

# ΘΕΜΑ

## Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών της Α' τάξης Γενικού Λυκείου για το σχ. έτος 2011-2012

Οι στόχοι της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην Α' Λυκείου, όπως διατυπώνονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ), είναι η ολοκλήρωση της μαθηματικής εκπαίδευσης που οι μαθητές απέκτησαν στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο και ταυτόχρονα το πέρασμα σε ένα πιο προωθημένο, θεωρητικό μαθηματικό τρόπο σκέψης. Βασικά στοιχεία μιας διδασκαλίας που συμβάλλει στην προσέγγιση αυτών των στόχων, σύμφωνα με το ΑΠΣ, είναι:

- Η ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη διερεύνηση προβλημάτων, στη δημιουργία και τον έλεγχο εικασιών, στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος και πολλαπλών αποδεικτικών προσεγγίσεων, στην ανάπτυξη διάφορων τρόπων σκέψης (επαγωγική, παραγωγική, αναλυτική και συνθετική).
- Η κατανόηση και χρήση της μαθηματικής γλώσσας, των συμβόλων και των αναπαραστάσεων των μαθηματικών αντικειμένων, η ανάπτυξη της ικανότητας μετάφρασης από τη φυσική στη μαθηματική γλώσσα και αντίστροφα καθώς και η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να επικοινωνούν μαθηματικά.
- Οι εννοιολογικές συνδέσεις εντός των Μαθηματικών αλλά και μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων γνωστικών περιοχών.

Η υποβάθμιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε απλή εκμάθηση διαδικασιών και τεχνικών επίλυσης ασκήσεων δεν είναι συμβατή με τους παραπάνω στόχους. Αντίθετα, αναγκαία προϋπόθεση για την προσέγγιση αυτών των στόχων είναι η προσπάθεια για εννοιολογική κατανόηση των Μαθηματικών.

Η προτεινόμενη διαχείριση της ύλης των Μαθηματικών της Α' Λυκείου έχει σκοπό να υποστηρίξει τον εκπαιδευτικό στην προσπάθεια υλοποίησης των στόχων του ΑΠΣ, αναδεικνύοντας μέσα από συγκεκριμένες αναφορές και παραδείγματα, το πνεύμα της διδασκαλίας που το διέπει. Στόχος είναι ο εκπαιδευτικός να βοηθηθεί να σχεδιάσει ο ίδιος κατάλληλες για την τάξη του διδακτικές παρεμβάσεις συμβατές με το ΑΠΣ. Ο προτεινόμενος διδακτικός χρόνος για το κάθε κεφάλαιο είναι ενδεικτικός για να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό στο διδακτικό του σχεδιασμό, ώστε να ολοκληρωθεί η ύλη μέσα στη σχολική χρονιά. Η διδακτική διαχείριση που προτείνεται δίνει τη δυνατότητα ορισμένα τμήματα της διδακτέας ύλης να μπορούν να ολοκληρωθούν και οι αντίστοιχοι διδακτικοί στόχοι να επιτευχθούν, σε χρόνο μικρότερο από τον χρόνο που θα απαιτείτο με μια παραδοσιακή διδακτική προσέγγιση. Για παράδειγμα, η παράγραφος που αφορά στη μελέτη της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + bx + c$  μπορεί, με μια καλά σχεδιασμένη δραστηριότητα και κατάλληλη διδακτική διαχείριση, να ολοκληρωθεί πλήρως μέσα στον προβλεπόμενο χρόνο με τρόπο συμβατό με το ΑΠΣ. Αντίθετα, σε άλλες περιπτώσεις είναι σαφές ότι ο διατιθέμενος χρόνος δεν είναι επαρκής για να γίνει η διδακτική διαχείριση ολόκληρης της διδακτέας ύλης μιας ενότητας σύμφωνα με το πνεύμα διδασκαλίας που διέπει το ΑΠΣ. Σε αυτές τις περιπτώσεις ο εκπαιδευτικός, λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιαιτερότητες της τάξης του και τον διατιθέμενο χρόνο, θα πρέπει να οργανώσει με τέτοιο τρόπο τη διδασκαλία ώστε να αναδείξει στον καλύτερο δυνατό βαθμό τα στοιχεία που αναφέρονται στο ΑΠΣ. Για παράδειγμα, κατά τη διδασκαλία των κριτηρίων ισότητας τριγώνων ένας εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέξει να εμπλέξει τους μαθητές της τάξης του σε μια δραστηριότητα που οδηγεί στην εικασία και στην απόδειξη του 2ου κριτηρίου ισότητας τριγώνων, ενώ αντίθετα να παραλείψει την απόδειξη του 3ου κριτηρίου ισότητας, η οποία, αν και παρουσιάζει μαθηματικό ενδιαφέρον, κρίνει ότι δεν θα προσφέρει ιδιαίτερα στην τάξη του γιατί θα προκαλέσει σημαντική δυσκολία. Άλλος εκπαιδευτικός μπορεί να κρίνει διαφορετικά γιατί θεωρεί ότι η τάξη του έχει άλλες δυνατότητες. Το σημαντικό σε κάθε περίπτωση είναι να επιδιωχθεί η εννοιολογική κατανόηση μέσα από την ανάπτυξη ουσιαστικής μαθηματικής δραστηριότητας των ίδιων των μαθητών στην τάξη και όχι απλά η εξάσκηση σε τεχνικές.

Τα Μαθηματικά της Α' Λυκείου είναι ένα ενιαίο μάθημα το οποίο αποτελείται από δύο κλάδους: την Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων και την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Στη συνέχεια διατυπώνεται η διδακτέα ύλη του κάθε κλάδου, με βάση το αντίστοιχο διδακτικό εγχειρίδιο, και προτάσεις που αφορούν στη διδακτική διαχείριση κάθε κεφαλαίου.

### Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων

#### I. Εισαγωγή

Το μάθημα «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων» περιέχει σημαντικές μαθηματικές έννοιες, όπως της πιθανότητας, της απόλυτης τιμής, των προόδων, της συνάρτησης κ.α., οι οποίες είναι απαραίτητες για την μετέπειτα μαθηματική εξέλιξη των μαθητών. Οι μαθητές έχουν έρθει σε μια πρώτη επαφή με αυτές τις έννοιες σε προηγούμενες τάξεις. Στην Α' Λυκείου θα τις αντιμετωπίσουν σε ένα υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης, το οποίο δημιουργεί ιδιαίτερες δυσκολίες στους μαθητές. Για την αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών προτείνεται να αφιερωθεί ικανός χρόνος στην εμπέδωση των νέων εννοιών, μέσω της ανάπτυξης και σύνδεσης πολλαπλών αναπαραστάσεων τους και στη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων. Επίσης, να αφιερωθεί χρόνος ώστε οι μαθητές να εμπλακούν στην αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ ιδιοτήτων και διαδικασιών καθώς και σε διαδικασίες γενίκευσης. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις και η σύνδεση τους μπορούν υποστηριχθούν από ψηφιακά περιβάλλοντα, με τη βοήθεια των οποίων οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν σε ουσιαστικές μαθηματικές δραστηριότητες. Μέσα από τη διερεύνηση ομοιοτήτων και διαφορών - για παράδειγμα η συσχέτιση των διαδικασιών επίλυσης ή της μορφής των λύσεων εξισώσεων και ανισώσεων, η συσχέτιση ορισμένων ιδιοτήτων των ριζών και των αποδείξεών τους με αντίστοιχες των απολύτων τιμών - οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τις σχετικές έννοιες και διαδικασίες.

