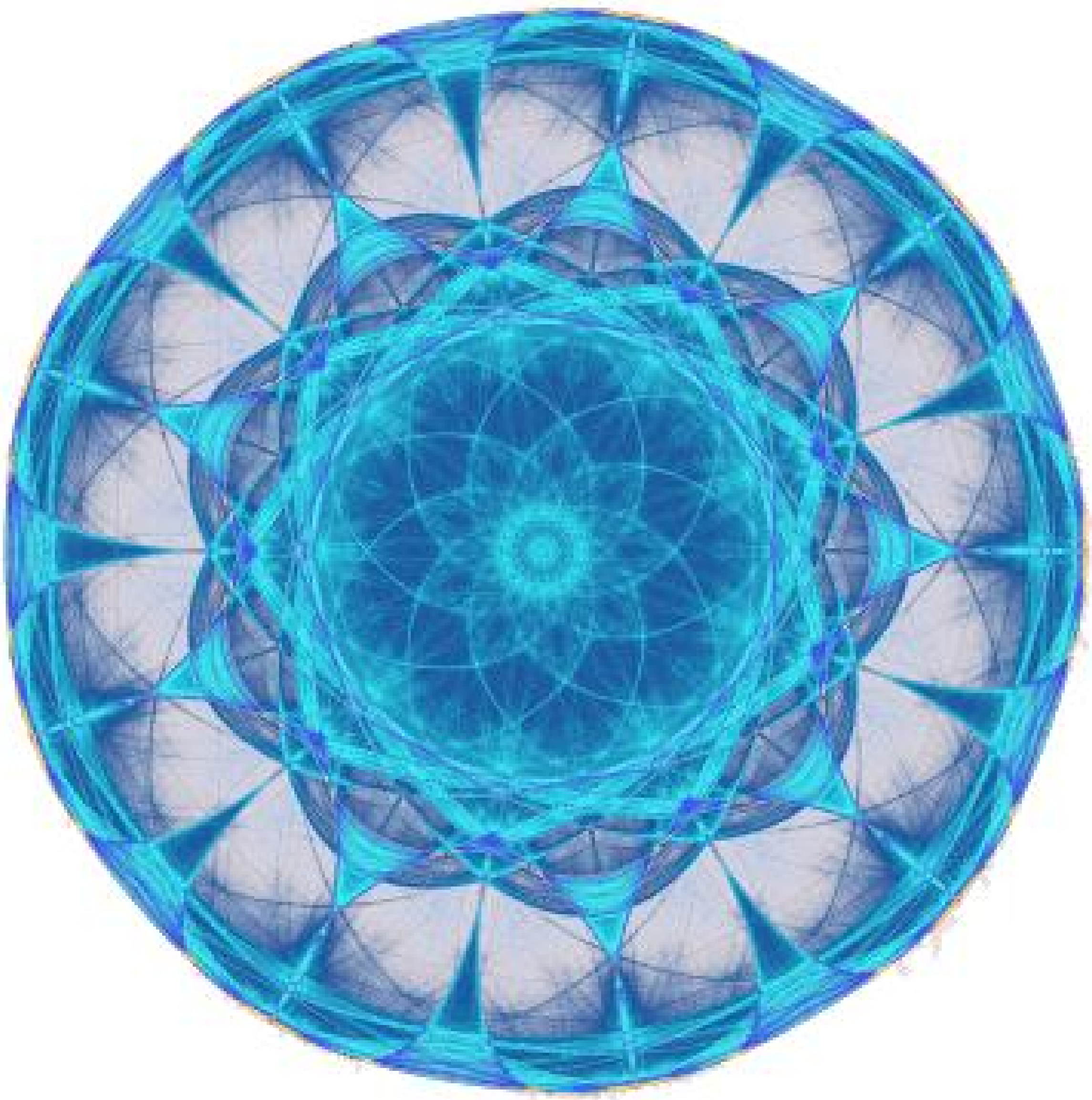
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

ΑΝΘΟΥΛΑ ΣΟΦΙΑΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΑΡΙΠΙΔΗΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Α. Πράξεις – Συζυγής - Μέτρο

Α.1

Να δείξετε ότι $[[((1+i)^2 - i)^4 + i]^2 - i]^4 = 1$

Υπόδειξη: απλή

Α.2

Να βρείτε το συζυγή του μιγαδικού $z = \frac{(2-i)(5+2i)}{1-4i}$

Υπόδειξη: απλή με δύο τρόπους

Α.3

Να λυθεί η εξίσωση: $iz + (2-10i)z = 3z + 2i$

Απάντηση: $z = -\frac{9}{41} - \frac{1}{41}i$

Α.4

Να γραφεί ο μιγαδικός αριθμός $1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + ... + (1+i)^{99}$ στη μορφή **α+βi**.

