Καραγιάννης
Ιωάννης
Σχολικός
Σύμβουλος
Μαθηματικών

ΔΙΑΓΩΜΙΣΜΑ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

1.Αν χϵR να βρείτε την εικόνα του μιγαδικού Z=$\frac{1+\chi i}{x+i}$

2.Να βρείτε που ανήκουν οι μιγαδικοί Z αν 1<|Z|<2

3.Να αποδείξετε ότι το σύνολο των εικόνων του ΖϵC στο μιγαδικό επίπεδο για τους οποίους ισχύει $|z-i| \leq |z-3|$ και $z+\bar{z}=2$ είναι ημιευθεία παράλληλη στον άξονα ψ'ψ. Ποια είναι η αρχή της;

4.Να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών Ζ, -Ζ και iz$\sqrt{3}$ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου(Ζ≠0)

5.Να βρείτε το σύνολο των εικόνων του μιγαδικού Ζ αν
$$\frac{1}{|Z-3i|}+\frac{1}{|Z+3i|}=\frac{10}{|Z-3i||Z+3i|}$$

6. Αν $\alpha^2+\beta^2+8=(1-\iota)^4\beta-(1+\iota)^4\alpha$ με α,βϵR τότε α=2 και β=-2

7. Δίνονται οι μιγαδικοί για τους οποίους ισχύουν:
$$5(7z+1)^{13}-(3+4i)(z+7)^{13}=0$$
και w=$\frac{i}{5}(\frac{4}{z}-z)$

α. Να αποδείξετε ότι $|z|=1$

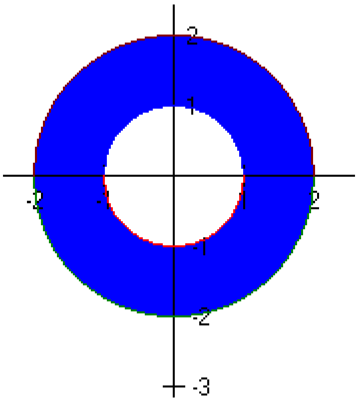
β. Να βρείτε την απόσταση των εικόνων Α, Β των μιγαδικών z 5iw αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο.

Λύσεις

1. Επειδή |z|=$\left|\frac{1+\chi i}{\chi+i}\right|=\frac{|1+\chi i|}{|\chi+i|}=\frac{\sqrt{1+\chi^2}}{\sqrt{\chi^2+1}}=1$ Η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο κέντρου (0,0) και ακτίνας ρ=1

3. Οι εικόνες του z είναι τα σημεία που βρίσκονται ανάμεσα στους κύκλους που έχουν κέντρο το (0,0) και ο ένας ακτίνα 2 και ο άλλος ακτίνα 1

ΔΙΑΓΩΜΙΣΜΑ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ



3.

Αν z=χ+ψi αφού z+$\bar{z}=2$ έχω 2χ=2⇔χ=1

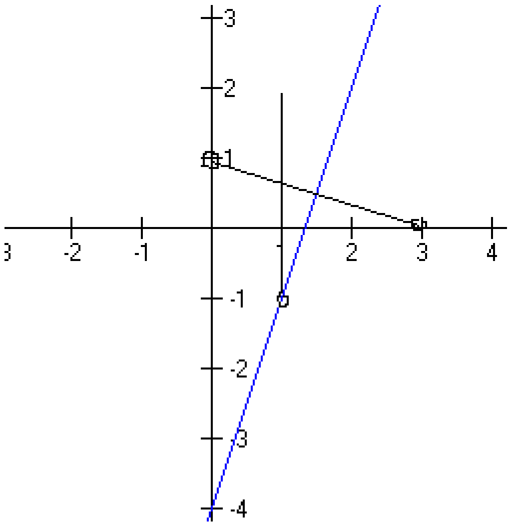
Τα σημεία που ικανοποιούν την σχέση $|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{i}| \le |\boldsymbol{z}-\mathbf{3}|$ τα βρίσκουμε ως εξής

Βρίσκουμε τα σημεία που ικανοποιούν την $|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{z}-\mathbf{3}|$ που είναι τα σημεία της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία A(0,1) και B(3,0)

|χ+(ψ-1)i|=|(χ-3)+ψi|$\Leftrightarrow \chi^2+(\psi-1)^2=(\chi-3)^2+\psi^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \chi^2+\psi^2-2\psi+1=\chi^2-6\chi+9+\psi^2 \Leftrightarrow 6\chi-2\psi-8=0 \Leftrightarrow 3\chi-\psi-4=0$

που είναι η παραπάνω μεσοκάθετος



Αφού θέμε η απόσταση του z από το σημείο (0,1) να είναι μικρότερη της απόστασης από το σημείο (3,0) οι εικόνες του z είναι τα σημεία του ημιεπιπέδου στο οποίο ανήκει και το (0,0)

Επειδή χ=1 το z πρέπει να ανήκει και στην ευθεία χ=1 Άρα τα κοινά σημεία του ημιεπιπέδου και της ευθείας χ=1 είναι η ημιευθεία χ=1 που έχει αρχή τη λύση του συστήματος χ=1 και ψ=3χ-4 δηλ το σημείο (1,-1) και βρίσκεται μέσα στο ημιεπίπεδο.