#### II. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α' Γενικού Λυκείου» (εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β. 2011)

#### Εισαγωγικό κεφάλαιο

Ε.2. Σύνολα

### **Κεφ.1ο: Πιθανότητες**

- 1.1 Δειγματικός Χώρος-Ενδεχόμενα
- 1.2 Έννοια της Πιθανότητας (εκτός της υποπαραγράφου «Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας»)

### **Κεφ.2ο: Οι Πραγματικοί Αριθμοί**

- 1.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητες τους
- 2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών (εκτός της απόδειξης της ιδιότητας 4)
- 2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού
- 2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών (εκτός των αποδείξεων των ιδιοτήτων 3 και 4)

### **Κεφ.3ο: Εξισώσεις**

- 3.1 Εξισώσεις 1ου Βαθμού
- 3.2 Η Εξίσωση
- 3.3 Εξισώσεις 2ου Βαθμού

### **Κεφ.4ο: Ανισώσεις**

- 4.1 Ανισώσεις 1ου Βαθμού
- 4.2 Ανισώσεις 2ου Βαθμού

### **Κεφ.5ο: Πρόοδοι**

- 5.1 Ακολουθίες
- 5.2 Αριθμητική πρόοδος (εκτός της απόδειξης για το  $S_n$ )
- 5.3 Γεωμετρική πρόοδος (εκτός της απόδειξης για το  $S_n$ )

### **Κεφ.6ο: Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων**

- 6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης
- 6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης (εκτός της υποπαραγράφου «Απόσταση σημείων»)
- 6.3 Η Συνάρτηση  $f(x) = ax + b$  (εκτός της κλίσης ευθείας ως λόγος μεταβολής)

### **Κεφ.7ο: Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων**

- 7.1 Μελέτη της Συνάρτησης :  $f(x) = ax^2$
- 7.3 Μελέτη της Συνάρτησης :  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$

## **III. Διαχείριση διδακτέας ύλης**

### **Εισαγωγικό Κεφάλαιο**

(Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές διαπραγματεύονται την έννοια του συνόλου καθώς και σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων.

Ειδικότερα:

Όσον αφορά στην **§Ε.1**, αυτή να μη διδαχθεί ως αυτόνομο κεφάλαιο αλλά να συζητηθεί το νόημα και η χρήση των στοιχείων της Λογικής στις ιδιότητες και προτάσεις που διατρέχουν τη διδακτέα ύλη (για παράδειγμα στην ιδιότητα  $a \cdot b \neq 0$   $a \neq 0$  και  $b \neq 0$  της §2.1 μπορεί να διερευνηθεί το νόημα της ισοδυναμίας και του συνδέσμου «και»).

### **§Ε.2**

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά με συστηματικό τρόπο την έννοια του συνόλου και των σχέσεων και πράξεων μεταξύ συνόλων. Επειδή η έννοια του συνόλου είναι πρωταρχική, δηλαδή δεν ορίζεται, χρειάζεται να τονισθούν οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για να θεωρηθεί μια συλλογή αντικειμένων σύνολο μέσα από κατάλληλα παραδείγματα (π.χ. το σύνολο που αποτελείται από τα θρανία και τους μαθητές της τάξης, το «σύνολο» των ψηλών μαθητών της τάξης).

Η αναπαράσταση συνόλων, σχέσεων και πράξεων αυτών καθώς και η μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, μπορούν να υποστηρίξουν την κατανόηση της έννοιας του συνόλου.

Οι πράξεις μεταξύ συνόλων είναι ένα πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές μπορούν να δώσουν νόημα στους συνδέσμους «ή» και «και». Ειδικά, όσον αφορά στο σύνδεσμο «ή», να επισημανθεί η διαφορετική του σημασία στα Μαθηματικά από εκείνη της αποκλειστικής διάζευξης που του αποδίδεται συνήθως στην καθημερινή χρήση του. Οι δραστηριότητες Δ.1, Δ.2 και Δ.3 του ΑΠΣ είναι ενδεικτικές για την εννοιολογική προσέγγιση της έννοιας του συνόλου.

### **Κεφάλαιο 1ο**

(Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

Οι μαθητές έχουν έλθει σε επαφή με την έννοια της πιθανότητας στις προηγούμενες τάξεις με εμπειρικό τρόπο. Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται στην έννοια της πιθανότητας με τον κλασικό ορισμό και εξασκούνται στο βασικό λογισμό πιθανοτήτων με χρήση της θεωρίας συνόλων. Ειδικότερα:

### **§1.1**

Είναι σημαντικό οι μαθητές να μπορούν να αναγνωρίζουν ένα πείραμα τύχης και να διακρίνουν τις διαφορές που έχει από ένα αιτιοκρατικό πείραμα (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.4 του ΑΠΣ), με στόχο να μπορέσουν στη συνέχεια να αντιληφθούν την ανάγκη εισαγωγής της έννοιας της πιθανότητας για τη μελέτη τέτοιων πειραμάτων.

Ο προσδιορισμός και η αναπαράσταση του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης είναι μια διαδικασία δύσκολη για τους μαθητές, ειδικά όταν αντιμετωπίζουν ένα πείραμα τύχης που πραγματοποιείται σε δυο ή περισσότερα στάδια. Εργαλεία, όπως το δένδροδιάγραμμα και ο πίνακας διπλής εισόδου, βοηθούν στη μοντελοποίηση ενός πειράματος τύχης και στην κατασκευή του δειγματικού χώρου (προτείνεται η Δ.5 του ΑΠΣ).

Σημαντική για την κατανόηση και την επίλυση προβλημάτων είναι επίσης η μετάφραση σχέσεων μεταξύ ενδεχομένων από τη φυσική γλώσσα στη γλώσσα των συνόλων και αντίστροφα (προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.6 και Δ.7 του ΑΠΣ).

### **§1.2**

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας προτείνεται να είναι η κατάληξη της μελέτης της σχετικής συχνότητας και όχι να δοθεί απλά ο τυπικός ορισμός (προτείνεται η δραστηριότητα που αντιστοιχεί στο στόχο Πθ4 του ΑΠΣ). Οι κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων εισάγονται για πρώτη φορά και, εκτός από τον απλό χειρισμό τους, είναι σημαντικό να χρησιμοποιηθούν στην επίλυση συνθετότερων προβλημάτων που δε θα μπορούσαν να λυθούν με τον κλασικό ορισμό (π.χ. δραστηριότητα Δ.8 του ΑΠΣ).

## Κεφάλαιο 2ο (Προτείνεται να διατεθούν 14 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές επαναλαμβάνουν και εμβαθύνουν στις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών με στόχο να βελτιώσουν την κατανόηση της δομής του. Η επανάληψη και περαιτέρω εξάσκηση των μαθητών στον αλγεβρικό λογισμό (αλγεβρικές πράξεις, παραγοντοποίηση, ταυτότητες κ.λπ) δεν αποτελεί τον κύριο στόχο αυτού του κεφαλαίου.

Ειδικότερα:

### §2.1

Οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους και γενικότερα στην ταξινόμηση των πραγματικών αριθμών σε φυσικούς, ακέραιους ρητούς και άρρητους. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών επηρεάζουν τις παραπάνω διεργασίες. Για το λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους με χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων, όπως οι αριθμοί  $4/3$ ,  $1.333\dots$ ,  $1,010101\dots$ ,  $1,1010010001\dots$ , καθώς και στην ταξινόμηση αριθμών στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (όπως  $4/2$ , ρίζα του  $3/5$ ,  $\pi/6$ ,  $-1.333$  κ.ά.). Παράλληλα, και με αφορμή τα παραπάνω παραδείγματα, μπορεί να γίνει συζήτηση αν το άθροισμα και το γινόμενο δύο ρητών ή δύο άρρητων ή ρητού και άρρητου είναι ρητός ή άρρητος.

