Διαγώνισμα Γ Λυκείου Κατεύθυνσης στον Διαφορικό Λογισμό

ΘΕΜΑ Α

1. α) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α ,β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής .Αν η $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β),ν.δ.ο. το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.
   β) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο [α, β] ;
2. Να σημειώσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις.

α. Αν f παραγωγίσιμη στο (α, β) και συνεχής στο [α, β] με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

β. Αν η f είναι ορισμένη στο R και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, τότε η f είναι σταθερή στο R.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f, τότε το x_0 είναι πάντοτε θέση τοπικού ακρότατου της f.

δ. Αν η γραφική παράσταση της f είναι κυρτή στο $(\alpha, x_0]$ και κοίλη στο $[x_0, \beta)$ τότε παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_0.

ε. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο R και $f(\alpha) > f(\beta)$ για κάποια $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha < \beta$, τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f που σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x'x.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 3$.

1. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, το πρόσημο και το σύνολο τιμών της f.
2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x - 4$ εφάπτεται της C_f.
3. Να αποδείξετε ότι $e^x + e^2 \geq e^2 \cdot x$, για κάθε $x \in R$.
4. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f .

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση $f: [0, 6] \to R$, παραγωγίσιμη έτσι ώστε $f(0) = 0$ και $f(6) = 6$.

Να αποδειχθεί ότι:

1. Υπάρχει $\xi \in (0,6)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 1$
2. Υπάρχει $x_0 \in (0,6)$ έτσι ώστε $f(x_0) = 2$.
3. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,6)$ έτσι ώστε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)} + \dfrac{2}{f'(\xi_2)} = 3$.
4. Αν η f είναι κυρτή στο [0, 6] να αποδειχθεί ότι $f(2) < 2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0,+\infty) \to R$ για την οποία ισχύει:

$\mathbf{x \cdot f'(x) = x + f(x)}$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι:

1. $f(x) = x \cdot \ln x + x$, $x > 0$
2. $f(0) = 0$
3. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.
4. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
5. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ για τον οποίο ισχύει : $f(x) + \kappa \geq 1 + \kappa \cdot x$, $\forall x > 0$