Απάντηση: $(1+2^{50})i$

Α.5

Να γραφεί ο μιγαδικός αριθμός στη μορφή **α+βi** ο μιγαδικός $z = (\frac{2+3i}{3-2i})^{40} + (\frac{1+2i}{2-i})^{40}$

Απάντηση: $1-i$

Α.6

Να αποδειχθεί ότι για κάθε πραγματική τιμή του θ η εξίσωση: $z^2 - 2\eta\mu\theta\, z + 1 = 0$ έχει μόνο δύο πραγματικές ρίζες.

Απάντηση: $z = \pm 1$

Α.7

Αν $z = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{1+i} + \frac{i}{2}$ τότε να δειχτεί ότι: $z^2 - 2z + \frac{5}{4} = 0$

Υπόδειξη: $z = ... = 1 + \frac{1}{2}i$, οπότε $z^2 - 2z + \frac{5}{4} = ... = 0$

A.8

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α. Δείξετε ότι : $\overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$. β. Δείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.

γ. Δείξετε ότι : $|z_1 + z_2 + z_3| = \dfrac{1}{3}|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$

Πανελλαδικές 2005

Υπόδειξη: α. υψώνουμε στο τετράγωνο β. Αρκεί να δείξουμε ότι ο $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι άθροισμα συζυγών ή αρκεί να δείξουμε $\overline{\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}} = \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$

γ. $|z_1 + z_2 + z_3| = |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = |\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}| = \ldots$ ή $\dfrac{1}{3}|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$=.....με $\overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$ κλπ

A.9

Να βρεθεί ο α$\in \mathbb{R}$ αν είναι γνωστό ότι ο μιγαδικός $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{a + (a+1)i} \in \mathbb{R}$

Απάντηση: $z = \overline{z} \Leftrightarrow \ldots. \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$

A.10

Αν $z \in \mathbb{C}$, $z \neq i$ και $\dfrac{2z+1}{z-i} \in \mathbb{R}$ να δειχτεί ότι: $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(2z+1)$

Υπόδειξη: $\dfrac{2z+1}{z-i} = (\overline{\dfrac{2z+1}{z-i}}) \Leftrightarrow \ldots. \Leftrightarrow y = 2x+1$ κλπ

A.11

Έστω $z = (2-i)^3 - a(2-i) + \beta + 4$. Να βρείτε τα α,β$\in \mathbb{R}$, ώστε z=0

Απάντηση: α=11 και β=16

A.12

Να βρείτε το x$\in \mathbb{R}$, ώστε ο μιγαδικός $z = \dfrac{(x-2i)i + 1 + 2i}{x + 2i} \in I$

Απάντηση: $z = -\overline{z} \Leftrightarrow \ldots. \Leftrightarrow$ x$= -\dfrac{4}{5}$

Α.13

Αν $z=(3+4i)^{2004}+(4+3i)^{2004}$ να αποδειχτεί ότι $z\in\mathbb{R}$

Υπόδειξη: Δείξτε ότι $\overline{z}=z$ με χρήση ιδιοτήτων

Α.14

Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε ο w = $\dfrac{\alpha+2+\alpha i}{1+\alpha i}$ να είναι φανταστικός

Υπόδειξη: $w=-\overline{w}\Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow\ a^2+a+2=0$ αδύνατη

Α.15

Αν ισχύει $|z+16|=4|z+1|$ να δείξετε ότι $|z|=4$

Υπόδειξη: Υψώνουμε κατά μέλη στο τετράγωνο ….. $|z|^2=16$ …

Α.16

Να δείξετε ότι η εξίσωση $(1+iz)^{\nu}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ (1)με $\nu\in N^*, z\in C$ δεν έχει πραγματική λύση.

Υπόδειξη: Αν ρ $\in\mathbb{R}$ ρίζα της εξίσωσης παίρνω τα μέτρα στην (1) και ρ=0, οπότε δεν επαληθεύει την (1)

Α.17

Έστω $z\in\mathbb{C}^*$ και $w=\dfrac{1}{\overline{z}}$. Αν η εικόνα των **z** κινείται στην ευθεία $x+2y=3$ να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής στην οποία κινείται η εικόνα των **w**.