Σημαντικό για τον αλγεβρικό λογισμό είναι οι μαθητές να κατανοήσουν τις ιδιότητες των πράξεων. Σε αυτό θα βοηθήσει η λεκτική διατύπωση και η διερεύνηση των ιδιοτήτων καθώς και η αναγνώριση της σημασίας της ισοδυναμίας, της συνεπαγωγής και των συνδέσμων «ή» και «και», με ιδιαίτερη έμφαση στις ιδιότητες:  $a \cdot b = 0$   $a = 0$  ή  $b = 0$ ,  $a \cdot b \neq 0$   $a \neq 0$  και  $b \neq 0$ .

Να δοθεί έμφαση στις μεθόδους απόδειξης και ιδιαίτερα σε αυτές με τις οποίες δεν είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές, όπως η χρήση της απαγωγής σε άτοπο για την απόδειξη ότι ο ρίζα 2 είναι άρρητος και του αντιπαραδείγματος στην απόρριψη του ισχυρισμού:  $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ .

### §2.2

Οι μαθητές, επηρεασμένοι από τη διαδοχικότητα των ακεραίων, συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της έννοιας της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.9 του ΑΠΣ) καθώς και στις ομοιότητες και διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας, με έμφαση στις ισοδυναμίες:  $a^2 + b^2 = 0$   $a = 0$  και  $b = 0$ , ενώ  $a^2 + b^2 > 0$   $a \neq 0$  ή  $b \neq 0$  και στα σχόλια 1 και 2 της σελ. 56.

### §2.3

Οι μαθητές έχουν αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, την απόλυτη τιμή ενός αριθμού ως την απόστασή του από το μηδέν στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Στην ενότητα αυτή δίνεται ο τυπικός ορισμός της απόλυτης τιμής και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητές της. Να επισημανθεί η μέθοδος απόδειξης των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών (ότι η ζητούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με μία σχέση που γνωρίζουμε ότι είναι αληθής) και να συζητηθεί (σε αυτές.  $\Leftrightarrow$ ) και του «αρκεί» ( $\Rightarrow$ ) η αναγκαιότητα του «πρέπει» (

Η γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής ενός αριθμού και της απόλυτης τιμής της διαφοράς δύο αριθμών είναι σημαντική, γιατί βοηθά τους μαθητές να αποδώσουν νόημα στην έννοια. Η σύνδεση όμως της αλγεβρικής σχέσης και της γεωμετρικής της αναπαράστασης δεν είναι κάτι που γίνεται εύκολα από τους μαθητές και για αυτό απαιτείται να δοθεί σε αυτό ιδιαίτερη έμφαση.

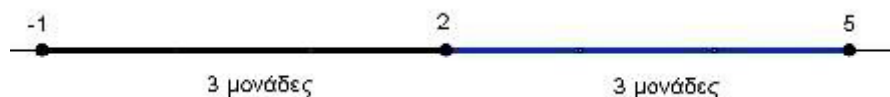
Με αυτή την έννοια προτείνεται να μη διδαχθούν, στη γενική τους μορφή, οι:

$|x - x_0| < r$   $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$   $x_0 - r < x < x_0 + r$   $x \in (-r, r)$   $x \in (x_0 + r, +\infty)$   $x > x_0 + r$  καθώς και η γεωμετρική ερμηνεία αυτών, επειδή είναι πολύ δύσκολο να γίνουν κατανοητά από τους μαθητές σ' αυτή τη φάση της αλγεβρικής τους εμπειρίας.

Αντίθετα, οι μαθητές μπορούν να ασχοληθούν με τα παραπάνω μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα (π.χ. η ανίσωση  $|x - 2| < 3$  σημαίνει: «ποιοι είναι οι αριθμοί που απέχουν από το 2 απόσταση μικρότερη του 3;» δηλ.

$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow d(x, 2) < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5$

$|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$



Προτείνεται, όμως, να γίνει διαπραγμάτευση των σχέσεων  $|x| < r$   $-r < x < r$   $x < -r$  ή  $x > r$ . Η δραστηριότητα Δ.10 του ΑΠΣ υποστηρίζει την παραπάνω προσέγγιση.

### §2.4

Οι μαθητές έχουν ήδη αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, τις τετραγωνικές ρίζες και δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη καθώς και τις ιδιότητες αυτών. Στην ενότητα αυτή γίνεται επέκταση στη ν-οστή ρίζα και στη δύναμη με ρητό εκθέτη. Να επισημανθεί η διατήρηση των ιδιοτήτων των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη και στην περίπτωση του ρητού εκθέτη. Προτείνεται η διαπραγμάτευση απλών ασκήσεων. Για να αναδειχθούν τα πλεονεκτήματα της χρήσης των ιδιοτήτων των ριζών, έναντι της χρήσης του υπολογιστή τσέπης, προτείνεται μια δραστηριότητα σαν τη Δ.11 του ΑΠΣ.

### Κεφάλαιο 3ο (Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν συστηματικά και διερευνούν εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού. Ως ιδιαίτερη περίπτωση εξετάζεται η εξίσωση  $x^2 = a$ . Ειδικότερα:

#### §3.1

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν διαπραγματευθεί αναλυτικά την επίλυση εξισώσεων της μορφής  $ax + b = 0$ , της οποίας οι συντελεστές  $a$  και  $b$  είναι συγκεκριμένοι αριθμοί. Συναντούν δυσκολίες στη μετάβαση από την επίλυση μιας τέτοιας μορφής εξίσωσης στην επίλυση της γενικής μορφής  $ax + b = 0$ , για δυο κυρίως λόγους:  $a$ ) είναι δύσκολος ο διαχωρισμός της έννοιας της παραμέτρου από την έννοια της μεταβλητής και  $b$ ) δεν είναι εξοικειωμένοι με τη διαδικασία της διερεύνησης γενικά.

Για το λόγο αυτό, προτείνεται να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση του ρόλου της παραμέτρου σε μια παραμετρική εξίσωση 1ου βαθμού μέσα από τη διαπραγμάτευση της παραμετρικής εξίσωσης που περιλαμβάνεται στη θεωρία αυτής της παραγράφου (σχολικό βιβλίο, σελ. 80). Για παράδειγμα, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να λύσουν την εξίσωση για συγκεκριμένες τιμές του  $\lambda$  (π.χ.  $\lambda = 2, \lambda = 5, \lambda = 1, \lambda = -1$ ) και στη συνέχεια να προσπαθήσουν να διατυπώσουν γενικά συμπεράσματα για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ . Προτείνεται επίσης προς διαπραγμάτευση η δραστηριότητα Δ.12 του ΑΠΣ καθώς και η επίλυση απλών παραμετρικών εξισώσεων και απλών εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού (όπως η άσκηση 10 της Α' Ομάδας).

Για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση σε εξισώσεις, όπως η  $|x - 5| = -3$ , την οποία δύσκολα χαρακτηρίζουν οι μαθητές από την αρχή ως αδύνατη.

#### §3.2

Η επίλυση εξισώσεων της μορφής  $x^2 = a$  να περιοριστεί σε απλές εξισώσεις.

