

## Διαγώνισμα στα ολοκληρώματα Γ Λυκείου

### Θέμα Α

1 .Ερωτήσεις Σωστού -Λάθους

α) Αν η  $f(x)$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και είναι  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$  τότε  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

β) Αν για μία συνάρτηση  $f$ , συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  ισχύει  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$

γ) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε ισχύει:  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$

δ) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε ισχύει:  $E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$  όπου  $E$  είναι το εμβαδό χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $f$ , τον  $\chi\chi'$  και τις  $\chi=\alpha$ ,  $\chi=\beta$

2 Να δείξετε ότι  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$  όπου  $f$  συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και  $F$  μία παράγουσα της  $f$

### Θέμα Β

Έστω  $f$  μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει και  $f(0) = 2$  και  $f'(x) - f(x) = -4e^{-3x}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h(x) = e^{-x} \cdot f(x) - e^{-4x}$  είναι σταθερή.

**Μονάδες 3**

β. Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = e^x + \frac{1}{e^{3x}}$  **Μονάδες 3**

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:  $I(x) = \int_0^x f(t)dt$  **Μονάδες 7**

δ) Να βρείτε το όριο στο  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{I(x)}{x^2}$  **Μονάδες 5**

ε) Να δείξετε ότι  $\int_0^6 f(t)dt > \int_0^4 f(t)dt$  **Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει  $f(x) = 3 + 2 \int_0^x f(t) dt$ ,  $x$  πραγματικός

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $\Phi(x) = f(x) \cdot e^{-2x}$  είναι σταθερή.

**Μονάδες 3**

β) Να αποδειχθεί ότι  $f(x) = 3e^{2x}$

**Μονάδες 4**

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x$  και τις ευθείες  $x=0$ ,  $x=\lambda$  με  $\lambda > 0$ .

**Μονάδες 6**

δ) Να βρεθεί το  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{E(\lambda)}{\lambda}$

**Μονάδες 5**

ε) Αν η  $g(x)$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει

$$\int_0^2 (f'(u) \cdot \int_0^u g(t) dt) du = 3e^6 - \int_0^2 f(u)g(u) du$$

τότε να βρεθεί το  $\int_0^2 g(t) dt$

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Δ

α) Να δείξετε ότι οι παραστάσεις  $1 - \frac{1}{x}$  και  $e^x - e$  είναι ομόσημες στα διαστήματα  $(0,1)$  και  $(1,+\infty)$

**Μονάδες 5**

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = x - \ln x + e^x - ex$ ,  $x > 0$

να βρείτε την μονοτονία της και να δείξετε ότι  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x > 0$

**Μονάδες 5**

γ) Να βρεθούν τα όρια της  $f(x)$  στο μηδέν και στο  $+\infty$

**Μονάδες 5**

δ) Να υπολογιστεί το εμβαδό χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $f(x)$  την  $\psi=1$ , την κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $f(x)$  και την  $x=e$

**Μονάδες 5**

ε) Να δείξετε ότι η  $f(x)$  αντιστρέφεται όταν  $x > 1$  και να βρείτε την τιμή της

$$A = \int_2^e f(x) dx + \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x) dx$$

**Μονάδες 5**