Υπόδειξη: Αντικαταστάσεις ….και κύκλος Κ$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$ και ρ=$\dfrac{\sqrt{5}}{6}$

Α.18

Αν $\omega=\dfrac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$, με $\alpha\in\mathbb{R}^*$ και $z\neq\alpha i$, τότε να αποδειχθεί ότι:

Α. ο **ω** είναι φανταστικός αριθμός αν και μόνο αν ο **z** είναι φανταστικός αριθμός.

Β. ισχύει $|\omega|=1$ αν και μόνο αν ο **z** είναι πραγματικός αριθμός.

Πανελλήνιες 1991

Υπόδειξη: Α. $\omega=-\overline{\omega}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow z=-\overline{z}\Leftrightarrow z\in I$

Β. $|\omega|=1\Leftrightarrow$ υψώνουμε στο τετράγωνο και …. $z\in\mathbb{R}$

Α.19

Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός w με $w = \dfrac{z-\alpha}{z+\alpha}$ είναι φανταστικός.

Υπόδειξη: $\overline{w} = ... = \dfrac{\overline{z}-\alpha}{\overline{z}+\alpha}$ (1) και επειδή $|z| = \alpha \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{\alpha^2}{z}$ η (1) $\overline{w}=....=-w$

Α.20

Αν ισχύει ότι $\left|\dfrac{z+|z|}{2}\right| + \left|\dfrac{z-|z|}{2}\right| = |z|$ τότε ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Υπόδειξη: εφαρμογή μεθόδου 7

Α.21

Αν z και w είναι μιγαδικοί αριθμοί , να αποδειχθεί ότι:

Α. $|\overline{w}-z|^2 - (\ |w|-|z|\ )^2 = 2|wz| - 2\,\mathrm{Re}(wz)$ Β. $|w+z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(w\overline{z})$

Υπόδειξη: Πράξεις και ισχύει $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ και $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

Α.22

Β. Γεωμετρικοί τόποι

Β.1

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z=α+βi, όπου α,β∈R και w=3z – i $\bar{z}$ +4, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α. Να αποδείξετε ότι Re(w)=3α–β+4 Im(w)=3β–α.

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x–12, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x–2.

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x–2, έχει το ελάχιστο μέτρο.

Πανελλαδικές 2003

Απάντηση: α. απλή β. Το **Im(w)=y** και το **Re(w)= x** ....γ. Αν ε η ευθεία y=x-2 και ε΄ η κάθετη σε αυτήν που διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε το σημείο τομής τους η εικόνα του ζητούμενου. ή βρίσκω το μέτρο του z και το ελάχιστο αυτού. **z=1-i**

Β.2

Α. Να βρείτε γεωμετρικό τόπο των εικόνων των **z** για τον οποίο ισχύει : $|(1-i)z-2|=2$

Β. Να βρείτε γεωμετρικό τόπο των εικόνων των **w** για τον οποίο ισχύει : $\left|\dfrac{w+2i}{w-2+4i}\right|=1$

Γ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|\mathbf{z}-w|$

Υπόδειξη: Α. Κατάλληλες πράξεις και κύκλος Κ(1,1) και ρ= $\sqrt{2}$ Β. Ευθεία $x-y=4$ Γ. $\sqrt{2}$

Β.3

Έστω $z\in\mathbb{C}$ και $|2i\mathbf{z}-2-6\mathbf{i}|=2|\mathbf{z}-5-3\mathbf{i}|$ (1)

Α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z για τον οποίο ισχύει η (1)

Β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|\mathbf{z}|$

Υπόδειξη: Α. Κατάλληλες πράξεις και ευθεία $x+2y=6$ Β. $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

Β.4

Έστω ο μιγαδικός z = x+yi με x,y0R και y≠0. Αν $\boldsymbol{\omega}=\dfrac{\bar{\mathbf{z}}^2}{\mathbf{z-1}}\in\mathbb{R}$ να δείξετε ότι ο γ.τ. των Μ(x,y) είναι μια υπερβολή της οποίας έχουν εξαιρεθεί οι κορυφές.