#### §3.3

Η επίλυση της εξίσωσης  $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$  στη γενική της μορφή με τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» είναι μια διαδικασία που δυσκολεύει τους μαθητές. Προτείνεται να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές τη μέθοδο της «συμπλήρωσης τετραγώνου» πρώτα σε εξισώσεις 2ου βαθμού με συντελεστές συγκεκριμένους αριθμούς και στη συνέχεια με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού να γενικεύσουν τη διαδικασία.

Επίσης, προτείνεται η επίλυση απλών εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού (όπως τα παραδείγματα 1 και 3) και να δοθεί έμφαση στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων 2ου βαθμού (προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.13 και Δ.14 του ΑΠΣ).

Οι τύποι του Vieta επιτρέπουν στους μαθητές είτε να κατασκευάσουν μια εξίσωση 2ου βαθμού με δεδομένο το άθροισμα και το γινόμενο ριζών της είτε να προσδιορίσουν απευθείας τις ρίζες της (βρίσκοντας δυο αριθμούς που να έχουν άθροισμα  $S$  και γινόμενο  $P$ ). Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές, υπό μορφή άσκησης, να προσδιορίσουν αυτούς τους τύπους και να τους χρησιμοποιήσουν στην επίλυση σχετικών προβλημάτων.

### Κεφάλαιο 4ο (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν συστηματικά και διερευνούν ανισώσεις 1ου και 2ου βαθμού. Ειδικότερα:

#### §4.1

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν διαπραγματευθεί αναλυτικά την επίλυση ανισώσεων 1ου βαθμού με συγκεκριμένους συντελεστές. Εκτός από τη χρήση της αριθμογραμμής, για την απεικόνιση του συνόλου λύσεων μιας ανίσωσης, προτείνεται να δοθεί έμφαση και στη χρήση των διαστημάτων των πραγματικών αριθμών για την παραπάνω απεικόνιση, ως εφαρμογή της αντίστοιχης υποπαραγράφου της §2.2. Να συζητηθούν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στην εξίσωση και την ανίσωση, ως προς τη διαδικασία της επίλυσης τους και το σύνολο των λύσεών τους.

Για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να λυθούν από τους μαθητές και ανισώσεις όπως οι  $|x - 5| < -3$  ή  $|x - 5| > -3$ , των οποίων τη λύση, αν και προκύπτει από απλή παρατήρηση, δεν την αναγνωρίζουν άμεσα οι μαθητές. Προτείνεται επίσης να δοθεί προτεραιότητα στη μοντελοποίηση προβλημάτων με χρήση ανισώσεων 1ου βαθμού, όπως για παράδειγμα η άσκηση 11 της Α' Ομάδας και οι ασκήσεις 3 και 4 της Β' Ομάδας.

#### §4.2

Η διαπραγμάτευση ανισώσεων 2ου βαθμού γίνεται για πρώτη φορά στην Α' Λυκείου. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της παραγοντοποίησης του τριωνύμου, όπου γίνεται ξανά χρήση της μεθόδου «συμπλήρωσης τετραγώνου», ώστε να μη δοθούν απευθείας τα συμπεράσματα αυτής. Στον προσδιορισμό του πρόσημου του τριωνύμου, παρατηρείται συχνά οι μαθητές να παραβλέπουν το πρόσημο του δευτεροβάθμιου όρου ή να συγχέουν το πρόσημο της διακρίνουσας με το πρόσημο του τριωνύμου (π.χ. όταν  $\Delta < 0$ , θεωρούν ότι και το τριώνυμο παίρνει αρνητικές τιμές).

Τα παραπάνω προβλήματα συχνά αντιμετωπίζονται με διάφορα «τεχνάσματα» με τα σύμβολα «+» και «-», ώστε να προσδιορίσουν οι μαθητές το πρόσημο του τριωνύμου και να επιλύσουν ανισώσεις 2ου βαθμού. Τέτοιες προσεγγίσεις δε συνδέονται με την κατανόηση του πότε ένα τριώνυμο παίρνει θετικές και πότε αρνητικές τιμές.

Για το λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στην κατανόηση της διαδικασίας προσδιορισμού του πρόσημου του τριωνύμου (π.χ. μέσα από τη μελέτη του προσήμου των παραγόντων του και του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου, όταν αυτό παραγοντοποιείται) και στη συνέχεια στη χρήση των συμπερασμάτων για την επίλυση ανισώσεων 2ου βαθμού. Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση ανισώσεων 2ου βαθμού (π.χ. η δραστηριότητα Δ.15 του ΑΠΣ και η άσκηση 7 της Β' Ομάδας) λειτουργούν προς αυτήν την κατεύθυνση.

### Κεφάλαιο 5ο (Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών και μελετούν περιπτώσεις ακολουθιών που εμφανίζουν κάποιες ειδικές μορφές κανονικότητας, την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο. Ειδικότερα:

#### §5.1

Να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση της ακολουθίας ως αντιστοιχίας των φυσικών στους πραγματικούς αριθμούς και στην εξοικείωση των μαθητών με το συμβολισμό (π.χ. ότι ο φυσικός αριθμός 1, μέσω μιας ακολουθίας

α, αντιστοιχεί στον πραγματικό αριθμό  $a_1$  που αποτελεί τον πρώτο όρο της ακολουθίας αυτής), δεδομένου ότι αυτός δυσκολεύει τους μαθητές (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.16 του ΑΠΣ).

### §5.2

Αρχικά οι μαθητές χρειάζεται να μπορούν να αναγνωρίσουν με βάση τον ορισμό αν μια συγκεκριμένη ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος (π.χ. η δραστηριότητα Δ.17 του ΑΠΣ). Στη συνέχεια, να προσδιορίζουν το  $v$ -οστό όρο και το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων συγκεκριμένων αριθμητικών προόδων, με τρόπο τέτοιο που να τους βοηθά να αντιληφθούν κανονικότητες, οι οποίες μπορούν να τους οδηγήσουν στα γενικά συμπεράσματα (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.18 του ΑΠΣ). Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων (όπως η άσκηση 12 της Α' Ομάδας) συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της αριθμητικής προόδου.

Το να δοθούν απλώς οι τύποι του  $v$ -οστού όρου και του αθροίσματος των  $n$  πρώτων όρων αριθμητικής προόδου και στη συνέχεια οι μαθητές να επιδοθούν στην αλγοριθμική χρήση τους για την επίλυση ασκήσεων δεν είναι συμβατό με το πνεύμα του ΑΠΣ.

### §5.3 - §5.4

Η διαπραγμάτευση της έννοιας της γεωμετρικής προόδου προτείνεται να γίνει κατ' αντιστοιχία με την έννοια της αριθμητικής προόδου. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.19, Δ.20 και Δ.21 του ΑΠΣ, που στόχο έχουν να αντιληφθούν οι μαθητές κανονικότητες που θα τους οδηγήσουν στην εύρεση του  $v$ -οστού όρου και του αθροίσματος των  $n$  πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου. Αν ο εκπαιδευτικός κρίνει ότι το επιτρέπουν ο χρόνος, που έχει στη διάθεσή του και το επίπεδο της τάξης, θα μπορούσαν να τεθούν υπό διαπραγμάτευση, τα παραδείγματα της §5.4, ως εφαρμογή της γεωμετρικής προόδου, με στόχο να συνδεθεί η έννοια με πραγματικές καταστάσεις.

