

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ Δ/ΝΣΗ ΕΚΠ/ΣΗΣ Β. ΑΙΓΑΙΟΥ
ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Εποπτεία
Ο Προϊστάμενος
Επιστημονικής και Παιδαγωγικής Καθοδήγησης Δ/θμιας Εκπ/σης Β. Αιγαίου
Πρόδρομος Π. Ελευθερίου

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΚΥΡΙΑΚΗ 4 ΜΑΡΤΙΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 10

A2. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν :

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) \neq (h \circ g) \circ f$.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

γ) Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = +\infty$$

δ) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η και συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w με $z \neq w$ και $\text{Im}(z) > 0$ για τους οποίους ισχύει $z+w = x+xi$, $x \in \mathbb{R}$.

B₁. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $(z+w)^8$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 8

B₂. Αν $|w| = \sqrt{2}$ και για το μιγαδικό z ισχύει $z^2 + 2 \cdot z + 2 = 0$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $z = -1+i$ και $w = 1-i$

Μονάδες 9

β) να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό u με $|u| = \sqrt{2}$ ισχύει:

$$|u-z|^2 + |u-w|^2 = |z-w|^2$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g(x) = f(x) - 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δίνεται επιπλέον ότι:

- Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη,
- $f(1) = 1$ και $f(3) = 9$.

G₁. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 στο διάστημα $(1, 3)$.

Μονάδες 8

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Γ2. Αφού αποδείξετε ότι η g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[1, x_0]$, όπου x_0 ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$ στο διάστημα $(1, 3)$, στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) > 2$.

Μονάδες 6

Γ3. Αν $f(0)=0$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) $f'(0)=0$

Μονάδες 7

β) υπάρχει $\xi_2 \in (0, 3)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi_2)=2$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη την ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$ στο κοινό σημείο τους με τετμημένη $x_0 = 0$.

Δίνεται επιπλέον ότι:

- Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ και $f'(x) - g(x) = e^x - x - 1$,
- Η g' είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 1$

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

$$g'(x) > 0 \text{ και } g(x) \geq 1 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει $e^x \geq x + 1$ και $f'(x) \geq 1$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$ και ισχύει $f(x) \geq x + 1$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

Μονάδες 6

Δ5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^x}{x^2}$

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 11.30 π.μ.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