Πανελλήνιες 1984

Υπόδειξη: εφαρμογή μεθόδου 11. $w=\overline{w}\Leftrightarrow ....\Leftrightarrow \dfrac{(x-\frac{1}{3})^2}{\frac{1}{3}}-\dfrac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}=1$

B.5

Αν $z\in\mathbb{C}$ με $|\mathbf{z}+6-2\mathbf{i}|\leq 8$ να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή του αριθμού $|\mathbf{z}-4+2\mathbf{i}|$

Υπόδειξη: εφαρμογή μεθόδου 9.

B.6

Δίνεται ο μιγαδικός $z\neq 2$. Αν ο αριθμός $w=\dfrac{z-3\bar{z}+2}{z-2}\in I$ να αποδειχθεί ότι τα σημεία **M(z)**

κινούνται στην υπερβολή $\dfrac{(x-\frac{3}{2})^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{8}}=1$ με εξαίρεση το σημείο **(2,0)**.

B.7

Έστω ότι $z=(2x-3)+(2y-1)i$, με x,y $\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x,y) για τα οποία $|2\mathbf{z}-1+3\mathbf{i}|=3$, είναι κύκλος του οπίου να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα.

Πανελλήνιες 1986

Απάντηση: $K(\frac{7}{4},-\frac{1}{4})$ και ρ=$\frac{3}{4}$

B.8

Α. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του μιγαδικού z, για τον οποίο ισχύει: $|z-2i|=3|z+2i|$

Β. Αν για τους $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ με $z_1,z_2\neq -2i$ ισχύει : $\dfrac{|z_1-2i|}{|z_1+2i|}=\dfrac{|z_2-2i|}{|z_2+2i|}=3$, να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $|z_1-z_2|$

Υπόδειξη: Α. Κύκλος κέντρου $K(0,-\frac{5}{2})$ και ρ=$\frac{3}{2}$ Β. $\dfrac{|z_1-2i|}{|z_1+2i|}=3\Leftrightarrow|z_1-2i|=3|z_1+2i|$ δηλ (Α) ερώτημα. Η $|z_1-z_2|$=3 μέγιστη όταν $A(z_1)$ και $B(z_2)$ αντιδιαμετρικά.

B.9

Οι μιγαδικοί **z ,w** έχουν αντίστοιχα εικόνες τα M_1 και M_2. Αν $w=\dfrac{2}{z}$ και το σημείο M_1 κινείται σε κύκλο κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας 3, να βρεθεί ο γ.τ. του σημείου M_2.

Υπόδειξη: 1ος τρόπος: Αντικατάσταση και πράξεις 1ος τρόπος: $|\mathbf{z}|$=3 και $|w|$=.....=$\frac{2}{3}$

Γ. Γενικές Ασκήσεις

Γ.1

Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{(z-1)(\overline{z}+1)}{z+\overline{z}}$ με $z\in\mathbb{C}$ και $\mathrm{Re}(z)\neq 0$.

Α) Να αποδειχθεί ότι $f(-\frac{1}{z})=f(z)$.

Β) Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία Μ(x,y) για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί $z=ax+\beta yi$ με $\alpha,\beta,x,y\in\mathbb{R}$ και $\alpha\beta x\neq 0$ ικανοποιούν τη σχέση $\mathrm{Re}[f(z)]=0$.

Πανελλήνιες 1993

Υπόδειξη: Α. αντικατάσταση και πράξεις Β. $f(z)=f(\alpha x+\beta y\iota)=\ldots$ οπότε $\mathrm{Re}[f(z)]=0\Leftrightarrow\ldots\ldots\Leftrightarrow$ έλλειψη $\dfrac{x^2}{(\frac{1}{\alpha})^2}-\dfrac{y^2}{(\frac{1}{\beta})^2}=1$ αν α ≠ β ή στον κύκλο $x^2+y^2=(\frac{1}{a})^2$ αν α=β.

Γ.2

Α. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς z_1,z_2 ισχύει $|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2$ αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=0$.

Β. Έστω μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=a^2+if(a),\ w=f(\beta)+i\beta^2$ με $\alpha\beta\neq 0$. Αν $|w|^2+|z|^2=|w-z|^2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Πανελλήνιες 1995

Υπόδειξη: Α. μέθοδος 7 Β. $A\pi\acute{o}$ (A) : $\mathrm{Re}(w\overline{z})=0\ldots w\overline{z}=\ldots o\pi\acute{o}\tau\varepsilon$ $f(\alpha)f(\beta)=-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}[f(a)]^2$ και θεώρημα Bolzano.

Γ.3