]

## Κεφάλαιο 6ο

### (Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες)

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν έρθει σε επαφή με την έννοια της συνάρτησης, κυρίως με εμπειρικό τρόπο, και έχουν διερευνήσει στοιχειωδώς συγκεκριμένες συναρτήσεις. Στην Α' Λυκείου μελετούν την έννοια της συνάρτησης με πιο συστηματικό και τυπικό τρόπο. Σε πολλούς μαθητές δημιουργούνται παρανοήσεις και ελλιπείς εικόνες σχετικά με την έννοια αυτή, με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν προβλήματα στην αναγνώριση μιας συνάρτησης, καθώς και να μη μπορούν να χειριστούν με ευελιξία διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης (π.χ. πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση). Για το λόγο αυτό θα πρέπει οι μαθητές, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, να χρησιμοποιούν, να συνδέουν και να ερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης καθώς και να εντοπίζουν πλεονεκτήματα και (ενδεχομένως) μειονεκτήματα καθεμιάς εξ αυτών.

Οι έννοιες «κατακόρυφη - οριζόντια μετατόπιση καμπύλης», «μονοτονία - ακρότατα - συμμετρίες συνάρτησης», δεν συμπεριλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη, όπως αναπτύσσονται στις παραγράφους 6.4 και 6.5. Οι έννοιες αυτές θα μελετηθούν στις ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων της μορφής:  $f(x)=ax+b$  (§6.3),  $f(x)=ax^2$  (§7.1) και  $f(x)=ax^2+bx+c$  (§7.3). Ειδικότερα:

### §6.1 - §6.2

Προτείνεται να δοθούν αρχικά συγκεκριμένα παραδείγματα μοντελοποίησης καταστάσεων, ώστε να αναδειχθεί η σημασία της έννοιας της συνάρτησης για τις εφαρμογές, και στη συνέχεια να ακολουθήσει ο τυπικός ορισμός. Να δοθεί έμφαση στην αναγνώριση και τεκμηρίωση, με βάση τον ορισμό, αν αντιστοιχίες που δίνονται με διάφορες αναπαραστάσεις είναι συναρτήσεις ή όχι (οι δραστηριότητες Δ.22, Δ.23 και Δ.24 του ΑΠΣ λειτουργούν προς αυτήν την κατεύθυνση), στη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση) και στην ερμηνεία μιας δεδομένης γραφικής παράστασης για την επίλυση ενός προβλήματος (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.26 του ΑΠΣ).

### §6.3

Οι μαθητές έχουν διαπραγματευθεί τη γραφική παράσταση της ευθείας  $\psi=ax+b$  στο Γυμνάσιο. Εδώ προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση του ρόλου των παραμέτρων  $a$  και  $b$  στη γραφική παράσταση της  $f(x)=ax+b$ , ώστε να προκύψουν οι σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο (πότε είναι παράλληλες μεταξύ τους, πότε ταυτίζονται, πότε τέμνουν τον άξονα  $y'$  στο ίδιο σημείο).

Επίσης προτείνεται, αφού οι μαθητές παρατηρήσουν (με χρήση της γραφικής παράστασης και του πίνακα τιμών συγκεκριμένων γραμμικών συναρτήσεων) πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, να καταλήξουν σε γενικότερα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία της συνάρτησης και να τα εκφράσουν συμβολικά, καθώς και να διερευνήσουν το ρόλο της παραμέτρου  $a$  σε σχέση με αυτά (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.27 του ΑΠΣ).

## Κεφάλαιο 7ο

### (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν μελετήσει παραβολές της μορφής  $\psi=ax^2$ . Στο κεφάλαιο αυτό μελετούν επιπλέον ιδιότητες αυτής της συνάρτησης. Επίσης, με αφετηρία την  $\psi=ax^2$ , κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)=ax^2 + bx + c$  την οποία στη συνέχεια χρησιμοποιούν για να μελετήσουν ιδιότητες της  $f$ . Ειδικότερα:

### §7.1

Οι μαθητές έχουν διαπραγματευθεί, στο Γυμνάσιο, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\psi=ax^2$ . Εδώ προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες των συναρτήσεων  $g(x)=x^2$  και  $h(x)=-x^2$  με τη βοήθεια της γραφικής παράστασής τους, στη γενίκευση των παραπάνω συμπερασμάτων για τη συνάρτηση  $f(x)=ax^2$  (προτείνεται η δραστηριότητα Δ. 29 του ΑΠΣ) και στη συμβολική τους έκφραση.

### §7.3

Να δοθεί έμφαση στη χάραξη και διερεύνηση της γραφικής παράστασης συγκεκριμένων πολυωνυμικών συναρτήσεων της μορφής  $f(x)=ax^2+bx+c$  μέσω κατάλληλων μετατοπίσεων της  $g(x)=ax^2$  και στη μελέτη της μονοτονίας, των ακρότατων και της συμμετρίας της συνάρτησης με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης. Επίσης, να γίνει γεωμετρική ερμηνεία των συμπερασμάτων των §3.3 και §4.2 (ρίζες και πρόσημο τριωνύμου) με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)=ax^2+bx+c$  (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.32 του ΑΠΣ).

Ειδικότερα, όσον αφορά στη χάραξη της γραφικής παράστασης και στη μελέτη της συνάρτησης  $f(x)=ax^2+bx+c$ , η ιδέα που βρίσκεται και πίσω από τη δραστηριότητα Δ.30 του ΑΠΣ είναι η εξής: Οι μαθητές, με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, χαράσσουν τη γραφική παράσταση της  $g(x)=ax^2$  για διάφορες τιμές του  $a$ . Τη μετατοπίζουν  $k$  μονάδες οριζόντια για διάφορες τιμές του  $k$  (π.χ. κατά 3 μονάδες αριστερά, κατά 4 μονάδες δεξιά) και παρατηρούν

τη μορφή που παίρνει ο τύπος της συνάρτησης. Στη συνέχεια τη μετατοπίζουν  $\lambda$  μονάδες κατακόρυφα για διάφορες τιμές του  $\lambda$  (π.χ. κατά 2 μονάδες κάτω, κατά 5 μονάδες πάνω) και κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις. Συνδυάζοντας τις δύο μετατοπίσεις μπορούν να παρατηρήσουν ότι η συνάρτηση που θα προκύψει θα είναι της μορφής  $f(x)=a(x+\kappa)^2+\lambda$ .

Τέλος, δίνονται στους μαθητές συγκεκριμένες συναρτήσεις της μορφής  $f(x)=ax^2+bx+c$  και εκείνοι προσπαθούν, με κατάλληλες μετατοπίσεις της  $g(x)=ax^2$ , να οδηγηθούν στη γραφική παράσταση της  $f$ . Στη συνέχεια μελετούν, με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης, ιδιότητες της  $f$  και επεκτείνουν τα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία, στα ακρότατα και στις συμμετρίες της  $g(x) = ax^2$  στην  $f(x)=ax^2+bx+c$ .

