

ΘΕΜΑ 1

A Να χαρακτηρίσετε **Σωστό-λάθος**

- α) Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και παρουσιάζει ακρότατο σε αυτό τότε είναι $f'(x_0)=0$
- β) Αν η f είναι συνεχής στο $[α,β]$ και είναι $f'(x) > 0$ για κάθε x στο $(α,β)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[α,β]$
- γ) Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , με x_0 ανήκει στο $(α,β)$ και f παραγωγίσιμη στο $(α,β)$ με εξαίρεση ίσως στο x_0 και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(x_0, β)$ και $f'(x) < 0$ στο $(α, x_0)$ τότε η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.
- δ) αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $α$ αλλά είναι συνεχής σε αυτό τότε το $α$ λέγεται κρίσιμο σημείο της f 4 μονάδες

B Αν η f ορίζεται και είναι συνεχής στο Δ , και στο x_0 εσωτερικό του Δ , η f είναι παραγωγίσιμη, παρουσιάζει ακρότατο, τότε να δείξετε ότι $f'(x_0)=0$ 21 μονάδες

ΘΕΜΑ 2

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [α, β] \rightarrow \mathbb{R}$ με $0 < α < β$ τέτοια, ώστε για τους μιγαδικούς $z_1 = α + if(α)$ και $z_2 = β + if(β)$ να ισχύει $\frac{z_1}{z_2} = κ$, $κ$ πραγματικός

- α) Να αποδείξετε ότι $|z_1 + iz_2| = |z_1 - iz_2|$ και ότι $\frac{f(α)}{α} = \frac{f(β)}{β}$ 15 μονάδες
- β) Δίνεται η $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 ώστε $g'(x_0) = 0$ 5 μονάδες
- γ) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της $f(x)$ στο x_0 περνά από την αρχή των αξόνων. 5 μονάδες

ΘΕΜΑ: 3

Δίνεται η παραγωγίσιμη 2 φορές συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

$$f^4(x) + 3f'(x) = 0 \text{ και } f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

- α) Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και f' ως προς τη μονοτονία 6 μονάδες
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ 6 μονάδες
- γ) i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $A(0, f(0))$ 4 μονάδες
- ii) Αν η $4\psi = -3\chi + 4$ είναι εφαπτομένη της f τότε βρείτε σε ποιο σημείο εφάπτεται 4 μονάδες
- δ) Να αποδείξετε ότι $2f(α+1) < f(α) + f(α+2)$ όπου $α$ θετικός πραγματικός 5 μονάδες

ΘΕΜΑ: 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις: $f(x) > 0$ και $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{2x}{x^2+1}$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ 6 μονάδες
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς τη μονοτονία. 7 μονάδες
- γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f 6 μονάδες
- δ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - \ln(x^4 + 1) < 1 - \ln 2$. 6 μονάδες

