ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Θεωρία σελ. 151
Α2. Θεωρία σελ. 194
Α3. Σ, Λ, Λ, Λ, Σ.

ΘΕΜΑ Β.

Β1. Είναι $(z+w)^8=(x+xi)^8=x^8\left[(1+i)^2\right]^4=x^8(-2i)^4=16x^8\in\mathbb{R}$.

Β2. **α)** Είναι Δ= –4, άρα $z=\dfrac{-2\pm 2i}{2}\Leftrightarrow z=-1-i$ (απορ.) ή $z=-1+i$, δεκτή.

Είναι $w=x+xi-(-1+i)=(x+1)+(x-1)i$. Όμως $|w|=\sqrt{2}$, οπότε

$(x+1)^2+(x-1)^2=2 \Leftrightarrow x=0$. Άρα $w=1-i$.

β) Αλγεβρικός τρόπος.

$|u-z|^2+|u-w|^2=|z-w|^2 \Leftrightarrow$

$(u-z)\left(\overline{u}-\overline{z}\right)+\left(u-w\right)\left(\overline{u}-\overline{w}\right)=8 \Leftrightarrow u\overline{u}-u\overline{z}-z\overline{u}-z\overline{z}+u\overline{u}-u\overline{w}-w\overline{u}-w\overline{w}=8$

$\Leftrightarrow -u\overline{z}-z\overline{u}-u\overline{w}-w\overline{u}=0 \Leftrightarrow -u(\overline{z}+\overline{w})-\overline{u}(z+w)=0$, ισχύει.

Γεωμετρικός τρόπος. Με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος.

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Η g είναι συνεχής στο [1,3], g(1) = –2, g(3) = 2, οπότε με Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,3): g(x_0)=0$

Γ2. Η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[1,x_0]\subseteq[1,3]$, οπότε υπάρχει

$\xi_1\in(1,x_0)\subseteq(1,3)$ με $g'(\xi_1)=\dfrac{g(x_0)-g(1)}{x_0-1}=-\dfrac{g(1)}{x_0-1}=\dfrac{3-f(1)}{x_0-1}=\dfrac{2}{x_0-1}>0$.

Παρατήρηση. Μπορεί να λυθεί και με Θ.Μ.Τ. στο [1,3] (Σχόλιο συναδέλφων).

Γ3. **α.** Από θ. Fermat είναι $f'(0)=0$.

β. Είναι $f'(0)=0$ και $f'(\xi_1)>2$. Όμως $0=f'(0)<2<f'(\xi_1)$, οπότε από το Θ.Ε.Τ. για την f ΄ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(0,\xi_1)\subseteq(0,3): f'(\xi_2)=2$ (Επιλύεται και με Bolzano).

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Για $x_0=0$ είναι $y_0=1$, δηλ. κοινό σημείο είναι το Α(0,1). Άρα $f(0)=1$ και $g(0)=1$. Επειδή κοινή εφαπτομένη είναι η $y=x+1$ με συντελεστή διεύθυνσης 1, είναι $f'(0)=1$ και $g'(0)=1$.

Δ2. Επειδή g΄ συνεχής και $g'(x)\neq 0$, άρα η g΄ διατηρεί πρόσημο. Όμως $g'(0)=1$, οπότε $g'(x)>0$. Επομένως η g΄ είναι γν. αύξουσα στο [0,+∞), οπότε για x ≥ 0 είναι $g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow g(x)\geq 1$.

Δ3. Εξετάζουμε τη μονοτονία της $\varphi(x)=e^x-x-1$, από όπου προκύπτει η ανισότητα $e^x-x-1\geq 0$.

Παρατήρηση 1. Η $e^x\geq x+1$ μπορεί να λυθεί με χρήση της ανισότητας $\ln x\leq x-1$, για x > 0 (εφαρμογή Σχολικού)

Παρατήρηση 2. Η ανισότητα μπορεί να αποδειχθεί και με μελέτη των κοίλων της συνάρτησης φ.

Δ4. Είναι $f'(x) = g(x) + e^x - x - 1$, οπότε η f' είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x) = g'(x) + e^x - x > 0$.

Θεωρούμε την $h(x) = f(x) - x - 1$ στο $[0,+\infty)$ με $h'(x) = f'(x) - 1 \geq 0$ (το = για x = 0). Είναι $h'(x) > 0$ στο $(0,+\infty)$. Επίσης η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, άρα η h είναι γν. αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα για $x \geq 0$ είναι $h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow f(x) \geq x + 1$.

β τρόπος. Επειδή η C_f βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη στο σημείο με $x_0 = 1$, θα είναι $f(x) \geq y$, δηλ. $f(x) \geq x + 1$

Δ5. Εφαρμόζουμε δυο φορές L' Hospital και έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-x-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-1}{2} = \frac{g'(0)-1}{2} = 0$$