### Γεωμετρία

#### I. Εισαγωγή

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Α' Λυκείου εστιάζει στο πέρασμα από τον εμπειρικό στο θεωρητικό τρόπο σκέψης, με ιδιαίτερη έμφαση στη μαθηματική απόδειξη. Οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή με στοιχεία θεωρητικής γεωμετρικής σκέψης και στο Γυμνάσιο, όπου έχουν αντιμετωπίσει ασκήσεις που απαιτούν θεωρητική απόδειξη. Στην Α' Λυκείου, πρέπει αυτή η εμπειρία των μαθητών να αξιοποιηθεί με στόχο την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρητικής τους σκέψης. Η διατύπωση ορισμών γεωμετρικών εννοιών είναι κάτι δύσκολο για τους μαθητές, ακόμα και αυτής της τάξης, καθώς απαιτεί τη συνειδητοποίηση των κρίσιμων και ελάχιστων ιδιοτήτων που απαιτούνται για τον καθορισμό μιας έννοιας. Επίσης οι μαθητές χρειάζεται να διερευνούν μετασχηματισμούς και σχέσεις των γεωμετρικών εννοιών και να δημιουργούν εικασίες τις οποίες να προσπαθούν να τεκμηριώσουν. Η αντιμετώπιση της μαθηματικής απόδειξης απλά ως περιγραφή μιας σειράς λογικών βημάτων που παρουσιάζονται από τον εκπαιδευτικό, δεν είναι κατάλληλη ώστε να μυηθούν οι μαθητές στη σημασία και την κατασκευή μιας απόδειξης. Αντίθετα, είναι σημαντικό να εμπλακούν οι μαθητές σε αποδεικτικές διαδικασίες, να προσπαθούν να εντοπίζουν τη βασική αποδεικτική ιδέα, μέσω πειραματισμού και διερεύνησης, και να χρησιμοποιούν μετασχηματισμούς και αναπαραστάσεις, που υποστηρίζουν την ανάπτυξη γεωμετρικών συλλογισμών. Η κατασκευή από τους μαθητές αντιπαραδειγμάτων και η συζήτηση για το ρόλο τους είναι μια σημαντική διαδικασία, ώστε να αρχίσουν να αποκτούν μια πρώτη αίσθηση της σημασίας του αντιπαραδείγματος στα Μαθηματικά. Η απαγωγή σε άτοπο είναι επίσης μια μέθοδος που συχνά συναντούν οι μαθητές στην απόδειξη αρκετών θεωρημάτων. Ο ρόλος του «άτοπου» στην τεκμηρίωση του αρχικού ισχυρισμού αλλά και το κατά πόσο η άρνηση του συμπεράσματος οδηγεί τελικά στην τεκμηρίωσή του, δημιουργούν ιδιαίτερη δυσκολία στους μαθητές. Σε όλα τα παραπάνω ουσιαστικό ρόλο μπορεί να παίξει η αξιοποίηση λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας.

#### II. Διδακτέα Ύλη

Από το βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου» των Αργυρόπουλου Η., Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάτη Σ., Σίδηρη Π. (εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β. 2011)

#### Κεφ.1ο: Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία

- 1.1 Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας
- 1.2 Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας

#### Κεφ.2ο: Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα

- 2.1 Σημεία, γραμμές και επιφάνειες
- 2.2 Το επίπεδο
- 2.3 Η ευθεία
- 2.4 Η ημιευθεία
- 2.5 Το ευθύγραμμο τμήμα
- 2.6 Μετατοπίσεις στο επίπεδο
- 2.7 Σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων
- 2.8 Πράξεις μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων
- 2.9 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος
- 2.10 Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο
- 2.11 Ημιεπίπεδα
- 2.12 Η γωνία
- 2.13 Σύγκριση γωνιών
- 2.14 Ευθεία κάθετη από σημείο σε ευθεία
- 2.15 Πράξεις μεταξύ γωνιών
- 2.16 Είδη και απλές σχέσεις γωνιών
- 2.17 Έννοια και στοιχεία του κύκλου
- 2.18 Επίκεντρη γωνία – Σχέση επίκεντρης γωνίας και τόξου
- 2.19 Μέτρο τόξου και γωνίας
- 2.20 Τεθλασμένη γραμμή – Πολύγωνο – στοιχεία πολυγώνων

#### Κεφ.3ο: Τρίγωνα

- 3.1 Είδη και στοιχεία τριγώνων
- 3.2 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.3 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων
- 3.4 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων
- 3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων
- 3.7 Κύκλος - Μεσοκάθετος - Διχοτόμος
- 3.8 Κεντρική συμμετρία
- 3.9 Αξονική συμμετρία
- 3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών
- 3.12 Τριγωνική ανισότητα
- 3.13 Κάθετες και πλάγιες
- 3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου
- 3.15 Εφαπτόμενα τμήματα
- 3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων
- 3.17 Απλές γεωμετρικές κατασκευές
- 3.18 Βασικές κατασκευές τριγώνων

#### **Κεφ.4ο: Παράλληλες ευθείες**

- 4.1. Εισαγωγή
- 4.2. Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα
- 4.3. Κατασκευή παράλληλης ευθείας
- 4.4. Γωνίες με πλευρές παράλληλες
- 4.5. Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου
- 4.6. Άθροισμα γωνιών τριγώνου
- 4.7. Γωνίες με πλευρές κάθετες
- 4.8. Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου

#### **Κεφ.5ο: Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία**

- 5.1. Εισαγωγή
- 5.2. Παραλληλόγραμμα
- 5.3. Ορθογώνιο
- 5.4. Ρόμβος
- 5.5. Τετράγωνο
- 5.6. Εφαρμογές στα τρίγωνα
- 5.7. Βαρύκεντρο τριγώνου (εκτός της απόδειξης τους θεωρήματος)
- 5.8. Το ορθόκεντρο τριγώνου
- 5.9. Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου
- 5.10. Τραπεζίο
- 5.11. Ισοσκελές τραπέζιο
- 5.12. Αξιοσημείωτες ευθείες και κύκλοι τριγώνου

#### **Κεφ.6ο: Εγγεγραμμένα σχήματα**

- 6.1. Εισαγωγικά – Ορισμοί
- 6.2. Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης
- 6.3. Γωνία χορδής και εφαπτομένης
- 6.5 Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο
- 6.6 Το εγγράψιμο τετράπλευρο (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)

### **III. Διαχείριση διδακτέας ύλης**

#### **Κεφάλαιο 1ο**

**(Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)**

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η διάκριση και επισήμανση των διαφορετικών χαρακτηριστικών της Πρακτικής Γεωμετρίας, που οι μαθητές διδάχθηκαν σε προηγούμενες τάξεις, και της Θεωρητικής Γεωμετρίας που θα διδαχθούν στο Λύκειο. Κάποια ζητήματα που θα μπορούσαν να συζητηθούν για την ανάδειξη των πλεονεκτημάτων της Θεωρητικής Γεωμετρίας έναντι της Πρακτικής, είναι: Η αδυναμία ακριβούς μέτρησης, η ανάγκη μέτρησης αποστάσεων μεταξύ απρόσιτων σημείων, η αναξιοπιστία των εμπειρικών προσεγγίσεων (προτείνεται η δραστηριότητα που αντιστοιχεί στο στόχο ΕΓ1 του ΑΠΣ).

Για να αποκτήσουν οι μαθητές μια πρώτη αίσθηση των βασικών αρχών της ανάπτυξης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως αξιωματικού συστήματος, προτείνεται να εμπλακούν σε μια συζήτηση σχετικά με τη σημασία και το ρόλο των όρων «πρωταρχική έννοια», «ορισμός», «αξίωμα», «θεώρημα», «απόδειξη». Στοιχεία της ιστορικής εξέλιξης της Γεωμετρίας μπορούν να αποτελέσουν ένα πλαίσιο αναφοράς στο οποίο θα αναδειχθούν τα παραπάνω ζητήματα.