4. οι τρείς πλευρές του τριγώνου θα έχουν μήκη τα μέτρα

|z-(-z)|=2|z|

$|z-iz\sqrt{3}| = |z(1-i\sqrt{3})| = |z|\,|1-i\sqrt{3}| = |z|(\sqrt{1+\sqrt{3}^2}) = 2|z|$

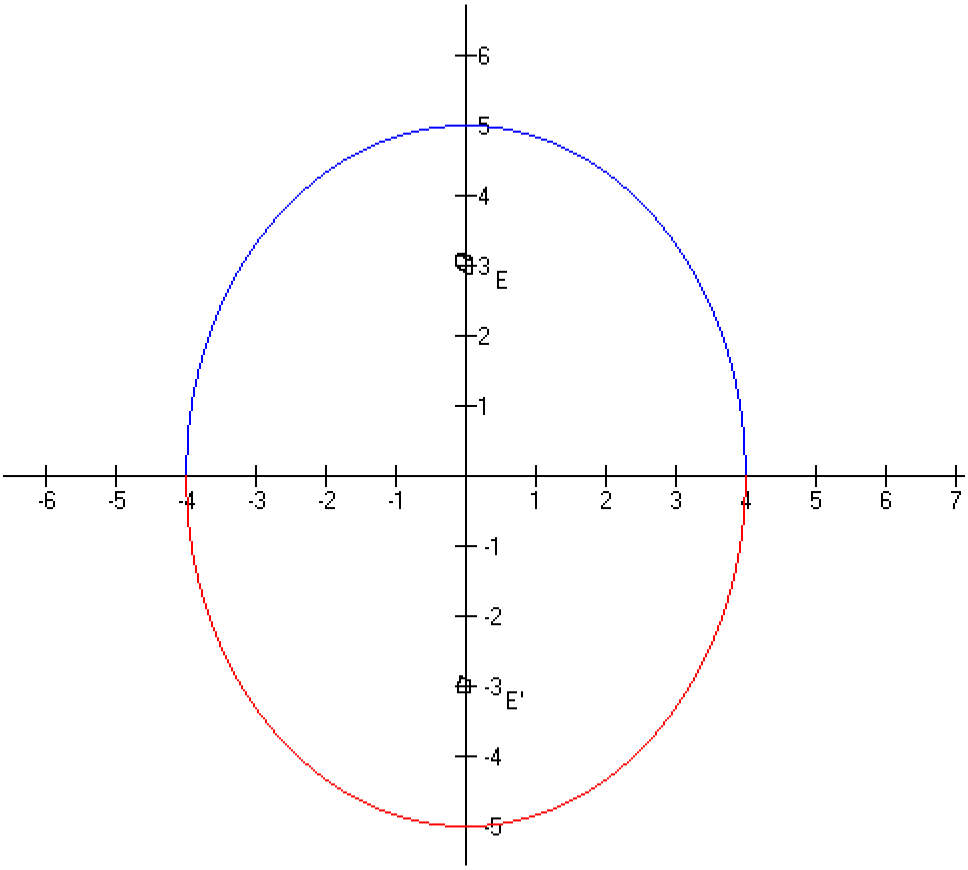
ΔΙΑΓΩΜΙΣΜΑ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Καραγιάννης Ιωάννης Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

$|-z-iz\sqrt{3}| = |z + iz\sqrt{3}| = |z||1 + i\sqrt{3}| = 2|z|$

5.
Από την δοθείσα με απαλοιφή παρονομαστών έχω
$|z-3i|+|z+3i|=10$ Άρα είναι έλλειψη με εστίες (0,3) και (0,-3) στον ψ'ψ δηλ γ=3 και επειδή $2\alpha=10 \Leftrightarrow \alpha=5$ και $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2} \Leftrightarrow \beta=4$ και έχει εξίσωση

$$\frac{\chi^2}{16} + \frac{\psi^2}{25} = 1$$



6.

$$(1-i)^4 = ((1-i)^2)^2 = (1-2i-1)^2 = -4$$

$$(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (1+2i-1)^2 = -4$$

Αν $\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 + 8 = -4\beta + 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 + \beta^2 + 4\beta + 4 = 0 \Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow (\alpha-2)^2 + (\beta+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - 2 = 0 \;\kappa\alpha\iota\; \beta + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2 \;\kappa\alpha\iota\; \beta = -2$$

7.
Από τη δοθείσα έχω

$$5 \cdot |7z+1|^{13} = |3+4i||z+7|^{13} \Leftrightarrow |7z+1|^{13} = |z+7|^{13} \Leftrightarrow |z+7| = |7z+1|$$

Καραγιάννης
Ιωάννης
Σχολικός
Σύμβουλος
Μαθηματικών

ΔΙΑΓΩΜΙΣΜΑ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

$$\Leftrightarrow |z+7|^2 = |7z+1|^2 \Leftrightarrow (z+7)(\bar{z}+7) = (7z+1)(7\bar{z}+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} + 7z + 7\bar{z} + 49 = 49z\bar{z} + 7z + 7\bar{z} + 1 \Leftrightarrow 48|z|^2 = 48 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |z| = 1$$

AB=$|z - 5iw| = \left|z - 5i\frac{i}{5}\left(\frac{4}{z} - z\right)\right| = \left|z - i^2\left(\frac{4}{z} - z\right)\right| = \left|\frac{4}{z}\right| = \frac{4}{|z|} = \frac{4}{1} = 4$