) &= \left( \int_1^x \frac{\ln t - t}{e^{-t}(\ln t - t)} dt + e \right) e^{-x} (\ln x - x) \\ &= \left( \int_1^x e^t dt + e \right) e^{-x} (\ln x - x) \\ &= (e^x - e + e) e^{-x} (\ln x - x) \\ &= \ln x - x \end{aligned}$$

### Δ3. Εναλλακτικά για το 2<sup>ο</sup> μέρος του ερωτήματος

Αφού  $f$  είναι κυρτή, η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της (μοναδικό κοινό σημείο τους είναι το σημείο επαφής). Θεωρούμε την εφαπτομένη στο  $2x_0 > 0$  που έχει εξίσωση  $y(x) = f(2x_0) + 2f'(2x_0)(x - 2x_0)$  τότε είναι

$$f(3x_0) > y(3x_0) = f(2x_0) + 2f'(2x_0)(3x_0 - 2x_0) = f(2x_0) + 2f'(2x_0)x_0, \quad 3x_0 \neq 2x_0 \text{ και}$$

$$f(x_0) > y(x_0) = f(2x_0) + 2f'(2x_0)(x_0 - 2x_0) = f(2x_0) - 2f'(2x_0)x_0, \quad x_0 \neq 2x_0.$$

Προσθέτοντας τις δυο προηγούμενες έχουμε  $f(3x_0) + f(x_0) > 2f(2x_0)$  για κάθε  $x_0 > 0$  άρα

$$\frac{f(x) + f(3x)}{2} > f(2x) \Leftrightarrow f(x) + f(3x) = 2f(2x)$$