#### **Κεφάλαιο 2ο**

**(Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)**

Οι μαθητές έχουν διδαχθεί στο Γυμνάσιο τις βασικές έννοιες του κεφαλαίου αυτού, οπότε δεν απαιτείται λεπτομερής διαπραγμάτευσή τους. Προτείνεται να επισημανθεί η σχέση των αποδείξεων των αρχικών προτάσεων με τα αξιώματα, ώστε να αναδειχθεί ο θεωρητικός χαρακτήρας της Γεωμετρίας, καθώς και να δοθεί έμφαση στην ανάπτυξη εννοιών και διαδικασιών που δεν έχουν εξεταστεί ιδιαίτερα στο Γυμνάσιο, όπως είναι:

- α) Η εμπλοκή των μαθητών στη διαδικασία ορισμού εννοιών, όπως για παράδειγμα πώς ορίζονται οι εφεξής γωνίες (δραστηριότητα που αντιστοιχεί στο στόχο Σχ2 του ΑΠΣ).
- β) Η διερεύνηση, η διατύπωση και η απόδειξη βασικών ιδιοτήτων τμημάτων, γωνιών και τόξων (προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.1 και Δ.3 του ΑΠΣ).
- γ) Η επισήμανση των αποδεικτικών μεθόδων και ειδικά της «απαγωγής σε άτοπο» (π.χ. απόδειξη της μοναδικότητας της καθέτου σε σημείο μιας ευθείας.)
- δ) Να επισημανθεί το ευθύ και το αντίστροφο μιας πρότασης (π.χ. δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, αν και μόνο αν οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες) καθώς και η αποδεικτική προσέγγιση μιας ισοδυναμίας (προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.1 και Δ.2 του ΑΠΣ).
- ε) Η εύρεση κοινών χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων των βασικών γεωμετρικών σχημάτων του κεφαλαίου και η ανάπτυξη κοινών στρατηγικών απόδειξης των σχετικών προτάσεων (π.χ. α) η διαδοχικότητα τμημάτων – γωνιών – τόξων ως προϋπόθεση για τον ορισμό της πρόσθεσης β) σύνδεση των ασκήσεων 1 Αποδεικτικές της σελ. 14, 2 Αποδεικτικές της σελ. 21, 1 Εμπέδωσης της σελ. 28 (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.4 του ΑΠΣ).

#### **Κεφάλαιο 3ο**

**(Προτείνεται να διατεθούν 19 διδακτικές ώρες)**

#### **§3.1 - §3.9**

Οι μαθητές έχουν διαπραγματευθεί το μεγαλύτερο μέρος του περιεχομένου των παραγράφων αυτών στο Γυμνάσιο. Προτείνεται να δοθεί έμφαση σε κάποια νέα στοιχεία όπως:

- α) Η σημασία της ισότητας των ομόλογων πλευρών στη σύγκριση τριγώνων.
- β) Η διαπραγμάτευση παραδειγμάτων τριγώνων με τρία κύρια στοιχεία τους ίσα, τα οποία δεν είναι ίσα (δύο τρίγωνα με ίσες δύο πλευρές και μια μη περιεχόμενη γωνία αντίστοιχα ίση, όπως στις δραστηριότητες Δ.5 και Δ.7 του ΑΠΣ).
- γ) Ο σχεδιασμός σχημάτων με βάση τις λεκτικές διατυπώσεις των γεωμετρικών προτάσεων (ασκήσεων, θεωρημάτων) και αντίστροφα.
- δ) Η διατύπωση των γεωμετρικών συλλογισμών των μαθητών.

ε) Η ισότητα τριγώνων, ως μια στρατηγική απόδειξης ισότητας ευθυγράμμων τμημάτων ή γωνιών (σχόλιο σελ.38).  
στ) Ο εντοπισμός κατάλληλων τριγώνων για σύγκριση σε «σύνθετα» σχήματα (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.6 του ΑΠΣ).

ζ) Η σημασία της «βοηθητικής γραμμής» στην αποδεικτική διαδικασία (πόρισμα I της §.3.2).

Προτείνεται να ενοποιηθούν σε μια πρόταση οι προτάσεις που ταυτίζουν τη διχοτόμο, τη διάμεσο και το ύψος από τη κορυφή ισοσκελούς τριγώνου (πόρισμα I σελ.37, πόρισμα I σελ.40, πόρισμα I σελ.45).

Μαζί με την πρόταση αυτή προτείνεται να γίνει η διαπραγμάτευση της εφαρμογής 2 της σελ.55, για την απόδειξη της οποίας αρκούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Επίσης, σαν μια ενιαία πρόταση, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να δείξουν ότι σε ίσα τρίγωνα τα δευτερεύοντα στοιχεία τους (διάμεσος, ύψος, διχοτόμος) που αντιστοιχούν σε ομόλογες πλευρές είναι επίσης ίσα (π.χ. άσκηση 1ί Εμπέδωσης σελ. 43, άσκηση 4 Εμπέδωσης σελ.48). Ενιαία μπορούν να αντιμετωπιστούν, ως αντίστροφες προτάσεις, τα πορίσματα IV της §3.2 και III, IV της §3.4 που αναφέρονται στις σχέσεις των χορδών και των αντίστοιχων τόξων. Με στόχο την ανάδειξη της διδακτικής αξίας των γεωμετρικών τόπων προτείνεται τα πορίσματα III της §3.2 και II της §3.4, που αφορούν στη μεσοκάθετο τμήματος, καθώς και το θεώρημα IV της §3.6, που αφορά στη διχοτόμο γωνίας, να διδαχθούν ενιαία ως παραδείγματα βασικών γεωμετρικών τόπων. Συγκεκριμένα, προτείνεται οι μαθητές πρώτα να εικάσουν τους συγκεκριμένους γεωμετρικούς τόπους και στη συνέχεια να τους αποδείξουν (προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.8, Δ.9 και Δ.10 του ΑΠΣ).

### **§3.10 – §3.13**

Η ύλη των παραγράφων αυτών είναι νέα για τους μαθητές. Να επισημανθεί στους μαθητές ότι η τριγωνική ανισότητα αποτελεί κριτήριο για το πότε τρία ευθύγραμμα τμήματα αποτελούν πλευρές τριγώνου (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.12 του ΑΠΣ). Επίσης προτείνονται οι ασκήσεις 4 και 6 (Αποδεικτικές), που διαπραγματεύονται: την απόσταση σημείου από κύκλο και σχέσεις χορδών και τόξων αντίστοιχα.

### **§3.14 – §3.16**

Τα συμπεράσματα της §3.14 είναι γνωστά στους μαθητές από το Γυμνάσιο. Οι αιτιολογήσεις όμως προέρχονται από τα θεωρήματα της §3.13. Το περιεχόμενο της §3.16 δεν είναι γνωστό στους μαθητές και χρειάζεται και για τις γεωμετρικές κατασκευές που ακολουθούν (προτείνονται οι Δ.14 και Δ.15 του ΑΠΣ).

### **§3.17 και §3.18**

Η διαπραγμάτευση των γεωμετρικών κατασκευών συμβάλλει στην κατανόηση των σχημάτων από τους μαθητές με βάση τις ιδιότητες τους καθώς και στην ανάπτυξη της αναλυτικής και συνθετικής σκέψης η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί και σε εξωμαθηματικές γνωστικές περιοχές. Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα τα προβλήματα 2 και 4 της §3.17 και τα προβλήματα 2 και 3 της §3.18.

## **Κεφάλαιο 4ο**

### **(Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες)**

#### **§4.1 – §4.4**

Το σημαντικότερο θέμα στις παραγράφους αυτές αποτελεί το «αίτημα παραλληλίας» το οποίο καθορίζει τη φύση της Γεωμετρίας στην οποία αναφερόμαστε. Η σημασία του «αιτήματος παραλληλίας», για τη Γεωμετρία την ίδια και για την ιστορική της εξέλιξη, μπορεί να διαφανεί από στοιχεία που παρέχονται στο ιστορικό σημείωμα της σελ. 90 καθώς επίσης και στη δραστηριότητα Δ.16 του ΑΠΣ. Οι μαθητές είναι σημαντικό να αναγνωρίσουν την αδυναμία χρήσης του ορισμού και τη σημασία των προτάσεων της §4.2 (που προηγούνται του «αιτήματος παραλληλίας») ως εργαλεία για την απόδειξη της παραλληλίας δύο ευθειών. Προτείνεται να διερευνήσουν οι μαθητές τη σχέση του θεωρήματος της §4.2 και της Πρότασης I της σελ. 77, με στόχο να αναγνωρίσουν ότι το ένα είναι το αντίστροφο του άλλου.

#### **§4.5**

Προτείνεται, πριν τη διαπραγμάτευση των θεωρημάτων της παραγράφου, να συζητηθεί η δραστηριότητα Δ.17 του ΑΠΣ. Επίσης, να επισημανθεί η στρατηγική που χρησιμοποιείται στις αποδείξεις των θεωρημάτων σχετικά με πώς δείχνουμε ότι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο, γιατί δεν είναι οικεία στους μαθητές.

#### **§4.6 – §4.7**

Προτείνεται το θεώρημα της §4.6 να συνδεθεί με τα πορίσματα της σελ. 53, ώστε οι μαθητές να αναγνωρίσουν ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος είναι ισχυρότερο από τα πορίσματα και ότι αυτό οφείλεται στη χρήση του «αιτήματος παραλληλίας» στην απόδειξή του. Το ίδιο ισχύει και για το πόρισμα (i) της σελ. 83 σε σχέση με το Θεώρημα της σελ. 53.

#### **§4.8**

Προτείνεται οι μαθητές, χρησιμοποιώντας το άθροισμα των γωνιών τριγώνου, να βρουν το άθροισμα των γωνιών τετραπλεύρου, πενταγώνου κ.α., να εικάσουν το άθροισμα των γωνιών ν-γώνου και να αποδείξουν την αντίστοιχη σχέση (προτείνεται η δραστηριότητα που αντιστοιχεί στο στόχο ΠΕ4 του ΑΠΣ). Δίνεται έτσι η δυνατότητα σύνδεσης Γεωμετρίας και Άλγεβρας. Να επισημανθεί επίσης η σταθερότητα του αθροίσματος των εξωτερικών γωνιών ν-γώνου.

## **Κεφάλαιο 5ο**

### **(Προτείνεται να διατεθούν 17 διδακτικές ώρες)**

#### **§5.1 – §5.2**

Να επισημανθεί ότι κάθε ένα από τα κριτήρια για τα παραλληλόγραμμα περιέχει τις ελάχιστες ιδιότητες που απαιτούνται για είναι ισοδύναμο με τον ορισμό του παραλληλογράμμου (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.18 του ΑΠΣ). Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν αν ένα τετράπλευρο με τις δυο απέναντι πλευρές παράλληλες και τις άλλες δυο ίσες είναι παραλληλόγραμμο. Για την εφαρμογή των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων στην επίλυση προβλημάτων μπορεί να αξιοποιηθεί η δραστηριότητα Δ.19 του ΑΠΣ.

#### **§5.3 – §5.5**

Να επισημανθεί ότι κάθε ένα από τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο ή ρόμβος ή τετράγωνο περιέχει τις ελάχιστες ιδιότητες που απαιτούνται για να είναι ισοδύναμο με τον ορισμό του ορθογωνίου ή του ρόμβου ή του τετραγώνου αντίστοιχα. Επιδιώκεται οι μαθητές να αναγνωρίζουν τα είδη των παραλληλογράμμων (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) με βάση τα αντίστοιχα κριτήρια και όχι με βάση κάποια πρότυπα σχήματα που συνδέονται με την οπτική γωνία που τα κοιτάμε. Να δοθεί έμφαση στην άρση της παρανόησης που δημιουργείται σε μαθητές, ότι ένα τετράγωνο δεν είναι ορθογώνιο ή ένα τετράγωνο δεν είναι ρόμβος. Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν: αν ένα τετράπλευρο με ίσες διαγώνιες είναι ορθογώνιο και αν ένα τετράπλευρο με



κάθετες διαγώνιες είναι ρόμβος, καθώς και να αξιοποιήσουν τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων στην επίλυση προβλημάτων (δραστηριότητες Δ.20, Δ.21 και Δ.22 του ΑΠΣ).

#### **§5.6 – §5.9**

Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να εικάσουν σε ποια γραμμή ανήκουν τα σημεία που ισαπέχουν από δυο παράλληλες ευθείες και στη συνέχεια να αποδείξουν ότι η μεσοπαράλληλή τους είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος. Προτείνεται επίσης η διαπραγμάτευση της Εφαρμογής 1 της σελ. 106. Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν τα είδη των τριγώνων που το ορθόκεντρο είναι μέσα ή έξω από το τρίγωνο. Θα μπορούσαν να αναζητηθούν εναλλακτικές αποδείξεις για τα θεωρήματα που αφορούν στις ιδιότητες του ορθογωνίου τριγώνου.

#### **§5.10 – §5.12**

Εκτός από το συγκεκριμένο αντικείμενο των παραγράφων αυτών, προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων που συνδυάζουν γεωμετρικά θέματα από όλο το κεφάλαιο. Προτείνεται επίσης να συζητηθεί με τους μαθητές η ταξινόμηση των τετραπλεύρων του σχολικού βιβλίου (σελ. 120) και, κατά την κρίση του εκπαιδευτικού, η συσχέτιση με άλλες ταξινομήσεις όπως αναφέρονται στο ιστορικό σημείωμα των σελ. 118, 119.

### **Κεφάλαιο 6ο**

**(Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)**

#### **§6.1 – §6.4**

Στην απόδειξη του Θεωρήματος της σελ. 123, προτείνεται να διερευνηθεί πρώτα η περίπτωση που η μία πλευρά της εγγεγραμμένης γωνίας είναι διάμετρος, από την οποία φαίνεται η βασική ιδέα για την απόδειξη και των άλλων δύο περιπτώσεων. Από την §6.4 προτείνεται μόνο να ζητηθεί από τους μαθητές να εικάσουν το σύνολο των σημείων του επιπέδου που «βλέπουν» ένα δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα υπό ορθή γωνία (μπορεί να βοηθηθούν από κατάλληλο λογισμικό), και στη συνέχεια να αποδείξουν ότι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με διάμετρο το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα (να συνδεθεί η απόδειξη με το πόρισμα (ii) της σελ. 124).

#### **§6.5 – §6.6**

Προτείνεται, ως εισαγωγή στο πρόβλημα εγγραφισιμότητας ενός τετραπλεύρου σε κύκλο, οι μαθητές να διερευνήσουν ποια από τα γνωστά τετράπλευρα (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο) είναι εγγράψιμα, βασιζόμενοι στις ιδιότητες των εγγεγραμμένων τετραπλεύρων (π.χ., ο ρόμβος δεν είναι εγγράψιμος σε κύκλο, γιατί αν ήταν εγγράψιμος θα έπρεπε να έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές). Η διερεύνηση θα μπορούσε να επεκταθεί και σε τυχαία τετράπλευρα (και με τη βοήθεια λογισμικού), ώστε οι μαθητές να εικάσουν τα κριτήρια εγγραφισιμότητας.